

Ferienübung

1) Stellen Sie die folgenden Zahlen als Potenzen mit möglichst großem Exponenten dar.

a) $a = 6^5 \cdot 21^3 \cdot 7^2 \cdot 14^3$,

b) $b = 180 \cdot 300 \cdot 240$.

2) Berechnen Sie (durch Ausmultiplizieren oder vollständiges Faktorisieren):

a) $[(u^2 - v^2)^2 - (u^2 + v^2)^2]^5$,

b) $\frac{4a^5b + 24a^3b^2 + 36ab^3}{2a^3 + 6ab}$

3) Berechnen Sie die folgenden Bruchterme:

a) $\frac{(u+v)^3}{(v^2 - u^2)^2}$

b) $\frac{\frac{(u+v)^2}{u^2-v^2}}{\frac{u^2-v^2}{u-v}}$

c) $\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 - b^2}$

d) $\frac{\frac{(a-b)^2}{(a^2+b^2)^2}}{\frac{(a^2-b^2)^2}{a^4+2a^2b^2+b^4}}$

e) $\frac{9ab - 3b^2}{4ab - 3a} \cdot \frac{4a^2 + 10ab}{18a - 6b}$

f) $\frac{\frac{9ab-3b^2}{4ab-3a} \cdot \frac{4a^2+10ab}{18a-6b}}{\frac{4ab+10b^2}{8ab-6a}}$

4) a) Richtig oder falsch?

i) $a^k + b^k = (a+b)^k$,

ii) $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$

iii) $(a^k)^l = a^{k+l}$.

b) Geben Sie die Definition für b^{-k} ($k \in \mathbb{N}$) an. Für welche b gilt diese Definition? Berechnen Sie:

c) $2^{41} - 2 \cdot 4^{20}$

d) $\frac{5^{101} + 5^{100}}{5^{101} - 5^{100}}$

e) $\frac{2^{-101} + 4^{-50}}{2^{-101} - 4^{-50}}$

5) Stellen Sie die folgenden Terme

1. als Bruch ohne negative Exponenten und

2. als Produkt von Potenzen der Variablen (ohne Bruchstrich) dar.

a) $\frac{a^{-2}b^2c^{-2}}{a^2b^{-2}c^{-3}}$

b) $\frac{a^2(bc)^{-2}}{(ab)^{-2}c^3}$

c) $\frac{\frac{(uv)^3w^{-2}}{u^{-2}(vw)^{-1}}}{\frac{(uvw)^{-2}w^3}{u^{-1}v^3w^2}}$

6) Lösen Sie die folgenden (Un)Gleichungen. Geben Sie die Lösungsmengen an!

a) $(2x - 3)(2x - 5) = 4x^2 - 14x + 11$,

b) $3 - 3x > 3(7 - 2x)$,

c) $8x^2 + 2(x - 4) \leq (4x - 1)(2x + 1)$.

7) Bei welchen drei aufeinanderfolgenden *geraden* Zahlen ist die Summe um 60 kleiner als das Sechsfache der mittleren Zahl?

8) Vertauscht man bei einer dreistelligen Zahl a Einer- und Hunderterziffer, so ist die neue Zahl durch 45 teilbar und um 198 kleiner als a . Bestimmen Sie a .

9) Ein Benzinkanister wurde an der Tankstelle zu 90% gefüllt, es wurden 5 Liter an einen Motorradfahrer abgegeben und zwei Drittel des Restes in den Autotank gefüllt. Danach ist der Kanister noch zu 10% gefüllt. Wie groß ist das Fassungsvermögen des Kanisters?

Ferienübung – Ergebnisse

- 1) a) $a = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 3^3 \cdot 7^3 \cdot 7^2 \cdot 2^3 \cdot 7^3 = 2^8 \cdot 3^8 \cdot 7^8 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^8 = 42^8$,
 b) $b = 10 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 10 = 10^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^4 = 60^4$.
- 2) a) $-4^5 u^{10} v^{10} = -1024 u^{10} v^{10}$,
 b) $2b(a^2 + 3b)$.
- 3) a) $\frac{u+v}{(u-v)^2}$, b) $\frac{1}{u-v}$, c) $\frac{a+b}{a-b}$,
 d) $\frac{1}{(a+b)^2}$, e) $\frac{b(2a+5b)}{(4b-3)}$, f) a
- 4) a) i) falsch, ii) richtig, iii) falsch.
 b) $b^{-k} = \frac{1}{b^k}$ für $b \neq 0$.
 c) 0, d) $\frac{3}{2}$, e) -3.
- 5) a) $a^{-4} b^4 c = \frac{b^4 c}{a^4}$, b) $a^4 c^{-5} = \frac{a^4}{c^5}$, c) $u^6 v^9$.
- 6) a) $\mathbb{L} = \{2\}$, b) $\mathbb{L} =]6, \infty[$, c) $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.
- 7) Sei x die mittlere der drei Zahlen. Bedingung: $(x-2) + x + (x+2) = 6x - 60$. Die gesuchten Zahlen sind 18, 20, 22.
- 8) Sei $a = 100x + 10y + z$ mit den Dezimalziffern x, y, z von a . Vertauscht man x und z , so erhält man $b = 100z + 10y + x$. Da b durch 45, also auch durch 5 teilbar ist, muss $x = 0$ oder $x = 5$ sein. Da a dreistellig ist, ist x nicht 0, also $x = 5$.
 Laut Aufgabentext gilt
- $$b = a - 198 \iff 198 = a - b = 99x - 99z = 99(5 - z) \iff 2 = 5 - z \iff z = 3.$$
- Da b durch 45, also auch durch 9 teilbar ist, ist 9 ein Teiler der Quersumme $z + y + x = 3 + y + 5 = 8 + y$. Also muss $y = 1$ sein. Die gesuchte Zahl ist 513.
- 9) Sei x das Fassungsvermögen des Kanisters. Bedingung:

$$(0,9x - 5) \cdot \frac{1}{3} = 0,1x.$$

Lösung: $\frac{25}{3}$ Liter.