5. Lineare Funktionen und ihre Graphen

a. Relationen und ihre Graphen. Bisher haben wir im wesentlichen nur (Un)Gleichungen mit einer Variablen untersucht. Wir wollen nun (Un)Gleichungen mit 2 Variablen betrachten, zum Beispiel

$$x \leq y\,, \quad 3x - 2y = 1\,, \quad x^2 + y^2 = 1\,.$$

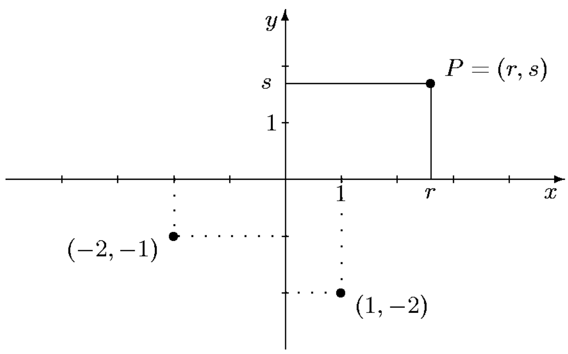
Solche (Un)Gleichungen stellen *Relationen* zwischen den beiden Variablen her. Derartige Relationen kommen in vielfältigsten Formen vor: Physikalische Größen stehen in einer Relation zueinander, etwa Masse und Gewicht, Federkraft und Federverlängerung, Stromstärke und Spannung, und viele mehr. Aber auch 'Dreieck ... ist kongruent zum Dreieck ...' ist eine Relation im hier betrachteten Sinne. Wir werden hier aber nur Relationen zwischen Zahlen betrachten.

Definition: a) Eine (zweistellige) *Relation* ist eine Aussageform mit *zwei* Variablen, etwa x und y. Dazu gehören insbesondere (Un)Gleichungen mit zwei Variablen x und y.
b) Um eine Lösung einer Relations(un)gleichung anzugeben, muss man für *beide* Variablen x *und* y Zahlen angeben, bei deren Einsetzung die (Un)Gleichung wahr wird. Eine einzelne *Lösung* einer Relation ist daher ein Zahlen*paar* (r, s) und die *Lösungsmenge* besteht daher aus allen Paaren (r, s), bei deren Einsetzung die Relation wahr wird. Die *Menge aller Paare von rationalen Zahlen* bezeichnet man mit $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(r, s) \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$. Lösungsmengen von (Un)Gleichungen mit zwei Variablen sind daher Teilmengen von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Zum Beispiel ist die Gleichung $y^2 + xy = x^3$ eine Relation. Einige Lösungspaare sind etwa $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(2, -4)$, $(6, -18)$, $(6, 12)$. Es ist jedoch nicht so einfach zu erkennen, wie man weitere Lösungspaare finden soll.

Um Relationen zu veranschaulichen, stellt man ihre Lösungsmenge graphisch dar. Zur Darstellung von *Zahlenpaaren* benutzt man ein sog. *Kartesisches*[1] *Koordinatensystem* aus zwei sich rechtwinklig schneidenden Achsen, der *ersten* oder x-Achse und der *zweiten* oder y-Achse. Die x-Achse wird gewöhnlich horizontal und die y-Achse vertikal gezeichnet.

Ein *Zahlenpaar* (r, s) wird nun durch einen *Punkt* in der Zeichenebene repäsentiert (siehe nachfolgende Skizze). Umgekehrt bestimmt jeder Punkt P der Zeichenebene ein solches Zahlenpaar (r, s), seine *Koordinaten.* Man erhält sie, indem man von dem Punkt P aus die Lote auf die Achsen fällt. Die entstehenden Abschnitte auf den Achsen geben die beiden Koordinaten r, s an. Man nennt r die *erste* oder x-Koordinate und s die *zweite* oder y-Koordinate. Diese Koordinaten geben an, wie weit man in x- und dann in y-Richtung 'gehen' muss, um zum Punkt P zu gelangen. Dabei zeigen die Vorzeichen an, ob man nach rechts oder links bzw. nach oben oder unten zu 'gehen' hat. Die Pfeile an den Koordinatenachsen bezeichnen immer die positive Richtung.



Die *Lösungsmenge* $\mathbb{L}$ einer (Un)Gleichungsrelation besteht aus allen Zahlenpaaren $(r, s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, die die Relation *erfüllen,* und als Teilmenge aller Zahlenpaare im Koordinatenkreuz graphisch veranschaulicht werden. Diese graphische Darstellung der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ einer Relation nennt man den *Graphen* der Relation.

Will man für eine Relation den Graphen bestimmen, so wird man zunächst die gegebene Relation durch Äquivalenzumformungen zu vereinfachen suchen. Definitionsgemäß bleiben dabei die Lösungsmenge und folglich auch der Graph unverändert. So ist etwa die Relation $3x(1+y) = 3y(x+1)+3$ äquivalent zu $y = x-1$, so dass beide denselben Graphen haben. Die letztgenannte Gleichung ist nun von besonderer Form, sie ist eine *Funktionsgleichung.*

[1] René Descartes 1596–1650, Mathematiker und Philosoph

b. Funktionen. Eine *Funktionsgleichung* ist eine Gleichung mit 2 Variablen, die folgende spezielle Gestalt hat:

$$y = f(x)\,,\ \ f(x) \text{ ein Term mit nur einer Variablen } x\,.$$

Es handelt sich dabei also um eine Gleichung, die nach y 'aufgelöst' ist und auf der anderen Seite der Gleichung nur noch die Variable x enthält. Man nennt die rechte Seite $f(x)$ dann den *Funktionsterm.* Die Graphen von Funktionsgleichungen nennt man *Funktionsgraphen.*

Unter den Relationen nehmen die Funktionsgleichungen eine besondere Stellung ein, da man für sie leicht Lösungspunkte finden kann: Man wähle einen beliebigen x-Wert, setze diesen für x in den Funktionsterm $f(x)$ ein, berechne den Wert des Terms und wähle dann y als den so gefundenen Wert; dann hat man offenbar eine Lösung von $y = f(x)$ gefunden. Man erkennt, dass zu einem x-Wert nur ein einziger y-Wert 'passt'.

Wir halten fest:
- *Hat eine Funktionsgleichung zwei Lösungspunkte mit derselben x-Koordinate, so müssen auch die y-Koordinaten übereinstimmen.*

Für den Graphen bedeutet dies:
- *Parallelen zur y-Achse treffen einen Funktionsgraphen nur in einem Punkt.*

Im Umkehrschluss bedeutet dies:
- *Hat eine Relation zwei verschiedene Lösungspunkte mit derselben x-Koordinate, so kann die Relation nicht zu einer Funktionsgleichung äquivalent sein.*
- *Trifft eine Parallele zur y-Achse einen Relationsgraphen in zwei verschiedenen Punkten, so ist der Graph kein Funktionsgraph.*

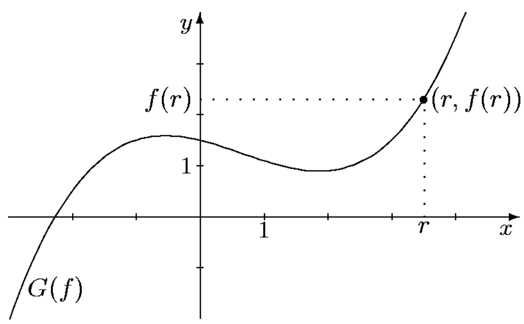
Wir haben oben gesehen, dass bei Funktionsgleichungen zu jedem x-Wert nur ein passender y-Wert gehören kann, so dass beide zusammen einen Lösungspunkt ergeben. Es wird dadurch also dem x-Wert ein passender y-Wert 'zugeordnet'. Es liegt daher eine *Funktion* (im Sinne der nachfolgenden Definition) vor:

> Eine *Funktion* ist eine *Zuordnung,* die jeder Zahl r (aus einer Menge D) eine eindeutig bestimmte Zahl $f(r)$ zuordnet.
> $f(r)$ (lesen Sie 'f von r') ist der dem Element r zugeordnete *Wert,* wir sagen auch: $f(r)$ ist der *Funktionswert* von f *an der Stelle* r.
> Die Menge D nennen wir den *Definitionsbereich* von f und schreiben für solche Funktionen auch $f : D \to \mathbb{Q}$ (lesen Sie: 'f von D in $\mathbb{Q}$').

Welcher Art die Zuordnung ist, ist dabei unerheblich; entscheidend ist, dass
1. *jedem* Element der Menge D eine Zahl zugeordnet wird, und
2. dass das zugeordnete Element jeweils *eindeutig* bestimmt ist.

Die häufigste Methode, eine Funktion f zu definieren, ist die Angabe einer Funktionsgleichung $y = f(x)$ mit einem Funktionsterm $f(x)$ für f (siehe oben). Die Funktionsvorschrift für f lautet dann: *Setze im Term $f(x)$ für die Variable x eine beliebige Zahl r ein und rechne aus. Das Ergebnis ist der zu r gehörige Funktionswert $f(r)$.*

Eine wichtige Möglichkeit, Funktionen zu erfassen, ist ihre graphische Darstellung. Man markiert den 'Verlauf' einer Funktion f in einem Koordinatenkreuz folgendermaßen: Für jedes Element r des Definitionsbereiches D markiert man (siehe nebenstehende Skizze) im Koordinatenkreuz den Punkt $(r, f(r))$, dessen x-Koordinate r und dessen y-Koordinate der zugehörige Funktionswert $f(r)$ ist. Die Menge aller dieser Punkte $(r, f(r))$ in der x-y-Ebene ist der sog. *Graph* von f.



Der Graph einer Funktion f wird mit $G(f)$ bezeichnet. Er verläuft in der Koordinatenebene und besteht aus allen Punkten (r,s) mit $s = f(r)$, d. h. aus allen Lösungen der zugehörigen Funktionsgleichung $y = f(x)$. Also ist $G(f)$ nichts anderes als die (graphische Darstellung der) Lösungsmenge der Funktionsgleichung $y = f(x)$:

$$\text{Graph der Funktion } f\colon \quad G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid y = f(x)\} = \mathbb{L}\big(y = f(x)\big)\,.$$

Der Graph einer Funktion hat eine sehr suggestive, anschauliche Aussagekraft, ist aber wie jede graphische Darstellung von begrenzter Genauigkeit. Ist dagegen eine Funktion durch einen Funktionsterm definiert, so kann man jeden gewünschten Funktionswert mit beliebiger Genauigkeit berechnen. Man kann also Wertetabellen (beliebiger Länge) erstellen und die dabei gefundenen Ergebnisse ins Koordinatenkreuz eintragen. Da man aber nur endlich viele Punkte zur Verfügung hat, bleiben immer Lücken, man erhält nie eine geschlossene Kurve. Man kann zwar vermuten, wie etwa der Verlauf dazwischen ist, man hat aber keine Sicherheit. Eines der fundamentalen Themen wird es sein, *vom Funktionsterm auf die Gestalt des Graphen zu schließen*, und dies mit möglichst geringem Rechenaufwand.

c. Lineare Funktionen. Wir wollen nun die einfachsten Funktionen studieren, nämlich die, bei denen der Funktionsterm $f(x)$ die Funktionsvariable x höchstens in erster Potenz enthält. Sie sind also durch einen Funktionsterm der Gestalt

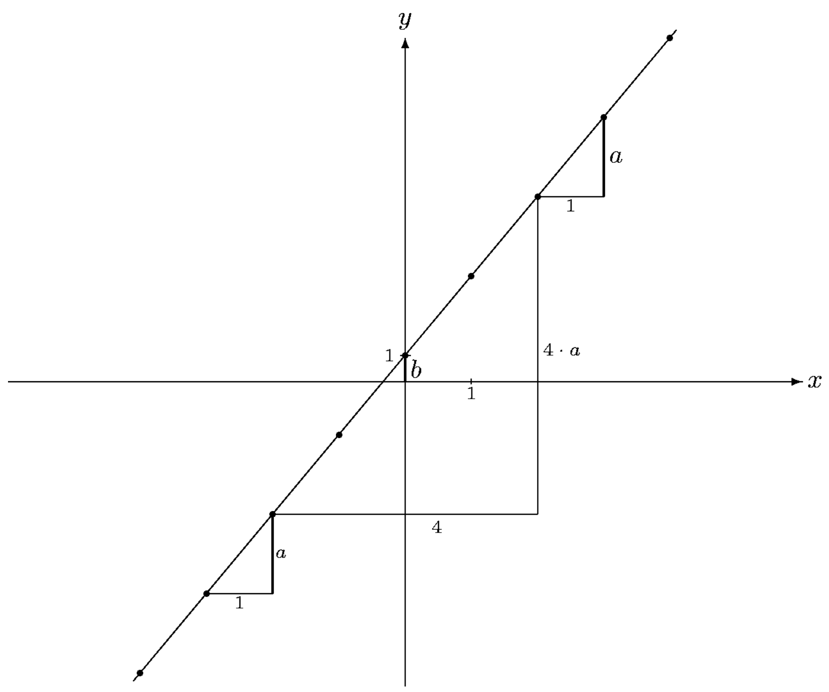
$$f(x) = ax + b$$

definiert. Dabei ist x die Funktionsvariable und a, b stehen für beliebige (rationale) Zahlen. (Streng genommen sind auch a und b Variable; sie nennt man zur Unterscheidung von x auch *Parameter* oder *Gestaltvariable*: durch sie legt man die Gestalt des Terms fest, ohne konkrete Werte angeben zu müssen.)

Um den Graphen einer solchen Funktion f zu bestimmen, erstellen wir zunächst eine Wertetabelle. Betrachten wir einmal das Beispiel $f(x) = 3x + 1$, also mit den obigen Bezeichnungen $a = 3$ und $b = 1$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	13

Zeichnet man diese Punkte in ein Koordinatenkreuz, so erhält man etwa das untenstehende Bild: *Der Funktionsgraph ist eine Gerade.* Aus diesem Grunde nennt man die hier betrachteten Funktionen auch *lineare Funktionen*:



d. Anstieg und y-Achsenabschnitt. Wir wollen nun feststellen, wie man aus dem Funktionsterm $f(x) = ax + b$ unmittelbar den Verlauf der Gerade ablesen kann. Die geometrische Bedeutung von b ist leicht zu erkennen: Es ist $f(0) = a \cdot 0 + b = b$, d. h. das absolute Glied b im Funktionsterm gibt den Wert der Funktion an der Stelle 0 an und bestimmt damit den Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der y-Achse. Wir nennen diesen Wert b den *y-Achsenabschnitt* der Geraden. (Er ist in der Skizze verstärkt eingezeichnet.)

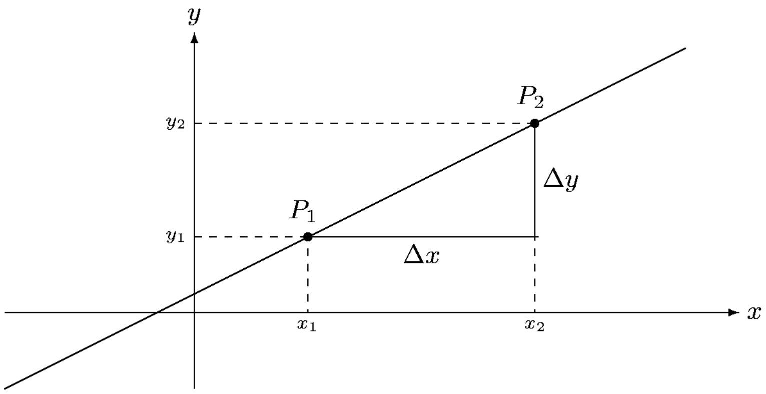
Die Bedeutung von a erkennt man bereits an der Wertetabelle: Wenn der x-Wert um 1 zunimmt, wächst der zugehörige Funktionswert um a ($= 3$ im obigen Beispiel). Geometrisch spiegelt sich dies in den eingezeichneten (kleinen) *Steigungsdreiecken* wieder: Hat die Dreiecksseite in x-Richtung die Länge 1, so hat die Dreiecksseite in y-Richtung gerade die Länge a ($= 3$ im obigen Beispiel). Man nennt diese Zahl a die *Steigung* oder auch den *Anstieg* der Geraden.

Aber auch aus größeren Steigungsdreiecken kann man den Anstieg ablesen. Hat etwa die Seite in x-Richtung die Länge 4 (wie in der Skizze), so wächst die Dreiecksseite in y-Richtung ebenfalls auf das vierfache, also auf den Wert $4 \cdot a$ ($= 12$ im obigen Beispiel). Die Steigung a ist also das Verhältnis der Länge in y-Richtung zur Länge in x-Richtung.

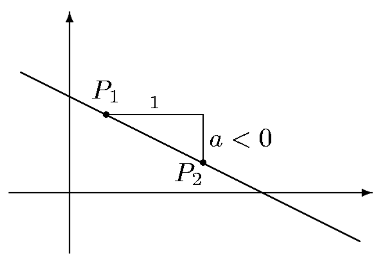
Wir wollen diese letzte Bemerkung zur Basis einer präzisen Definition des Anstiegs einer Geraden machen. Wir betrachten auf einer gegebenen Geraden zwei *beliebige Punkte* $P_1 = (x_1; y_1)$ und $P_2 = (x_2; y_2)$. Diese bestimmen dann ein Steigungsdreieck (wie eingezeichnet) mit den Kathetenlängen $\Delta x = x_2 - x_1$ bzw. $\Delta y = y_2 - y_1$. (Der griechische Buchstabe Δ (Delta) wird in der Mathematik oft zur Bezeichnung von **D**ifferenzen benutzt.) Nach unserer obigen Beobachtung ist der Anstieg a dann gegeben durch

$$\text{Geradenanstieg } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Dabei sind x_1, y_1 bzw. x_2, y_2 die Koordinaten zweier Punkte auf der Geraden.



Einige Anmerkungen zur Definition des Geradenanstiegs:



1. In unseren Skizzen waren die Größen Δy und Δx Längen von Dreiecksseiten und als solche positiv. Gemäß der obigen Formel kann aber $\Delta y = y_2 - y_1$ durchaus *negativ* sein, nämlich wenn y_2 kleiner als y_1 ist. Dementsprechend kann der Anstieg a negativ sein. Dies bedeutet dann, dass die Gerade *fällt* und nicht steigt. *Eine Gerade mit negativer Steigung fällt.*
2. Der Anstiegswert kann auch 0 sein. Dies ist der Fall, wenn $y_2 = y_1$ ist. Es bedeutet, dass die Gerade weder steigt noch fällt: *Eine Gerade mit der Steigung 0 ist eine Parallele zur x-Achse.* In diesem Falle ist es schwierig, ein Steigungs*dreieck* zu zeichnen; es ist zu einer Strecke entartet. Der Anstieg ist aber gemäß der obigen Definitionsformel wohlbestimmt.
3. Die wichtigste Anmerkung ist aber die folgende wesentliche Einschränkung: Unsere obige Definition des Anstiegs ist *nur sinnvoll*, wenn in der Definitionsformel *keine 0 im Nenner* auftritt. Nun tritt im Nenner ($\Delta x = x_2 - x_1$) der Wert 0 genau dann auf, wenn $x_2 = x_1$ ist, wenn also die

beiden Punkte auf der Geraden dieselbe x-Koordinate haben. Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass die Gerade parallel zur y-Achse (oder die y-Achse selbst) ist.

Für Parallelen zur y-Achse ist der Anstieg nicht definiert!

Diese wichtige Tatsache ist auch geometrisch gut erklärbar: Um den Anstieg geometrisch zu bestimmen, muss man ein Steigungsdreieck einzeichnen. Dazu muss man von einem Punkt der Geraden parallel zur x-Achse eine Strecke (etwa der Länge 1) abtragen und dann von diesem Punkt aus parallel zur y-Achse soweit nach oben oder unten 'gehen', bis man die gegebene Gerade wieder trifft. Wenn diese Gerade aber selbst parallel zur y-Achse verläuft, wird man sie niemals treffen: Es gibt kein Steigungsdreieck. Aus demselben Grund ist für Parallelen zur y-Achse auch der y-Achsenabschnitt nicht definiert, denn es gibt keinen eindeutigen Schnittpunkt mit der y-Achse.

Nach dieser Definition des Geradenanstiegs können wir die Überlegungen aus Abschnitt a. wie folgt zusammenfassen:

> *Unter einer linearen Funktion versteht man eine Funktion f, die durch einen Funktionsterm der Form $f(x) = ax + b$ (a, b feste Zahlen) definiert werden kann. Ihr Funktionsgraph ist eine Gerade mit dem Anstieg a und dem y-Achsenabschnitt b.*

Für Funktionsgraphen linearer Funktionen sind Anstieg und y-Achsenabschnitt also immer definiert. Dies erklärt sich dadurch, dass — aufgrund der Definition des Funktionsbegriffs — Geraden nur dann Funktionsgraphen sind, wenn sie *nicht parallel zur y-Achse* verlaufen: *Parallelen zur y-Achse sind keine Funktionsgraphen!* (Wie oben ist auch hier die y-Achse selbst mit eingeschlossen.)

e. Systeme linearer Gleichungen. Darunter versteht man mehrere durch das logische *'und'* (in Zeichen $\wedge$) miteinander verknüpfte lineare Gleichungen, etwa

$$3x - y = 7 \wedge 2x + 2y = -4\,.$$

Solche Systeme schreibt man oft auch in der Form

$$\begin{bmatrix} 3x - 4y & = & 7 \\ 2x + 2y & = & -3 \end{bmatrix},$$

wobei die und-Verknüpfung durch die Klammern ausgedrückt wird.

Eine Lösung eines solchen Gleichungs*systems* ist also aus ein Zahlenpaar, das *beide* Gleichungen erfüllt, also sowohl zur Lösungsmenge der ersten als auch der zweiten Gleichung gehört.

Nun ist die Lösungsmenge jeder einzelnen Gleichung eine Gerade, die gesuchte Lösungsmenge des Systems besteht also aus allen gemeinsamen Punkten (Schnittpunkten) der beiden Geraden. Allgemein gilt:

Die Lösungsmenge eines Gleichungs*systems* ist der mengentheoretische Durchschnitt der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen.

Will man in unserem Beispiel diese Schnittpunkte bestimmen, so ermittelt man zunächst die beiden Geraden, die durch die einzelnen Gleichungen gegeben sind:

$$\begin{aligned} 3x - y = 7 &\iff y = 3x - 7 : \quad \text{Gerade mit } y\text{-Achsenabschnitt } -7 \text{ und Anstieg } 3, \\ 2x + 2y = -4 &\iff y = -x - 2 : \quad \text{Gerade mit } y\text{-Achsenabschnitt } -2 \text{ und Anstieg } -1. \end{aligned}$$

Diese beiden Geraden haben genau einen Schnittpunkt (sie sind nämlich nicht parallel). Dessen Koordinaten (x, y) erfüllen beide Gleichungen, also muss für ihn gelten

$$y = 3x - 7 \;\wedge\; y = -x - 2 \implies 3x - 7 = -x - 2 \iff 4x = 5 \iff x = \frac{5}{4}\,.$$

Damit ist die x-Koordinate der gesuchten Lösungspunkte *notwendig* $\frac{5}{4}$. Die y-Koordinate ergibt sich durch Einsetzen des gefundenen x-Wertes in eine der beiden nach y aufgelösten Gleichungen: $y = -\frac{5}{4} - 2 = -\frac{13}{4}$. Das Gleichungssystem hat also die eindeutige Lösung $(\frac{5}{4}\,,\,-\frac{13}{4})$:

$$\mathbb{L} = \{(\frac{5}{4}\,,\,-\frac{13}{4})\}\,.$$

Das hier skizzierte Verfahren nennt man *Gleichsetzungsverfahren.* Dieses ist geometrisch motiviert und immer durchführbar, wenn *beide* Gleichungen nach y auflösbar sind. Das ist jedoch nicht immer möglich (wann nicht?).

Dagegen ist das sog. *Einsetzungsverfahren* auf alle linearen Gleichungssysteme anwendbar. Es besteht in folgender kleinen Modifikation: Man löse nur *eine* der Gleichungen nach *irgendeiner* der Variablen auf (nicht unbedingt nach y) und setze den gefundenen Term für diese Variable in die andere Gleichung ein. Man fahre dann wie im Gleichsetzungsverfahren fort.

Beispiel: $3x + 4y + 5 = 0 \ \wedge \ x + 5y + 9 = 0$.
Löst man die zweite Gleichung nach x auf, so erhält man $x = -5y - 9$, und Einsetzen in die erste führt dann zu

$$3(-5y-9) + 4y + 5 = 0 \iff -15y - 27 + 4y + 5 = 0 \iff 11y = -22 \iff y = -2\,.$$

Setzt man nun $y = -2$ in den für x gefundenen Term: $x = -5y - 9$ ein, so erhält man $x = -5(-2) - 9 = 1$. Die einzige Lösung ist $(1, -2)$.

Gegenüber einer Auflösung *beider* Gleichungen nach y hat dieses Verfahren doch einige rechentechnische Vorteile. (Lösen Sie zur Verdeutlichung einmal das Gleichungssystem nach dem oben skizzierten Gleichsetzungsverfahren.) Darüberhinaus lässt sich das Einsetzungsverfahren unmittelbar auf lineare Gleichungssyteme mit mehr als zwei Gleichungen und Variable anwenden.

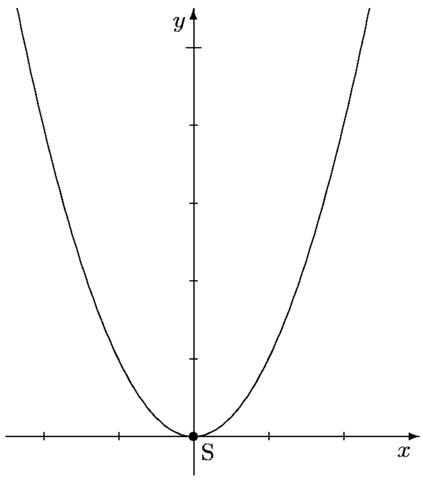
Neben den beiden hier genannten elementaren Lösungsverfahren gibt es noch das Gauß'sche Eliminationsverfahren, mit dem man Gleichungssysteme mit vielen Gleichungen und vielen Variablen systematisch und effektiv lösen kann. Dies werden wir bei späterer Gelegenheit behandeln.

6. Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen

Nach den linearen Funktionen (das sind gerade die mit einem Funktionsterm, in dem x höchstens in erster Potenz vorkommt) wollen wir nun Funktionen f studieren, in deren Term x^2 auftritt:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{Q}\,,\ a \neq 0\,.$$

Wir nennen eine solche Funktion *quadratisch.*



a. Normalparabeln. Die einfachste quadratische Funktion ist die mit dem Term

$$f(x) = x^2\,.$$

Ihren Graphen nennen wir eine *Normalparabel.* Auf der Basis einer kleinen Wertetabelle haben wir im Unterricht die nebenstehende Skizze angefertigt. Zunächst haben wir festgestellt, dass diese Normalparabel symmetrisch zur y-Achse ist. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\,.$$

Außerdem hat die Normalparabel einen ausgezeichneten Punkt, den Scheitelpunkt S: Hier treffen sich Parabel und Symmetrieachse.