Um nun $c+d$ als reelle Zahl zu definieren, müssen wir eine beliebig eng werdende, ineinandergeschachtelte Folge von Intervallen angeben, in denen $c+d$ liegen muss. Dazu benutzen wir nun wieder die uns vertrauten Rechengesetze, die ja auch für $\mathbb{R}$ gültig bleiben sollen. Aus $1,414 < c$ und $1,732 < d$ folgt dann nämlich sofort $1,414 + 1,732 < c + d$, also $3,146 < c + d$. Benutzen wir alle oben notierten Abschätzungen, so erhalten wir

$$\begin{array}{rlcrl}
1,414+1,732 & = 3,146 & < c+d < & 3,148 = & 1,415+1,733 \\
1,4142+1,7320 & = 3,1462 & < c+d < & 3,1464 = & 1,4143+1,7321 \\
1,41421+1,73205 & = 3,14626 & < c+d < & 3,14628 = & 1,41422+1,73206 \\
1,414213+1,732050 & = 3,146263 & < c+d < & 3,146265 = & 1,414214+1,732051 \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

Man erkennt zumindest im Prinzip, dass man so eine Einschachtelung von $c + d$ erhält. Dabei sind zwar die einzelnen Intervalle doppelt so breit wie zuvor die Intervalle für c, d, aber auch sie werden beliebig eng und stellen so eine neue Dezimalzahl dar.

Ähnlich geht man für die anderen Rechenoperationen vor. Führen Sie ähnliche Überlegungen für das Produkt durch, speziell einmal für die Berechnung von $c^2 = c \cdot c$ mit der in c. konstruierten Zahl c. Machen Sie sich klar, dass die Tabelle auf S. 47 gerade bedeutet: Die Zahl 2 erfüllt alle die Abschätzungen, die man für $c^2 = c \cdot c$ fordert. Damit liegen c^2 und die Zahl 2 in derselben Intervallschachtelung, stimmen also überein. Das bedeutet:

Die in c. durch eine Intervallschachtelung konstruierte reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ hat tatsächlich die geforderte Eigenschaft $c^2 = 2$.

8. Quadratwurzeln

a. Definition. Nachdem man den Bereich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erweitert hat zum Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, können wir nun systematisch Quadratwurzeln einführen. Wir haben am Ende unserer Überlegungen über die reellen Zahlen gesehen, dass es (anders als in $\mathbb{Q}$) in $\mathbb{R}$ eine positive Zahl gibt, deren Quadrat 2 ist. Diese nennen wir die *Quadratwurzel*, oder einfach die *Wurzel* aus 2.

Allgemein wollen wir unter einer (Quadrat)Wurzel aus x eine Zahl y verstehen, die ≥ 0 ist und deren Quadrat gerade x ergibt: $y \geq 0 \;\wedge\; y^2 = x$. Eine solche Zahl gibt es jedoch nicht immer. Wie Sie wissen, sind Quadratzahlen immer ≥ 0. Das heißt aber, dass es keine Zahl geben kann, deren Quadrat negativ ist. Dies bedeutet:

Für negative Zahlen $x < 0$ gibt es *keine* Quadratwurzel aus x.

Für Zahlen $x \geq 0$ dagegen gibt es im Bereich der *reellen* Zahlen immer eine Zahl $y \geq 0$, deren Quadrat x ist. Für $x = 0$ wählt man $y = 0$ und für Zahlen $x > 0$ zeigt man (wie für $x = 2$), dass es eine Zahl $y > 0$ gibt, deren Quadrat $y^2 = x$ ist. Dies ist eine Folge der *Vollständigkeit* des reellen Zahlbereichs $\mathbb{R}$.

Definition: Für $x \geq 0$ (!) definiert man $\sqrt{x}$ (die *(Quadrat-)Wurzel* aus x) als diejenige eindeutig bestimmte reelle Zahl, die ≥ 0 ist und deren Quadrat x ist.

Dies bedeutet: Es ist $\sqrt{x} \geq 0$ und $(\sqrt{x})^2 = x$, und keine andere Zahl hat diese beiden Eigenschaften. In Formeln:

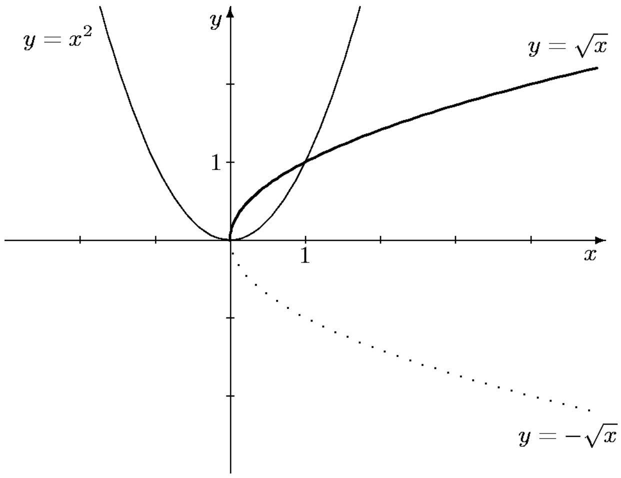
$$\boxed{\text{Für } x \geq 0 \text{ gilt:} \qquad y = \sqrt{x} \iff y \geq 0 \;\wedge\; y^2 = x.}$$

Die Zahl unter dem Wurzelzeichen heißt *Radikand* (radix (lt.) = Wurzel, radicandus = die zu ziehende Wurzel). Dadurch ist die *Wurzelfunktion* $\sqrt{\ }$ definiert. Ihr *Definitionsbereich* ist jedoch nicht ganz $I\!R$, sondern

$$\mathbb{D}(\sqrt{\ }) = \{x \in I\!R \mid x \geq 0\} = [0\,,\infty[\,,$$

also das Intervall aller nicht-negativen reellen Zahlen.

Wegen $y = \sqrt{x} \iff y \geq 0 \wedge y^2 = x$ ist der Graph der Wurzelfunktion ein Teil des Graphen von $y^2 = x$, und zwar der oberhalb der x-Achse liegende Teil ($y \geq 0$!). Nun ist $y^2 = x$ die Umkehrrelation zu $y = x^2$, der Graph also durch Spiegelung an der 45^0-Linie aus der Normalparabel von $y = x^2$ zu gewinnen. Die nachfolgende Skizze zeigt die Normalparabel zu $y = x^2$ (durchgezogene Linie) und deren Spiegelbild an der 45^0-Linie. Der obere dick gezeichnete Teil der gespiegelten Parabel ist der Graph der Wurzelfunktion $\sqrt{\ }$! Der gestrichelte untere Teil ist der Graph von $y = -\sqrt{x}$.



b. Gesetzmäßigkeiten. Für das Rechnen mit Wurzeltermen gelten die folgenden Gesetzmäßigkeiten:

(1) Für $a \geq 0$: $\quad (\sqrt{a})^2 = a\,,$

(2) Für alle $a \in I\!R$: $\quad \sqrt{a^2} = |a|\,,$

(3) Für $a, b \geq 0$: $\quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\,,$

(4) Für $a \geq 0, b > 0$: $\quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,.$

Die angegebenen Voraussetzungen kann man zusammenfassend auch so formulieren:

> Die obigen Formeln gelten, sofern *alle* darin auftretenden Terme *definiert* sind.

Begründungen: Für $a \geq 0$ ist $\sqrt{a}$ definitionsgemäß eine Zahl, deren Quadrat a ist: $(\sqrt{a})^2 = a$. Zu (2) bemerken wir zunächst, dass $\sqrt{a^2}$ *immer* definiert ist, da $a^2 \geq 0$ ist.

> **Warnung:** Es gilt nicht allgemein $\sqrt{a^2} = a$, denn a kann negativ sein, während Quadratwurzeln nie negativ sind!

Wenn $a \geq 0$ ist, dann gilt $\sqrt{a^2} = a$; ist aber $a < 0$, so gilt $\sqrt{a^2} = -a$, denn dann ist $-a > 0$ und $(-a)^2 = a^2$; $-a$ erfüllt also die Forderungen an die Quadratwurzel $\sqrt{a^2}$. Mithin gilt

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0, \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Die rechte Seite ist wörtlich die Definition des Absolutbetrages.
ad (3): Da Wurzeln nie negativ sind, ist auch das Produkt $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$. Außerdem gilt

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b\,.$$

Damit hat die $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ alle Eigenschaften, durch die $\sqrt{a \cdot b}$ definiert ist, also gilt (3).
Begründen Sie zur Übung die analoge Formel (4).

> **Warnung:** Es gibt keine Gesetzmäßigkeiten, die die Wurzel mit der Addition verbinden! Insbesondere sind $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ sowie $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ **grob falsch.**

Neben den Termumformungen sind die folgenden Äquivalenzumformungen für das Quadrieren und Wurzelziehen wichtig:

$$\begin{array}{lll}
(5) & \text{Für } a,b \geq 0: & a = b \iff a^2 = b^2\,, \\
(6) & \text{Für } a,b \geq 0: & a = b \iff \sqrt{a} = \sqrt{b}\,, \\
(7) & \text{Für } a,b \geq 0: & a \leq b \iff a^2 \leq b^2\,, \\
(8) & \text{Für } a,b \geq 0: & a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}\,.
\end{array}$$

(6) und (8) kann man zusammenfassen als:

> Das Wurzelziehen ist für Gleichungen und Ungleichungen eine Äquivalenzumformung, sofern die *Radikanden nicht negativ* sind, d. h. sofern das Wurzelziehen *möglich* ist!

Ebenso besagen (5) und (7):

> Das Quadrieren ist für Gleichungen und Ungleichungen eine Äquivalenzumformung, aber nur, wenn die *zu quadrierenden Terme* ≥ 0 *sind!*

ad (5): Aus $a = b$ folgt selbstverständlich $a^2 = b^2$ (für beliebige a, b). Um die umgekehrte Folgerung $a^2 = b^2 \implies a = b$ zu beweisen, benutzt man die Wurzel: Aus $a^2 = b^2$ folgt natürlich $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$, also nach (2) $|a| = |b|$. Hieraus folgt aber nur dann $a = b$, wenn a, b gleiches Vorzeichen haben, was wegen $a, b \geq 0$ der Fall ist. Genauso beweist man (6).

Für (7) '$\Rightarrow$' schließen wir so: Aus $a \leq b$ folgt durch Multiplikation mit a (≥ 0!) $a^2 \leq ab$ und durch Multiplikation mit b (≥ 0!) $ab \leq b^2$, zusammen also $a^2 \leq ab \leq b^2$. Für die Umkehrung (7), '$\Leftarrow$' setzen wir $a^2 \leq b^2$ voraus. Wäre nun nicht $a \leq b$, so müsste $b < a$ sein, also nach den bereits bewiesenen Teilen $b^2 < a^2$, im Widerspruch zur Voraussetzung. (8) ergibt sich schließlich unmittelbar durch Anwendung von (7) auf $\sqrt{a}, \sqrt{b} \geq 0$:

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \underset{(7)}{\iff} (\sqrt{a})^2 \leq (\sqrt{b})^2 \iff a \leq b\,.$$

Geometrisch bedeutet (8), dass der Graph der Wurzelfunktion ständig ansteigt, man sagt: Die Wurzelfunktion ist *monoton wachsend*. Ebenso besagt (7), dass der Graph der Quadratfunktion *monoton wächst,* aber *nur im Bereich* $[0, \infty[$. (Vergleichen Sie mit den Skizzen der Funktionsgraphen!)

c. Quadratische Gleichungen. Grundlage der Lösung von quadratischen Gleichungen war die Tatsache $x^2 = c^2 \iff x = c \lor x = -c$. Nun sind im Bereich $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen sämtliche nicht-negativen Zahlen Quadratzahlen, so dass für $d \geq 0$ gilt:

$$x^2 = d \iff x^2 = (\sqrt{d})^2 \iff x = \pm\sqrt{d}\,.$$