

### Übungen zur Selbstkontrolle II

1) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 4x - 2y = 12 \\ 3x - 3y = 24 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 8x - 6y = 0 \\ 4x + y = -3 \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 4x + 7y - 1 = 2x + y - 1 \\ -8x + 5y + 1 = 4x - y - 1 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 2x - 2y = 5 \\ -3x + 3y = 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} -4x - 2y = -2 \\ 2x + y = 1 \end{bmatrix}.$$

2) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (Additionsverfahren):

$$\text{a) } \begin{bmatrix} x + 2y + z = 1 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 7 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2x + y - 2z = -6 \\ y + z = 0 \\ 3x - 2z = 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 3x + 4y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } \begin{bmatrix} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ x + y = 1 \end{bmatrix}.$$

- 3) Aus zwei Kaffeesorten, die 8,00 bzw. 11,00 EURO pro kg kosten, sollen 12,5 kg einer Mischung hergestellt werden, von der 1 kg 9,08 EURO kosten. Wieviel muss man von jeder Sorte nehmen?
- 4) Bei der Geburt ihrer Tochter war die Mutter 24 Jahre alt. In 12 Jahren wird die Mutter doppelt so alt sein wie ihre Tochter. Wie alt sind beide heute?
- 5) Zwei Schulklassen sind unterschiedlich besetzt. ginge nur noch ein Schüler aus Klasse A in die Klasse B, so wäre B doppelt so stark wie A. Um beide Klassen gleich stark zu machen, müssten 5 Schüler von B nach A wechseln. Wie stark sind beide Klassen?
- 6) Auf einer Kleinkunstabühne tritt ein Rechenkünstler auf. Er fordert die Zuschauer auf, sich drei Zahlen zu denken und ihm nur die Summen von je zweien dieser Zahlen zu nennen. Er nennt dann unmittelbar die drei gedachten Zahlen. Zeigen Sie, dass Sie dies auch können, wenn auch mit ein wenig mehr Zeitaufwand. Herr Meier nennt die Summen 6, 9 und 11. Herr Müller die Summen 13, 17 und 18. Welche Zahlen hatten sich die beiden Herren gedacht?

### Übungen zur Selbstkontrolle II — Lösungen

- 1) Ergebnisse: Die ersten drei Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar. Die Lösungspunkte  $(x, y)$  sind: a)  $(-2, -10)$ , b)  $(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{4})$ , c)  $(\frac{1}{7}, -\frac{1}{21})$ .  
 d) hat keine Lösungen; die Lösungsmenge ist leer.  
 e) hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge ist die Gerade mit der Gleichung  $y = -2x + 1$ , also die Gerade mit dem Anstieg  $-2$  und dem  $y$ -Achsenabschnitt  $1$ .

Lösungswege:

- a) Gleichsetzungsverfahren: Löse beide Gleichungen nach  $y$  auf und ‘setze gleich’:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ 3x - 3y = 24 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x - 8 \end{cases} \\ \implies 2x - 6 = x - 8 &\iff x = -2 \\ \implies y = -2 - 8 = -10 \end{aligned}$$

- b) Einsetzungsverfahren: Löse die zweite Gleichung nach  $y$  auf und setze in die erste ein.

$$\begin{aligned} 4x + y = -3 &\iff y = -4x - 3 \\ \implies 0 = 8x - 6 \cdot (-4x - 3) = 32x + 18 &\iff x = -\frac{9}{16} \\ \implies y = -4 \cdot \left(-\frac{9}{16}\right) - 3 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

- c) Zunächst Umformung in die Standardform  $ax + by = c$ :

$$\begin{cases} 4x + 7y - 1 = 2x + y - 1 \\ -8x + 5y + 1 = 4x - y - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 12x - 6y = 2 \end{cases}$$

Dann Additionsverfahren: Addition beider Gleichungen eliminiert  $y$  und liefert  $x$ :

$$\implies 14x = 2 \iff x = \frac{1}{7}$$

Einsetzen in eine der beiden Ausgangsgleichungen ergibt  $y$ :

$$2 \cdot \frac{1}{7} + 6y = 0 \iff y = -\frac{1}{21}$$

- d) Additionsverfahren: Addition des 3-fachen der ersten Zeile zum 2-fachen der zweiten Zeile ergibt einen Widerspruch:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 5 \\ -3x + 3y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y = 5 \\ 0 = 19 \end{cases}$$

Die Gleichung (!)  $0 = 19$  ist falsch, das Gleichungssystem hat keine Lösung.

e) Additionsverfahren: Addition des Doppelten der zweiten Gleichung zur ersten zeigt, dass die erste Gleichung ‘überflüssig’ ist (sie folgt aus der zweiten):

$$\begin{bmatrix} -4x - 2y & = & -2 \\ 2x + y & = & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & = & 0 \\ 2x + y & = & 1 \end{bmatrix} \iff 2x + y = 1 \iff y = -2x + 1$$

Die erste Gleichung  $0 = 0$  ist immer wahr, also überflüssig, und das Gleichungssystem ist äquivalent zu der einen linearen Gleichung  $y = -2x + 1$ . Die gesuchte Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist also die Lösungsmenge der linearen Gleichung  $y = -2x + 1$ , also eine Gerade, und zwar die mit dem Anstieg  $-2$  und dem  $y$ -Achsenabschnitt  $1$ .

Die letzten beiden Beispiele von nicht eindeutig lösbaren Gleichungssystemen zeigen die wahre Stärke des Gaußschen Eliminationsverfahrens (Additionsverfahrens): Es werden *Widersprüche* oder *Redundanzen* (überflüssige Gleichungen) sichtbar gemacht.

2) Ergebnisse: Alle Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar.

Die Lösungspunkte  $(x, y, z)$  sind:

$$\text{a) } (2, -1, 1), \quad \text{b) } (3, -4, 4), \quad \text{c) } (0, 0, 0), \quad \text{d) } (1, 0, 1).$$

Lösungswege:

Wir benutzen die verkürzte Matrixschreibweise für die Gauß-Elimination.

$$\text{a) } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \cdot(-2) \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \iff \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{array} \iff \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

Wir lösen nun ‘von unten nach oben’ auf:

$$\begin{aligned} 5z &= 5 \iff z = 1, \\ 2y + 2z &= 0 \implies 2y + 2 \cdot 1 = 0 \iff y = -1, \\ x + 2y + z &= 1 \implies x + 2 \cdot (-1) + 1 = 1 \iff x = 2. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \downarrow + \\ \cdot 2 \end{array} \iff \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{array} \iff \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{array} \right)$$

Wir lösen nun ‘von unten nach oben’ auf:

$$\begin{aligned} 5z &= 20 \iff z = 4, \\ y + z &= 0 \implies y + 4 = 0 \iff y = -4, \\ 2x + y - 2z &= -6 \implies 2x - 4 - 2 \cdot 4 = -6 \iff x = 3. \end{aligned}$$

c) Hier sind einige Vereinfachungen möglich: Zunächst bietet es sich an, die ‘einfachste’ Gleichung  $x + y + z = 0$  als erste zu setzen (Zeilentausch), sodann eliminiert man die Variablen in umgekehrter Reihenfolge bei  $z$  beginnend (da in der dritten Gleichung  $z$  schon fehlt) und schließlich bleibt hier die rechte Seite immer unverändert, da überall eine  $0$  steht. Dies ergibt folgende Umformungskette:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{array} \iff \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{array} \iff \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Durch Auflösen von unten nach oben erhält man sukzessive  $x = 0$ ,  $y = 0$  und  $z = 0$ .

d) Auch hier eliminieren wir zuerst  $z$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot (-1) \quad \cdot 1 \quad \longleftrightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot 1 \quad \longleftrightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

Auflösen 'von unten nach oben' ergibt:

$$\begin{aligned} 4x &= 4 \iff x = 1, \\ 2x - 2y &= 2 \implies 2 \cdot 1 - 2y = 2 \iff y = 0, \\ -x + y + z &= 0 \implies -1 + 0 + z = 0 \iff z = 1. \end{aligned}$$

3) Seien  $x$  bzw.  $y$  die gesuchten Mengen der jeweiligen Sorte. Dann gilt:

$$x + y = 12,5 \quad \text{und} \quad x \cdot 8 + y \cdot 11 = 12,5 \cdot 9,08.$$

Wir lösen die erste Gleichung nach  $y$  auf und setzen in die zweite ein:

$$\begin{aligned} y &= 12,5 - x \implies 8x + 11 \cdot (12,5 - x) = 12,5 \cdot 9,08 \\ &\iff -3x + 11 \cdot 12,5 = 12,5 \cdot 9,08 \\ &\iff 3x = (11 - 9,08) \cdot 12,5 = 24 \iff x = 8. \end{aligned}$$

Man muss 8 kg der billigeren mit 4,5 kg der teureren Sorte mischen.

4) Sei  $x$  bzw.  $y$  das heutige Alter von Mutter bzw. Tochter. Da die Mutter bei der Geburt der Tochter 24 Jahre alt war, gilt  $x = y + 24$ . Der Vergleich der Alter in 12 Jahren ( $x + 12$  bzw.  $y + 12$ ) ergibt

$$x + 12 = 2 \cdot (y + 12) \iff x = 2y + 12.$$

Einsetzen von  $x = y + 24$  ergibt  $y + 24 = 2y + 12 \iff y = 12$ . Also ist die Tochter heute 12 und die Mutter 36 Jahre alt. (Kontrolle: In 12 Jahren ist die Tochter 24 und die Mutter 48 Jahre, also doppelt so alt wie die Tochter.)

5) Seien  $a$  bzw.  $b$  die Stärken der Klassen  $A$  bzw.  $B$ . Erste Bedingung: Ginge nur ein Schüler aus Klasse  $A$  in Klasse  $B$ , so wären die Klassenstärken  $a - 1$  bzw.  $b + 1$  und es gilt dann nach Vorgabe:  $b + 1 = 2 \cdot (a - 1)$

Zweite Bedingung: Wenn 5 Schüler von  $B$  nach  $A$  wechselten, wären die Klassenstärken  $a + 5$  bzw.  $b - 5$ , und es gilt nach Vorgabe:  $a + 5 = b - 5$ .

Die letzte Bedingung nach  $b$  aufgelöst ergibt  $b = a + 10$  und in die erste Bedingung eingesetzt erhält man:

$$b + 1 = 2(a - 1) \implies (a + 10) + 1 = 2a - 2 \iff 13 = a.$$

Klasse  $A$  hat also 13 Schüler und Klasse  $B$  demnach  $b = a + 10 = 23$ .

6) Die *gedachten* Zahlen seien  $x, y, z$ .

Herr Meier nennt als Summen von je zwei Zahlen die Werte 6, 9 und 11. Dann lautet das zu lösende Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} x + y & = & 6 \\ x & + & z = 9 \\ & y + z & = 11 \end{bmatrix}.$$

Das Gaußsche Eliminationsverfahren (in Matrixschreibweise) liefert:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \end{array} \right) \leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \end{array} \right) \leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 14 \end{array} \right)$$

Auflösung von unten nach oben ergibt

$$2z = 14 \iff z = 7, \quad -y + 7 = 3 \iff y = 4, \quad x + 4 = 6 \iff x = 2.$$

Herr Meier hat sich die Zahlen 2, 4 und 7 gedacht.

Herr Müller nennt als Summen von je zwei Zahlen die Werte 13, 17 und 18. Dann lautet das zu lösende Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} x + y & = & 13 \\ x & + & z = 17 \\ & y + z & = 18 \end{bmatrix}.$$

Wir führen wieder Gauß-Elimination durch:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & 18 \end{array} \right) \leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 18 \end{array} \right) \leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 22 \end{array} \right)$$

Auflösung von unten nach oben ergibt:

$$2z = 22 \iff z = 11, \quad -y + 11 = 4 \iff y = 7, \quad x + 7 = 13 \iff x = 6.$$

Herr Müller hat sich die Zahlen 6, 7 und 11 gedacht.