Übungen (10)

1) a) Wiederholen Sie Definition und fundamentale Gesetzmäßigkeiten für Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten (Skript 1.c.).
Überprüfen Sie Ihre Kenntnisse an den folgenden Aufgabenteilen.
b) Zeigen Sie:
i) $2^{21} - 2^{20} = 2^{20}$, ii) $4^{21} - 2 \cdot 4^{20} = 2^{41}$, iii) $\dfrac{2^{101} - 2^{100}}{2^{101} + 2^{100}} = \dfrac{1}{3}$.
c) Welche der folgenden Gleichungen sind allgemeingültig, welche nicht?
i) $a^5 + b^5 = (a+b)^5$ ii) $(-a^4)^3 = (-a^3)^4$
iii) $\dfrac{a^5}{b^3} = a^2 \cdot (\dfrac{a}{b})^3$ iv) $[(-a)^4]^3 = [(-a)^3]^4$

2) a) Wiederholen Sie Definition und Gesetzmäßigkeiten für Potenzen mit negativen Exponenten (Skript 2.e.).
Überprüfen Sie Ihre Kenntnisse an den folgenden Aufgabenteilen.
b) Berechnen Sie:
i) $(2^{121} - 2^{120}) \cdot (2^{-121} + 2^{-120}) =$, ii) $(3^{135} - 3^{133}) \cdot (3^{-133} - 3^{-135}) =$.
c) Welche der folgenden Gleichungen sind allgemeingültig und welche nicht?
i) $a^3 : b^3 = a^{-3} \cdot b^{-3}$ ii) $(-a^4)^{-3} = -\dfrac{1}{a^{12}}$
iii) $\dfrac{a^3}{b^5} = b^{-2} \cdot (\dfrac{a}{b})^3$, iv) $\dfrac{1}{a^{-2} + b^{-2}} = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

3) a) Welche der beiden Zahlen y, z ist größer? Begründen Sie Ihre Antwort.
i) $y = (9^9)^9$, $z = 9^{(9^9)}$, ii) $y = 4^{(4^4)}$, $z = 2^{(2^9)}$. iii) $y = (\dfrac{1}{5})^{(5^4)}$, $z = 5^{(-4^5)}$
b) Welche der folgenden Gleichungen sind allgemeingültig und welche nicht?
i) $a^3 < b^2$ für $0 < a < b$, ii) $(\dfrac{1}{a})^4 > (\dfrac{1}{a})^3$ für $0 < a < 1$,
iii) $a^{-4} > a^{-3}$ für $1 < a$, iv) $a^{-3} < \dfrac{1}{b^3}$ für $0 < b < a$.

4) Berechnen Sie:
a) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$ b) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}}$ c) $\sqrt[4]{\dfrac{49^2}{16}}$ d) $\sqrt[5]{8 \cdot (-4)}$ e) $\sqrt[5]{-(-4)^3 + (-2)^5}$
f) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$ g) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{64}$

5) Lösen Sie:
a) $\dfrac{8}{x-1} = (x-1)^2$ b) $\dfrac{4}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2}{4}$ c) $\sqrt[3]{x^2} = 2$ d) $-x^3 - 2 = x^3 + 14$

6) Berechnen Sie:
a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$, b) $49^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{7}$, c) $\dfrac{25^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{3}}}$, d) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$.
e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$, f) $(\sqrt[3n]{x^2})^n$, g) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}}}$.

Übungen (10) — Lösungen

1) a) Für natürliche Zahlen $k \in \mathbb{N}$ und beliebige reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ definiert man die k-te Potenz a^k als Produkt aus k gleichen Faktoren a:

$$a^k = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{k-\text{mal}} .$$

Daraus ergaben sich die fundamentalen Regeln (für $a \in \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}$):

$$\boxed{a^k \cdot a^l = a^{k+l}\,, \quad a^k \cdot b^k = (ab)^k\,, \quad (a^k)^l = a^{kl}\,.}$$

b) i) $2^{21} - 2^{20} = 2^{1+20} - 2^{20} = 2 \cdot 2^{20} - 2^{20} = (2-1) \cdot 2^{20} = 2^{20}$.
ii) $4^{21} - 2 \cdot 4^{20} = 4 \cdot 4^{20} - 2 \cdot 4^{20} = (4-2) \cdot 4^{20} = 2 \cdot (2^2)^{20} = 2 \cdot 2^{40} = 2^{41}$.
iii) $\dfrac{2^{101} - 2^{100}}{2^{101} + 2^{100}} = \dfrac{2^{100} \cdot (2-1)}{2^{100} \cdot (2+1)} = \dfrac{1}{3}$.
c) i) ist falsch, denn $(1+1)^5 = 2^5 \neq 1^5 + 1^5 = 2$.
ii) falsch, denn: $(-a^4)^3 = (-1)^3 \cdot a^{4\cdot 3} = -a^{12}$ und $(-a^3)^4 = (-1)^4 \cdot a^{3\cdot 4} = a^{12}$.
iii) ist allgemeingültig, denn: $\dfrac{a^5}{b^3} = \dfrac{a^2 \cdot a^3}{b^3} = a^2 \cdot (\dfrac{a}{b})^3$.
iv) ist allgemeingültig, denn $[(-a)^4]^3 = [a^4]^3 = a^{12}$ und $[(-a)^3]^4 = [-a^3]^4 = a^{12}$.

2) a) Man definiert für $a \neq 0$ $\boxed{a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^{-k} = \frac{1}{a^k}.}$

Dieser Ansatz ergibt sich aus der obigen Formel $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$. Setzt man darin $k = 0$, so kommt man zur genannten Definition von a^0, während sich für $l = -k$ die Definition für a^{-k} ergibt. Der entscheidende Sachverhalt ist, dass bei diesen erweiterten Definitionen die oben genannten fundamentalen Gesetzmäßigkeiten für Potenzen für Basen $a \neq 0$ und *beliebige* Exponenten $k \in \mathbb{Z}$ gültig bleiben!

Es gilt dann insbesondere: $\boxed{\text{Für } a \neq 0: \quad \frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}.}$

b) i) $(2^{121} - 2^{120}) \cdot (2^{-121} + 2^{-120}) = 2^0 - 2^{-1} + 2^1 - 2^0 = \dfrac{3}{2}$.
ii) $(3^{135} - 3^{133}) \cdot (3^{-133} - 3^{-135}) = 3^2 - 1 - 1 + 3^{-2} = \dfrac{64}{9}$.
c) i) ist nicht allgemeingültig, denn $2^3 : 1^3 = 8 \neq 2^{-3} \cdot 1^{-3} = \frac{1}{8}$.
ii) ist allgemeingültig, denn $(-a^4)^{-3} = \dfrac{1}{(-a^4)^3} = \dfrac{1}{-a^{12}} = -\dfrac{1}{a^{12}}$.
iii) ist allgemeingültig, denn $b^{-2} \cdot (\dfrac{a}{b})^3 = \dfrac{1}{b^2} \cdot \dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{a^3}{b^5}$.
iv) ist ebenfalls allgemeingültig, denn $\dfrac{1}{a^{-2} + b^{-2}} = \dfrac{a^2 b^2}{(a^{-2} + b^{-2}) \cdot a^2 b^2} = \dfrac{a^2 b^2}{b^2 + a^2}$.

3) a i) $z > y$, denn wegen $81 = 9^2 < 9^9$ ist $y = (9^9)^9 = 9^{81} < 9^{(9^9)} = z$.
ii) $y = z$, denn $4^4 = (2^2)^4 = 2^8$, also $y = 4^{(4^4)} = 4^{(2^8)} = 2^{2\cdot 2^8} = 2^{(2^9)} = z$.
iii) $z < y$, denn aus $4^5 = 1024 > 5^4 = 625$ folgt $5^{(4^5)} > 5^{(5^4)}$ und damit $z = 5^{(-4^5)} = \frac{1}{5^{(4^5)}} < \frac{1}{5^{(5^4)}} = (\frac{1}{5})^{(5^4)} = y$.
b) i) ist falsch für $a = 3$ und $b = 4$.
ii) ist allgemeingültig, denn $0 < a < 1 \implies \frac{1}{a} > 1 \implies (\frac{1}{a})^4 > (\frac{1}{a})^3$.
iii) ist falsch für $a = 2$, denn $2^{-4} = \frac{1}{16}$ und $2^{-3} = \frac{1}{8}$.
iv) ist allgemeingültig, denn $0 < b < a \implies \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \implies a^{-3} = (\frac{1}{a})^3 < (\frac{1}{b})^3$.

4) a) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = 2 \cdot \sqrt[3]{5 \cdot 5^2} = 2 \cdot 5 = 10$. b) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{3}{2}$.
c) $\sqrt[4]{\frac{49^2}{16}} = \sqrt[4]{\frac{7^4}{2^4}} = \frac{7}{2}$. d) $\sqrt[5]{8 \cdot (-4)} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$.
e) $\sqrt[5]{-(-4)^3 + (-2)^5} = \sqrt[5]{64 - 32} = \sqrt[5]{32} = 2$. f) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$.
g) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^4 \cdot 2^6} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$.

5) Bei dieser Aufgabe benutzen wir mehrfach, dass bei *ungeradem* Exponenten die Potenzierung und das Radizieren (Wurzelziehen) uneingeschränkt Äquivalenzumformungen sind.
a) Es ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{+1\}$ und $\mathbb{L} = \{3\}$, denn über $\mathbb{D}$ gilt

$$\frac{8}{x-1} = (x-1)^2 \iff 8 = (x-1)^3 \iff 2 = x - 1 \iff x = 3\,.$$

b) Hier ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $\mathbb{L} = \{-3, +1\}$, denn

$$\frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{4} \iff 16 = (x+1)^4 \iff x + 1 = \pm 2 \iff x = 1 \lor x = -3\,.$$

d) Es ist $\mathbb{L} = \{-\sqrt{8}, +\sqrt{8}\}$, denn

$$\sqrt[3]{x^2} = 2 \iff x^2 = 2^3 = 8 \iff x = \pm\sqrt{8}\,.$$

d) Hier ist $\mathbb{L} = \{-2\}$, denn

$$-x^3 - 2 = x^3 + 14 \iff -16 = 2x^3 \iff x^3 = -8 \iff x = \sqrt[3]{-8} = -2\,.$$

6) a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[3]{(\sqrt{3})^3} = \sqrt{3}$. b) $49^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7$.
c) $\frac{25^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{3}}} = \frac{5^{\frac{2}{4}}}{5^{\frac{1}{3}}} = 5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}\,.$ d) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{13}{15}} = (\sqrt[15]{2})^{13}$.
e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{(\sqrt[3]{a})^2} = \left|\sqrt[3]{a}\right| = \sqrt[3]{|a|}$. f) $(\sqrt[3n]{x^2})^n = (x^2)^{\frac{1}{3n}\cdot n} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2}\,.$
g) Dieser Term ist nur definiert für $a > 0$. Dafür gilt dann:
$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}}} = \left(a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$.