

Aufgaben:

Die folgenden Gleichungssysteme sollen gelöst werden.

Es wird empfohlen, zur Lösung der Aufgaben nicht nur eines der behandelten Lösungsverfahren anzuwenden, sondern alle, um dadurch Erfahrungen für die Herangehensweise an bestimmte Aufgabentypen zu sammeln.

4.28

a)	$\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$	b)	$\begin{cases} 2x + 3y = -14 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$	c)	$\begin{cases} 9x - 8y = 14 \\ 5x - 4y = 10 \end{cases}$
d)	$\begin{cases} 5x + 8y = 28 \\ \frac{3x}{4y} = \frac{2}{3} \end{cases}$	e)	$\begin{cases} 6x - 5y = 1 \\ 9x - 7y = 8 \end{cases}$	f)	$\begin{cases} 3x + y = -5 \\ 2y + x = 5 \end{cases}$
g)	$\begin{cases} 2,4x - 4,5y = 1,5 \\ 10,5y - 3,6x = 1,5 \end{cases}$	h)	$\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 0,4x + 0,06y = 3 \end{cases}$	i)	$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 2\frac{5}{6} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 3 \end{cases}$

4.29

a)	$\begin{cases} ax + y = 2a + b \\ ax - y = -b \end{cases}$	b)	$\begin{cases} 0,6x + 3,5y = 22,3 \\ 1,4y - 0,9x = 1,15 \end{cases}$		
c)	$\begin{cases} 28x - 57y = 55 \\ 49x + 4y = 200 \end{cases}$	d)	$\begin{cases} 15x + 23y + 10 = 0 \\ 9x + 12y + 6 = 0 \end{cases}$		
e)	$\begin{cases} 15x - 10y = 25 \\ 10x + 15y = 60 \end{cases}$	f)	$\begin{cases} 21x - 9y + 3 = 0 \\ 4x - 5y + 17 = 0 \end{cases}$		
g)	$\begin{cases} x = 3y - 2 \\ x = 5y - 12 \end{cases}$	h)	$\begin{cases} 0,80x - 0,25y = 0,60 \\ 0,64x + 1,25y = 6,28 \end{cases}$	i)	$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{8} = 9 \\ \frac{x}{9} - \frac{y}{10} = -\frac{2}{5} \end{cases}$

4.30

a)	$\begin{cases} 10x - 9y = 12 \\ 25x - 12y = 51 \end{cases}$	b)	$\begin{cases} 4x - y = 1 \\ 12x = 3(y + 1) \end{cases}$	c)	$\begin{cases} x + 3y = 20 \\ x - 5y = 12 \end{cases}$
d)	$\begin{cases} 1,2x + 3,5y = 0,827 \\ 2,8x + 1,5y = 1,063 \end{cases}$	e)	$\begin{cases} x + 2y = 6(x - 3y) \\ 7(x - 3y) = \frac{x}{4} + 6 \end{cases}$	f)	$\begin{cases} 8x + 5y = 63 \\ 7x + 5y = 27 \end{cases}$
g)	$\begin{cases} 10(3x + 5) = 2(16 - 3y) \\ 6(1 - 7x) = 5(4y - 10) \end{cases}$	h)	$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 7 \\ 2x + 3y = 43 \end{cases}$	i)	$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 4 \\ 3(x + y) = 10 \end{cases}$

4.31

a)	$\begin{cases} \frac{5}{2x} - \frac{2}{3y} = \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2x} + \frac{5}{3y} = 2 \end{cases}$	b)	$\begin{cases} \frac{5x}{6} + \frac{7y}{4} = 12 \\ \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}y = 9 \end{cases}$	c)	$\begin{cases} \frac{7}{x} - \frac{3}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 3 \end{cases}$
d)	$\begin{cases} \frac{x-1}{x+15} = \frac{y-6}{y+2} \\ \frac{x-3}{x} = \frac{y-4}{y-1} \end{cases}$	e)	$\begin{cases} 15x - (7y + x) = 7 \\ 13x - 2(7y - x) = 1 \end{cases}$	f)	$\begin{cases} bx + ay = a + b \\ b^2x - a^2y = 0 \end{cases}$

- c) Addiert man zur ersten von zwei Zahlen 3, so verhält sich diese Summe zur zweiten Zahl wie 5 : 7. Addiert man zur zweiten Zahl 9, so verhält sich diese Summe zur ersten Zahl wie 2 : 1. Um welche beiden Zahlen handelt es sich?
- d) Ein Bruch hat den Wert $\frac{8}{9}$, wenn man den Zähler und den Nenner jeweils um 1 vergrößert. Er nimmt den Wert $\frac{7}{8}$ an, wenn Zähler und Nenner jeweils um 1 vermindert werden.
Von welchem Bruch wurde ausgegangen?

- 4.37 a) In einem Rechteck ist die eine Seite 3 cm größer als die andere. Der Umfang des Rechtecks beträgt 38 cm. Wie lang sind die beiden Rechtecksseiten?
- b) An einem zweiarmigen Hebel hängen zwei Körper, die zusammen 50 kg wiegen. Die Hebelarme verhalten sich wie 2 : 3. Wie schwer ist jeder einzelne Körper?
- c) Verlängert man die eine Seite eines Rechtecks um 3 cm und verkürzt die andere um 1 cm, so entsteht ein Quadrat. Der Umfang des Quadrats ist 4 cm größer als der des Rechtecks. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

- 4.38 a) Ein Vater sagt zu seinem Sohn: „In vier Jahren werde ich dreimal so alt sein wie du, und vor vier Jahren war ich fünfmal so alt wie du.“ Wie alt sind Vater und Sohn?
- b) Ein Wasserbehälter fasst $1\,000\text{ m}^3$ Wasser. Er wird durch zwei Rohre gefüllt. Laufen beide Rohre gleichzeitig, so ist der Behälter nach 20 min voll. Läuft das eine Rohr nur 10 min, so muss das andere insgesamt 35 min laufen, damit der Behälter vollständig gefüllt wird. Wie viel m^3 je Minute liefert jedes der beiden Rohre?
- c) Erhöht man die Anzahl der Elemente einer Batterie von 4 auf 7, so steigt in einem Stromkreis die Stromstärke von 3 A auf 4 A an, während der Gesamtwiderstand um $0,5\ \Omega$ zunimmt. Berechne die Spannung eines Elements sowie den Widerstand des ursprünglichen Kreises.
- d) In einem Stromkreis steigt bei Verminderung des Widerstandes um $4\ \Omega$ der Strom auf 9 A an. Beim Zuschalten von $3\ \Omega$ sinkt der Strom auf 2 A ab. Berechne die Spannung und den Widerstand des Stromkreises.

- 4.39 a) Man zerlege 217 so in eine Summe zweier Zahlen, dass der sechste Teil der einen Zahl um 19 kleiner ist als der dritte Teil der anderen.
Wie heißen die beiden Zahlen?
- b) Eine Seite eines Dreiecks wird durch die Höhe in Abschnitte von 9 cm bzw. 30 cm Länge geteilt. Die Differenz der beiden anderen Seiten beträgt 9 cm.
Wie lang sind diese Seiten?
- c) Wie lang sind die Seiten eines Dreiecks, wenn die Summen je zweier Seiten 40 cm, 63 cm und 71 cm ergeben?

- 4.40 a) Addiert man von drei Zahlen die Summe je zweier zur doppelten dritten Zahl, so erhält man die Summen 245; 170 und 161. Wie heißen die drei Zahlen?
- b) Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks beträgt 40 cm. Die Projektionen dieser Seiten auf die dritte Seite sind 12 cm und 8 cm lang.
Wie groß sind die Dreiecksseiten?

- c) Zwei LKW unterschiedlicher Größe sollten eine bestimmte Menge eines Transportgutes in 10 Tagen in einen Verarbeitungsbetrieb transportieren. Da nach 6 Tagen der eine LKW wegen eines Getriebeschadens ausfiel, musste der andere noch 4 Tage länger fahren als ursprünglich geplant war, bis die gesamte Menge abtransportiert war. In wie viel Tagen hätte jeder der beiden LKW das Transportgut allein zur Fabrik gefahren?
- d) Mischt man $x\text{ cm}^3$ einer Flüssigkeit (Dichte $1,2\text{ g/cm}^3$) mit $y\text{ cm}^3$ derselben Flüssigkeit stärkerer Konzentration (Dichte $1,7\text{ g/cm}^3$), so wird die Dichte der Mischung $1,6\text{ g/cm}^3$. Nähme man von der ersten Flüssigkeit 7 cm^3 mehr und von der zweiten 8 cm^3 weniger, so wäre die Dichte dieser Mischung $1,5\text{ g/cm}^3$.
Wie viel Kubikzentimeter jeder Sorte sind in jeder Mischung?

- 4.41 a) Verlängert man eine Seite eines Rechtecks um 2 cm und verkürzt die andere um 3 cm, so erhält man ein Quadrat, dessen Umfang 6 cm größer ist als der des Rechtecks.
Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?
- b) Eine Badewanne von 120 l Inhalt wird durch eine Warm- und eine Kaltwasserleitung gefüllt. Läuft das Wasser 3 min aus der Kalt- und 2 min aus der Warmwasserleitung, so sind 76 l eingeflossen. Hat man die Kaltwasserleitung nur 1 min und die Warmwasserleitung dafür 4 min geöffnet, so sind 72 l in der Badewanne.
Wie viel Wasser liefert jede Leitung in der Minute?
In welcher Zeit wird die Badewanne gefüllt, wenn beide Leitungen gleichzeitig laufen?
- c) Drei Behälter haben ein gemeinsames Fassungsvermögen von 640 l. Der größte Behälter kann mit dem Inhalt des ersten und $\frac{3}{5}$ des zweiten Behälters oder aber mit dem Inhalt des zweiten und 70 % des ersten Behälters gefüllt werden.
Welches Fassungsvermögen haben die einzelnen Behälter?

4.5 Quadratische Gleichungen

4.5.1 Begriffserklärungen

Gleichungen, in denen die Variable bis zur zweiten, jedoch in keiner höheren als der zweiten Potenz auftritt, werden **quadratische Gleichungen** oder auch *algebraische Gleichungen zweiten Grades* genannt.

Die *allgemeine Form einer quadratischen Gleichung* hat die Gestalt

$$\boxed{Ax^2 + Bx + C = 0.} \quad (4.26)$$

Dabei nennt man

Ax^2 das **quadratische Glied**,

Bx das **lineare Glied** und

C das **Absolutglied** der Gleichung.

A , B und C sind dabei beliebige, jedoch feste Zahlenwerte, wobei jedoch $A \neq 0$ vorausgesetzt werden muss (warum wohl?).

- 4.19 a) 24 b) 28 c) 12,6 d) 42 e) $32\frac{d}{b}$
 f) $\frac{3}{5}a^3b$ g) $\frac{1}{4u^2v}$ h) $\frac{1}{2}mn$ i) 7 k) $\frac{5b^2}{6a}$
- 4.20 a) $17\frac{1}{7}$ b) 25 c) 45 d) 3,25 e) 8
 f) 8 g) 3 h) 6 i) 4 k) 10,5
- 4.21 a) 25 % b) 11 % c) 9 % d) 4 % e) 8 %
 f) 2,4 % g) 0,08 % h) 1,12 % i) 6,45 % k) 2,89 %
- 4.22 a) 65,5%; 20,7 %; 13,8% b) 9,8 %; 16,7 % c) 17,42 %
 d) 20,64 % e) 6,12 % f) 27,3 %; 27,7 % g) 18,75 %
- 4.23 a) 359,34 € b) 1 776,32 kg c) 3 933 t d) 2 633,868 ha
 e) 98,736 m f) 86 Stück g) 79,34 € h) 137,28 l
 i) 468 kW k) 1 580 130
- 4.24 a) Note 1: 56 ... 60 Pkt., Note 2: 45 ... 55 Pkt., Note 3: 33 ... 44 Pkt.,
 Note 4: 24 ... 32 Pkt., Note 5: 0 ... 23 Pkt.
 b) 1 956,61 ha; 1 165,64 ha; 790,97 ha; 249,78 ha.
 c) 2760 t
- 4.25 a) 731 Stück b) 826, - € c) 463 m d) 2,5 t e) 767 ha
 f) 80, - € g) 120 MW h) 87 g i) 72 300 Einw. k) 56,2 hl
- 4.26 a) 34 357,50 € b) 1 074,42 € c) 1,79 €
 d) 1 156,03 € e) 3 245,53 € f) 2, - €
 g) 2, - € h) 0,80 € i) 1 310,20 €
 k) 4,20 €
- 4.27 a) 59 626 € b) 35 866 € c) 20 Jahre d) 5,65 %
- 4.28 a) 3; 5 b) -4; -2 c) 6; 5 d) $2; \frac{9}{4}$
 e) 11; 13 f) -3; 4 g) $\frac{5}{2}; 1$ h) 6; 10
 i) 3; 8
- 4.29 a) 1; $a+b$ b) 6,816; 5,204 c) 4; 1 d) $-\frac{2}{3}; 0$
 e) 3; 2 f) 2; 5 g) 13; 5 h) 2; 4
 i) 18; 24
- 4.30 a) 3; 2 b) keine eindeutige Lösung (Abhängigkeit) c) 17; 1
 d) 0,31; 0,13 e) 4; 1 f) 6; 3 g) -2; 7
 h) 8; 9 i) keine Lösung (Widerspruch)

594 Lösungen

- 4.31 a) 3; 2 b) 6; 4 c) 1; 1 d) 9; 10
 e) 1; 1 f) $\frac{a}{b}; \frac{b}{a}$ g) $\frac{2}{5}(a^2 + b^2); \frac{1}{5}(a^2 + 5ab + b^2)$
 h) $\frac{a+b}{a-b}; \frac{a-b}{a+b}$
- 4.32 a) 7; 2 b) $a(a+b); b(a-b)$ c) 12; 5 d) 11; 8
 e) 9; 5 f) $2a+b; 2a-b$ g) $\frac{a+1}{ab-1}; \frac{b+1}{ab-1}$
- 4.33 a) 3; 5; 9 b) 4; 7; 2 c) 8; 4; 1 d) 8; 4; -2
 e) 10; 20; 30 f) 12; 20; 30 g) 30; 12; 70 h) 5; 3; 1
- 4.34 a) 0; 1; 1 b) $\frac{a+b}{a}; \frac{a-b}{2b}; \frac{a^2-b^2}{ab}$ c) 4; 3; -6
 d) $\frac{2}{a+b-c}; \frac{2}{c+a-b}; \frac{2}{b+c-a}$ e) 1; 2; 3 f) 4; 2; 1
 g) $(a+b)^2; (a-b)^2; a^2-b^2$ h) $\frac{1}{7}; \frac{1}{8}; 1$
- 4.35 a) 3; 4; 1; 0 b) 1; 2; 3; 4 c) 6; 5; 4; 3; -3
 d) $2a; 3a-b; a-b; 2b; 3b-a$ e) 5; 4; 3; 2; 1
 f) 5; 7; 3; 2; 10; 4 g) 13; 10; 8; 7; 7 h) 30; 20; 10; 0
 i) 6; 5; 4; 3; 2; 1
- 4.36 a) 361; 157 b) 51; 187 c) 22; 35 d) $\frac{15}{17}$
- 4.37 a) 8 cm; 11 cm b) $m_1 = 20 \text{ kg}; m_2 = 30 \text{ kg}$
 c) keine eindeutige Lösung (2. Gl. von der 1. Gl. abhängig!)
- 4.38 a) 44; 12 b) $30 \text{ m}^3/\text{min}; 20 \text{ m}^3/\text{min}$ c) 1,2 V; 1,6 Ω
 d) 18 V; 6 Ω
- 4.39 a) 108; 111 b) 50 cm; 41 cm c) 16 cm; 24 cm; 47 cm
- 4.40 a) 17; 26; 101 b) 21 cm; 19 cm c) 20 Tage; 30 Tage
 d) 1. Mischung: 7 cm^3 der ersten Sorte und 28 cm^3 der zweiten;
 2. Mischung: 14 cm^3 der ersten Sorte und 20 cm^3 der zweiten.
- 4.41 a) Keine Lösung, da Widerspruch.
 b) kalt: 16 l/min; warm: 14 l/min; beide: 4 min.
 c) 200 l; 150 l; 290 l.
- 4.42 a) $\pm 29,6$ b) $\pm \frac{4}{3}$ c) ± 1 d) ± 0 e) keine Lösung
 f) $\pm \frac{8}{7}$ g) ± 0 h) +17; (-17 ist eine Scheinlösung)
- 4.43 a) ± 1 b) ± 13 c) +5; (-5 ist Scheinlösung)
 d) +5; (-5 ist Scheinlösung) e) 0 f) $\pm a$ g) ± 2