Übungen zur Potenzrechnung

Aus: Lambacher Schweizer, Lehrbuch Klasse 10, S. 22

4 Schreibe als Potenz.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{6}$ c) $\sqrt[4]{2}$ d) $\sqrt[3]{24^2}$ e) $\sqrt[5]{11^6}$ f) $\sqrt[4]{7^3}$ g) $\sqrt{5^6}$

h) $\sqrt[3]{18^2}$ i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ k) $\frac{1}{\sqrt[4]{12^3}}$ l) $\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$ m) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ n) $\frac{1}{\sqrt[r]{t^s}}$ o) $\frac{1}{\sqrt[n]{a^{r+1}}}$

5 Schreibe als Potenz, kürze und schreibe dann wieder als Wurzel ($a, r, s, t, x, y > 0$).

a) $\sqrt[4]{3^2}$ b) $\sqrt[6]{2^3}$ c) $\sqrt[12]{5^4}$ d) $\sqrt[10]{y^5}$ e) $\sqrt[9]{t^6}$ f) $\sqrt[8]{s^6}$ g) $\sqrt[18]{r^{12}}$

h) $\sqrt[4]{x^6}$ i) $\frac{1}{\sqrt[10]{2^8}}$ k) $\frac{1}{\sqrt[15]{3^{10}}}$ l) $\frac{1}{\sqrt[2n]{r^n}}$ m) $\frac{1}{\sqrt[16]{a^{4k}}}$ n) $\frac{1}{\sqrt[15]{x^{3k}}}$ o) $\frac{1}{\sqrt[3a]{x^{12a}}}$

6 Vereinfache.

a) $\sqrt[4]{100}$ b) $\sqrt[4]{25}$ c) $\sqrt{9^4}$ d) $\sqrt[6]{4^3}$ e) $\sqrt[10]{25^4}$ f) $\sqrt[8]{16}$ g) $\sqrt[6]{81}$

7 Schreibe als Potenz und berechne dann mit Hilfe des Taschenrechners auf 3 Dezimalen.

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt[5]{14}$ d) $\sqrt[10]{2}$ e) $\sqrt[4]{7^3}$ f) $\sqrt[5]{6^3}$ g) $\sqrt[6]{47^2}$

h) $\sqrt[3]{5}$ i) $\sqrt[3]{23}$ k) $\sqrt[3]{23^2}$ l) $\sqrt[6]{4}$ m) $\sqrt[7]{25}$ n) $1 : \sqrt[7]{2}$ o) $5 : \sqrt[3]{8}$

8 Es gilt $(-2)^3 = -8$. Was ist an der Rechnung $(-2)^3 = (-2)^{\frac{6}{2}} = \sqrt[2]{(-2)^6} = \sqrt[2]{64} = 8$ falsch?

9 Berechne.

a) $\sqrt[3]{(-3)^6}$ b) $\frac{1}{\sqrt{(-5)^4}}$ c) $\sqrt[7]{b^{14}}$ mit $b < 0$ d) $\sqrt[n]{b^{2n}}$ mit n aus $\mathbb{N}$, $n \neq 0$, $b < 0$

10 Schreibe als Wurzel.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ c) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{32}$ d) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{2{,}5}$ e) $\sqrt[4]{32} : \sqrt[4]{2}$

f) $\sqrt[3]{2x} : \sqrt[3]{x}$ g) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{4x}$ h) $\sqrt[4]{10y} : \sqrt[4]{2y}$ i) $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^3}$ k) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

11

a) $\sqrt[4]{6} : \sqrt[3]{6}$ b) $\sqrt[6]{5} : \sqrt[3]{5}$ c) $\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{5}$ d) $\frac{1}{\sqrt[4]{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{4}}$ e) $\sqrt[6]{\sqrt[4]{2^3}}$

f) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{4}$ g) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ h) $\sqrt[5]{3} : \sqrt{3}$ i) $\sqrt[3]{5} : \sqrt{5}$ k) $\sqrt[4]{2^9} \cdot \sqrt{2^9}$

l) $\sqrt[3]{x} : \sqrt{x}$ m) $\sqrt{x} : \sqrt[4]{x}$ n) $\sqrt[n]{3} : \sqrt[2n]{3}$ o) $\sqrt[n]{e^x} \cdot \sqrt[n]{e^x}$ p) $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} : \sqrt[n]{x}$

12

a) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[5]{7}$ b) $\sqrt{11} : \sqrt[5]{11}$ c) $\sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3^2}$ d) $\sqrt[n]{5} \cdot \sqrt[2n]{5}$

e) $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{3}$ f) $\sqrt[3]{25} : \sqrt[3]{5}$ g) $\sqrt[5]{0{,}2} \cdot \sqrt[5]{10}$ h) $\sqrt[4]{0{,}16} \cdot \sqrt[4]{0{,}01}$

13 Vereinfache.

a) $5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$ b) $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}$ c) $2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ d) $4^{-\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{3}{4}}$ e) $2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{-\frac{3}{10}}$

f) $10^{\frac{1}{2}} : 10^{\frac{1}{3}}$ g) $6^{-\frac{1}{2}} : 6^{\frac{2}{3}}$ h) $2^{-\frac{2}{3}} : 2^{-0{,}5}$ i) $a^{-\frac{1}{2}} : a$ k) $3^x : 3^{-\frac{1}{2}}$

l) $x^{\frac{1}{n}} \cdot x^{-\frac{1}{n}}$ m) $y^{\frac{1}{q}} : y^{\frac{1}{q}}$ n) $z^{-\frac{1}{n}} \cdot z^{-\frac{1}{n}}$ o) $t^{\frac{3}{n}} : t^{-\frac{1}{n}}$ p) $c^{-\frac{1}{2}} \cdot c^4$

14 Vereinfache.

a) $a^{\frac{6}{5}} \cdot a^{-1}$ b) $b^{\frac{2}{3}} : b$ c) $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$ d) $y^{\frac{2}{3}} : y^{-\frac{1}{3}}$ e) $z^{1,2} \cdot z^{-0,7}$

f) $(2a)^{\frac{5}{4}} : (2a)^{\frac{3}{4}}$ g) $(5b^{-2}) : b^{-3}$ h) $(ax)^t \cdot (ax^{-6})$ i) $(8x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (8x)^2$ k) $(15y)^{-2} : (15y)^{-3}$

15 Vereinfache.

a) $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4$ b) $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4$ c) $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$ d) $\left(4^{\frac{1}{5}}\right)^{-\frac{3}{4}}$ e) $\left(3^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{4}{5}}$

16

a) $\left(x^{\frac{5}{4}} : y^{-\frac{5}{8}}\right)^{-\frac{4}{5}}$ b) $\left(x^{\frac{4}{5}} \cdot y^{-\frac{8}{5}}\right)^{-\frac{5}{8}}$ c) $\left(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right)^2$ d) $\left(a^{\frac{5}{6}} + b^{\frac{1}{6}}\right)^2$

17 Schreibe mit nur einem Wurzelzeichen.

a) $\sqrt{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ e) $\sqrt[n]{\sqrt[3]{a}}$ f) $\sqrt{\sqrt[n]{a}}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$ h) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$ i) $\sqrt{3\sqrt{x}}$ k) $\sqrt[3]{5\sqrt{a^3}}$ l) $\sqrt[3]{9\sqrt[3]{9}}$ m) $\sqrt[3]{\sqrt[n]{x}}$

18 Vereinfache.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{4^9}}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8^4}}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{216}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{256}}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{32\,768}}$

19

a) $\frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{b^3}}$ b) $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x}}$ c) $\frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a} : \sqrt[3]{a}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{2y} : \sqrt[3]{y}}{\sqrt{y} : \sqrt[4]{y}}$ e) $\frac{\sqrt{t} : \sqrt[3]{t}}{t}$ f) $\left(\frac{10^n : 2^n}{\sqrt{5}}\right)^2$

20

a) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$ b) $\left(\sqrt[5]{2}\right)^{-10}$ c) $\left(\sqrt[6]{x}\right)^4$ d) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^{-2}$ e) $\left(\sqrt{x^3}\right)^4$ f) $\left(\sqrt[10]{y^3}\right)^5$

g) $\left(\sqrt{s}\right)^{2n}$ h) $\left(\sqrt[3]{s^4}\right)^{3n}$ i) $\left(\sqrt[n]{t^3}\right)^{2n}$ k) $\left(\sqrt[2n]{x}\right)^n$ l) $\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^8$ m) $\left(\sqrt{\sqrt{b^3}}\right)^{4n}$

21 Radiziere teilweise und vereinfache, falls möglich.

a) $\sqrt{8}$ b) $\frac{\sqrt{27}}{3}$ c) $\frac{\sqrt[3]{40}}{2}$ d) $\frac{2}{\sqrt{12}}$ e) $\sqrt[4]{241\,x^3}$ f) $\sqrt[3]{9\,a^4}$

g) $\sqrt{(-5)^4 x^5}$ h) $\sqrt{x^3(a+b)^5}$ i) $\sqrt[6]{a^{-11} b^{-7}}$ k) $\sqrt[5]{a^6(x-9)^{-7}}$ l) $\sqrt[3]{a^9 b^{12} c^4}$ m) $\sqrt{a^4 b^3 c^5}$

22 Mache den Nenner rational und vereinfache, falls möglich.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ d) $\sqrt{\frac{5}{11}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

g) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ h) $\frac{2}{\sqrt[4]{4}}$ i) $\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$ k) $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$ l) $\sqrt{\frac{1}{a}}$ m) $\left(\frac{4}{3y}\right)^{\frac{1}{3}}$

23

a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4a^2}}$ b) $\frac{3b}{\sqrt[4]{27b^3}}$ c) $\frac{d}{\sqrt{8d^3}}$ d) $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}$ e) $\frac{1}{\sqrt[6]{(4-x)^2}}$

24

a) $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ b) $\frac{2\sqrt{x}-15\sqrt{y}}{\sqrt{x}+5\sqrt{y}}$ c) $\frac{3p-\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1}$ d) $\frac{\sqrt{2u}-2\sqrt{v}}{\sqrt{u}-\sqrt{2v}}$ e) $\frac{(3-3\sqrt{x})x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

25 Schreibe als eine Wurzel aus einem Term.

a) $\sqrt[3]{5} \cdot 7$ b) $\sqrt[a]{x^b} \cdot x^b$ c) $(a-b) \cdot \sqrt{(a-b)}$ d) $(z-y)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{(y+z)^2}$

26 Vereinfache.

a) $\left(\sqrt{18} - \sqrt{32}\right) \cdot \sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}}{\sqrt[4]{2401}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ c) $\left(\sqrt[b]{a^{2b-3}} - \sqrt[b]{a^{3-b}}\right) : \sqrt[b]{a^{b-3}}$

Lambacher Schweitzer Band 10, S. 22/23 – Ergebnisse

Aufgabe 4:

a) $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$ c) $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$ d) $\sqrt[3]{24^2} = 24^{\frac{2}{3}}$
e) $\sqrt[5]{11^6} = 11^{\frac{6}{5}}$ f) $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$ g) $\sqrt{5^6} = 5^3$ h) $\sqrt[3]{18^2} = 18^{\frac{2}{3}}$
i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$ k) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{12^3}} = 12^{-\frac{3}{4}}$ l) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7^2}} = 7^{-\frac{2}{3}}$ m) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{-\frac{2}{3}}$
n) $\dfrac{1}{\sqrt[r]{t^s}} = t^{-\frac{s}{r}}$ o) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^{r+1}}} = a^{-\frac{r+1}{n}}$

m)–o) nur möglich und gültig für positive Basen a, t.

Aufgabe 5:

a) $\sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ b) $\sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
c) $\sqrt[12]{5^4} = 5^{\frac{4}{12}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ d) $\sqrt[10]{y^5} = y^{\frac{5}{10}} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$
e) $\sqrt[9]{t^6} = \sqrt[3]{t^2}$ f) $\sqrt[8]{t^6} = \sqrt[4]{t^3}$ g) $\sqrt[18]{r^{12}} = \sqrt[3]{r^2}$ h) $\sqrt[4]{x^6} = \sqrt{x^3}$
i) $\dfrac{1}{\sqrt[10]{2^8}} = 2^{-\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{2^4}}$ k) $\dfrac{1}{\sqrt[15]{3^{10}}} = 3^{-\frac{10}{15}} = 3^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3^2}}$
l) $\dfrac{1}{\sqrt[2n]{r^n}} = \sqrt{\dfrac{1}{r}}$ m) $\dfrac{1}{\sqrt[16]{a^{4k}}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{a^k}}$ n) $\dfrac{1}{\sqrt[15]{x^{3k}}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{x^k}}$ o) $\dfrac{1}{\sqrt[3a]{x^{12a}}} = \dfrac{1}{x^4}$

Beachten Sie: Alle Probleme mit dem Definitionsbereich der verschiedenen Terme sind Ihnen durch die Aufgabenstellung abgenommen: Dort sind alle Variablen als positiv deklariert. Beachten Sie aber bei derartigen Rechnungen immer das Vorzeichen. Ohne diese Voraussetzung sind einige der obigen Formeln *falsch.* Korrekturen:
f) $\sqrt[8]{t^6} = |t|^{\frac{6}{8}} = |t|^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{|t|^3} \quad (t \in \mathbb{R})$ h) $\sqrt[4]{x^6} = \sqrt{|x|^3} \quad (x \in \mathbb{R})$

Aufgabe 6:

a) $\sqrt[4]{100} = \sqrt{10}$ b) $\sqrt[4]{25} = \sqrt{5}$ c) $\sqrt{9^4} = 9^2 = 81$ d) $\sqrt[6]{4^3} = \sqrt{4} = 2$
e) $\sqrt[10]{25^4} = \sqrt[5]{25^2} = \sqrt[5]{5^4}$ f) $\sqrt[8]{16} = \sqrt{2}$ g) $\sqrt[6]{81} = \sqrt[3]{9}$

Aufgabe 7:

a) $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}} \approx 2{,}645751$ b) $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}316074$
c) $\sqrt[5]{14} = 14^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}695218$ d) $\sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{10}} \approx 1{,}071773$
e) $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}} \approx 1{,}681793$ f) $\sqrt[5]{6^3} = 6^{\frac{3}{5}} \approx 2{,}930156$
g) $\sqrt[6]{47^2} = 47^{\frac{1}{3}} \approx 3{,}608826$ h) $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}709976$
i) $\sqrt[3]{23} = 23^{\frac{1}{3}} \approx 2{,}843867$ k) $\sqrt[3]{23^2} = 23^{\frac{2}{3}} \approx 8{,}087579$
l) $\sqrt[6]{4} = 4^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}259921$ m) $\sqrt[7]{25} = 25^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}58382$
n) $1 : \sqrt[7]{2} = 2^{-\frac{1}{7}} \approx 0{,}905724$ o) $1 : \sqrt[3]{8} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

Aufgabe 8:

Der Fehler liegt an der gekennzeichneten Stelle:

$$-8 = (-2)^3 = (-2)^{\frac{6}{2}} \underset{\Uparrow}{=} \sqrt[2]{(-2)^6} = \sqrt[2]{64} = 8\,,$$

denn die Definition von Potenzen mit gebrochenen Exponenten ist nur gültig und gerechtfertigt für **positive Basen**:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \quad \text{nur für } a > 0!$$

Das obige Beispiel zeigt zugleich den entscheidenden Grund dafür, die Definition von Potenzen mit gebrochenen Exponenten auf positive Basen einzuschränken: Würde man dies nicht tun, so könnte man wie oben gezeigt einen Widerspruch $8 = -8$ herleiten. Die Mathematik wäre nicht mehr *widerspruchsfrei!* Dies würde aber bedeuten, dass man im Rahmen der Mathematik *alles* herleiten könnte: jede Aussage und zugleich ihre Negation. Damit wären die Aussagen der Mathematik wertlos.
Dieser Widerspruch entsteht aber sogar unabhängig von der gewählten Definition für Potenzen mit gebrochenen Exponenten. Denn aufgrund des fundamentalen Potenzgesetzes $(a^r)^s = a^{rs}$, dessen Gültigkeit immer gefordert wird, ergäbe sich der folgende Widerspruch:

$$-2 = (-2)^{2\cdot\frac{1}{2}} = \left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2\cdot\frac{1}{2}} = 2\,.$$

Das Potenzgesetz $(a^r)^s = a^{rs}$ kann für Potenzen mit negativen Basen und gebrochenen Exponenten nicht allgemeingültig sein! Daher muss man die Definition von Potenzen mit gebrochenen Exponenten auf positive Basen einschränken.

Aufgabe 9:

a) $\sqrt[3]{(-3)^6} = \sqrt[3]{3^6} = 3^{\frac{6}{3}} = 3^2 = 9,$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{(-5)^4}} = \dfrac{1}{\sqrt{5^4}} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25},$

c) $\sqrt[7]{b^{14}} = \sqrt[7]{|b|^{14}} \underset{(*)}{=} |b|^{\frac{14}{7}} = |b|^2 = b^2.$

d) $\sqrt[n]{b^{2n}} = \sqrt[n]{|b|^{2n}} \underset{(*)}{=} |b|^{\frac{2n}{n}} = |b|^2 = b^2.$

Die Umformungen in c) und d) gelten für alle b! Allerdings ist die jeweilige Umformung $(*)$ ohne die Betragsstriche *falsch,* auch wenn am Ende die Betragsstriche wieder wegfallen können!
Alternative Lösung von c)/d) ohne gebrochene Exponenten:

c) $\sqrt[7]{b^{14}} = \sqrt[7]{(b^2)^7} = b^2,$

d) $\sqrt[n]{b^{2n}} = \sqrt[n]{(b^2)^n} = b^2$ (wegen $b^2 \geq 0$).

Aufgabe 10:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2,$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = 9,$

c) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{32} = \sqrt{8},$

d) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{2{,}5} = \sqrt[5]{10},$

e) $\sqrt[4]{32} : \sqrt[4]{2} = 2,$

f) $\sqrt[3]{2x} : \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{2}$ (für $x \neq 0$)

g) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{4x} = 2x$ (für $x > 0$),

h) $\sqrt[4]{10y} : \sqrt[4]{2y} = \sqrt[4]{5}$ (für $y > 0$),

i) $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^3} = x,$

k) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x}$ (für $x \neq 0$).

Aufgabe 11:

a) $\sqrt[4]{6} : \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = 6^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{6}},$

b) $\sqrt[6]{5} : \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} = 5^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{5}},$

c) $\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2},$

d) $\frac{1}{\sqrt[4]{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^4\cdot 3}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}},$

e) $\sqrt[6]{\sqrt[4]{2^3}} = 2^{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2},$

f) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{7}{12}} = 2^{\frac{7}{6}} = 2\sqrt[6]{2},$

g) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{32},$

h) $\sqrt[5]{3} : \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{3}{10}} = \frac{1}{\sqrt[10]{27}},$

i) $\sqrt[3]{5} : \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 5^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{5}},$

k) $\sqrt[4]{2^9} \cdot \sqrt{2^9} = 2^{\frac{9}{4}+\frac{9}{2}} = 2^{\frac{27}{4}} = 2^6 \cdot \sqrt[4]{2^3},$

Aufgabe 12:

a) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[5]{7}=7^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=7^{\frac{8}{15}}=\sqrt[15]{7^8}$, b) $\sqrt{11}:\sqrt[5]{11}=11^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}=11^{\frac{3}{10}}=\sqrt[10]{11}$,

c) $\sqrt[4]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}^2=3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}=3^{\frac{7}{6}}=\sqrt[6]{3^7}$, d) $\sqrt[n]{5}\cdot\sqrt[2n]{5}=5^{\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}}=5^{\frac{3}{2n}}=\sqrt[2n]{5^3}$,

e) $\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3^3}$, f) $\dfrac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{5}$,

g) $\sqrt[5]{0{,}2}\cdot\sqrt[5]{10}=\sqrt[5]{2}$,

h) $\sqrt[4]{0{,}16}\cdot\sqrt[4]{0{,}01}=\sqrt[4]{16\cdot10^{-4}}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{10^{-4}}=2\cdot10^{-1}=0{,}2$,

Aufgabe 13:

Die Terme werden nicht nur vereinfacht, sondern auch *ohne* gebrochene Exponenten mittels Wurzeln dargestellt:

a) $5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5^3}$, b) $3^{\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=3^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{3^7}$,

c) $2^{\frac{1}{4}}\cdot2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, d) $4^{-\frac{2}{3}}\cdot4^{\frac{3}{4}}=2^{-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}}=2^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{2}$,

e) $2^{\frac{3}{5}}\cdot2^{-\frac{3}{10}}=2^{\frac{3}{5}-\frac{3}{10}}=2^{\frac{3}{10}}=\sqrt[10]{2^3}$, f) $10^{\frac{1}{2}}:10^{\frac{1}{3}}=10^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=10^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{10}$,

g) $6^{-\frac{1}{2}}:6^{\frac{2}{3}}=6^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=6^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{6}$, h) $2^{-\frac{2}{3}}:2^{-0{,}5}=2^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{7}{6}}=\frac{1}{\sqrt[6]{7}}$,

i) $a^{-\frac{1}{2}}:a=a^{-\frac{1}{2}-1}=a^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a^3}}$, j) $3^x:3^{-\frac{1}{2}}=3^{x-\frac{1}{2}}=3^{\frac{2x-1}{2}}=\sqrt{3^{2x-1}}$,

Aufgabe 14:

Die Terme werden nicht nur vereinfacht, sondern auch *ohne* gebrochene Exponenten mittels Wurzeln dargestellt:

a) $a^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{a}$ b) $b^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{b}}$ c) $x^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{x^3}=(\sqrt[4]{x}\,)^3$

d) y e) $z^{0,5}=\sqrt{z}$ f) $(2a)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2a}$

g) $5b$ h) a^2x^{t-6}

i) $8^{\frac{7}{2}}\cdot x^5=2^{\frac{21}{2}}\cdot x^5=2^{10}\sqrt{2}\cdot x^5$ k) $15y$

Aufgabe 15:

Die Terme werden nicht nur vereinfacht, sondern auch *ohne* gebrochene Exponenten mittels Wurzeln dargestellt:

a) 4 b) 9 c) $5^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{5}$

d) $4^{-\frac{3}{20}}=2^{-\frac{3}{10}}=\dfrac{1}{\sqrt[10]{8}}$ e) $3^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{27}$

Aufgabe 16:

Die Terme werden nicht nur vereinfacht, sondern auch *ohne* gebrochene Exponenten mittels Wurzeln dargestellt:

a) $x^{(\frac{5}{4}+\frac{5}{8})(-\frac{4}{5})}=x^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ b) $x^{(\frac{4}{5}-\frac{8}{5})(-\frac{5}{8})}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

Die nächsten beiden Umformungen kann man kaum als Vereinfachungen bezeichnen. Aber als Übung zur Anwendung binomischer Formeln bei gebrochen Exponenten hier die intendierten Ergebnisse:

c) $x^3-2(xy)^{\frac{3}{2}}+y^3=x^3-2\sqrt{x^3y^3}+y^3$ d) $a^{\frac{5}{3}}+2a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a^5}+2\sqrt[6]{a^5b}+\sqrt[3]{b}$

Aufgabe 17:

a) $\sqrt{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$, b) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}=2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{2}$,

c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[9]{5}$, d) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$,

e) $\sqrt[n]{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3n]{a}$, f) $\sqrt{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[2n]{a}$,

g) $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$,

h) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[12]{x}$,

i) $\sqrt{3\sqrt{x}} = \left(3x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left((3^2x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{9x}$,

k) $\sqrt[3]{5\sqrt{a^3}} = \left(5a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = (5^2a^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{25a^3}$,

l) $\sqrt[3]{9\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{9^{1+\frac{1}{3}}} = 9^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt[9]{9^4}$,

m) $\sqrt[3]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[3n]{x}$.

Aufgabe 18:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{4^9}}} = 2^{18\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}} = 2$,

b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8^4}}} = 2^{3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 2$,

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{216}} = 6^{3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$,

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{256}} = 2^{8\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$,

e) $32768 = 4\cdot 8192 = 4^2\cdot 2048 = 4^3\cdot 512 = 2^6\cdot 2^9 = 2^{15}$, also $\sqrt[3]{\sqrt[5]{32768}} = 2^{15\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}} = 2$.

Aufgabe 19:

a) $b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}} = b^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{b}$

b) $x^{1-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$

c) $a^{\frac{5}{6}-(1-\frac{1}{3})} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{y^{1-\frac{1}{4}}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{y^3}}$

e) $t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-1} = t^{-\frac{5}{6}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{t^5}}$

f) $10^{2n}\cdot 2^{-2n}\cdot 5^{-1} = 5^{2n-1}$

Aufgabe 20:

a) 25	b) $2^{-2} = \dfrac{1}{4}$	c) $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$	d) $x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
e) x^6	f) $\sqrt{y^3}$	g) s^n	h) s^{4n}
i) t^6	k) $\sqrt{x}$	l) 9	m) b^{3n}