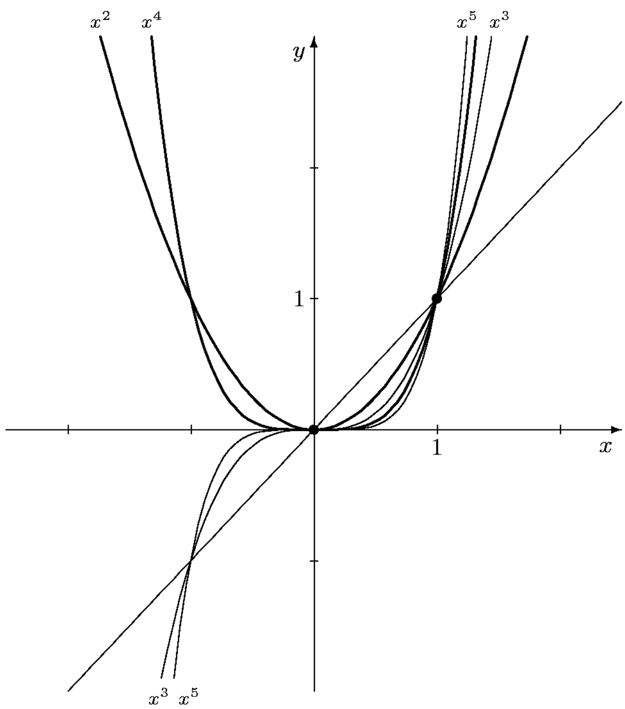
Dies ist nun wieder eine quadratische Gleichung, die man wie üblich löst. Am Ende muss man jedoch überprüfen, ob die gefundenen Werte tatsächlich Lösungen der Ausgangsgleichung sind. In diesem Falle hat die quadratische Gleichung die beiden Lösungen $28 \pm 4\sqrt{41}$. Nur $28 - 4\sqrt{41}$ ist tatsächlich Lösung der ursprünglichen Wurzelgleichung; dies zu überprüfen dürfte für Sie aber nur mit Hilfe von Näherungswerten und dem Taschenrechner möglich sein.

Stattdessen ist es hier lohnender, bei beiden Quadrierungsoperationen genauer zu untersuchen, ob nicht evtl. doch Äquivalenzumformungen vorliegen. So ist die erste Quadrierung tatsächlich eine Äquivalenz, da beide Seiten der quadrierten Gleichung nicht-negativ sind (die linke Seite ist eine Summe von Wurzeln, die rechte Seite $= 4$). Bei der zweiten Quadrierung hängt es davon ab, ob $-8x+22 \geq 0$ ist. Dies kann man für die gefundenen Werte $28\pm4\sqrt{41}$ überprüfen. Der Rechenaufwand ist geringer als beim Einsetzen in die Ausgangsgleichung, da hier nur eine *Abschätzung* statt einer *Gleichheit* zu überprüfen ist: $x = 28 - 4\sqrt{41} \leq 28 - 4 \cdot 6{,}5 \leq 2$, also $-8x + 22 \geq -16 + 22 = 6 \geq 0$. Für $28 + 4\sqrt{41} \geq 52$ ist $-8x + 22$ eben nicht ≥ 0. Daraus ergibt sich dann, dass dies auch keine Lösung der Ausgangsgleichung sein kann.

9. Potenzfunktionen und höhere Wurzeln a. Potenzfunktionen. Unter den *Potenzfunktionen* verstehen wir die Funktionen, die einer Zahl x eine bestimmte *Potenz* x^n zuordnen, wobei hier zunächst n eine natürliche Zahl sei. Ein Funktionsterm dafür ist also $f(x) = x^n$. Bei den Potenzfunktionen ist somit die *Basis variabel,* der *Exponent* n hingegen eine feste Zahl. Die nachfolgende Skizze zeigt die Graphen der ersten fünf Potenzfunktionen. Die Potenzfunktionen mit *geradem* Exponenten haben ähnliche Graphen wie die Normalparabel von $f(x) = x^2$. Ihre Graphen sind mit dickerer Strichstärke gezeichnet, während die Potenzfunktionen mit ungeradem Exponenten in der Skizze mit dünnerer Strichstärke dargestellt sind.



Wir wollen nun die fundamentalen Eigenschaften der Potenzfunktionen zusammenstellen. Man prägt sich diese Eigenschaften am besten an Hand der obigen Skizze ein.

<table>
<tr><th colspan="2">Die Graphen der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ...</th></tr>
<tr><td>...mit geradem Exponenten n ...</td><td>...mit ungeradem Exponenten n ...</td></tr>
<tr><td colspan="2">1) ...verlaufen durch die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2) ...sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und im Bereich $x \geq 0$ monoton wachsend.</td></tr>
<tr><td>3) ...sind achsensymmetrisch.</td><td>...sind punktsymmetrisch.</td></tr>
<tr><td>4) ...nehmen keine negativen y-Werte an,
...nehmen jeden positiven y-Wert zweimal an.</td><td>...nehmen jeden y-Wert genau einmal an.</td></tr>
</table>

Neben diesen Eigenschaften, die die einzelnen Potenzfunktionen betreffen, sieht man an obiger Skizze deutlich noch eine weitere wichtige Beziehung der verschiedenen Potenzfunktionen *zueinander*. Während die Potenzen x^n bei fester Basis $x > 1$ mit zunehmendem Exponenten n auch zunehmen, ist dies bei Basen $0 < x < 1$ genau umgekehrt: Bei größerem Exponenten n werden die Potenzen x^n kleiner. In Formeln:

5) Im Bereich $x > 1$ gilt:	$n < m \implies x^n < x^m$.
im Bereich $0 < x < 1$ gilt:	$n < m \implies x^n > x^m$.

Begründungen:
1) $0^n = 0$ und $1^n = 1$ für $n \in \mathbb{N}$.
2) bedeutet in Formeln: $0 \leq x_1 < x_2 \implies x_1^n < x_2^n$. Man beweist dies genauso, wie wir die entsprechende Aussage für $n = 2$ bereits bewiesen haben: $0 \leq a < b \implies a^2 \leq ab < b^2 \implies a^3 \leq a^2 b < b^3 \implies \ldots$.
3) Allgemein gilt für eine beliebige Funktion f:

$$\text{(Der Graph von) } f \text{ ist } \textit{achsensymmetrisch} \iff f(-x) = f(x)\,.$$
$$\text{(Der Graph von) } f \text{ ist } \textit{punktsymmetrisch} \iff f(-x) = -f(x)\,.$$

Für die Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit *geradem* n gilt offensichtlich $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$, während bei *ungeradem* n $f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$ gilt. Damit ist 3) gezeigt.
4) Gemäß 2) haben die Potenzfunktionen im Bereich $x > 0$ an verschiedenen Stellen auch verschiedene Werte. In diesem Bereich kann also kein y-Wert zweimal angenommen werden. Dass jeder positive y-Wert auch tatsächlich angenommen wird, liegt wiederum an der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Zusammenfassend kann man sagen, dass die Potenzfunktionen im Bereich $x > 0$ jeden positiven y-Wert genau einmal annehmen. Zusammen mit den Symmetrieaussagen 3) erhält man dann 4).
5) Ist $n < m$, so ist $x^m = x^n \cdot x^{m-n}$. Man erhält also x^m aus x^n durch Multiplikation mit der Potenz x^{m-n} von x. Ist $x > 1$, so ist diese Potenz $x^{m-n} > 1$, also $x^m > x^n$; ist hingegen $0 < x < 1$, so ist $x^{m-n} < 1$ und daher $x^m < x^n$.

b. Wurzelfunktionen. Die höheren *Wurzelfunktionen* sind die Umkehrungen der Potenzfunktionen. Die *n-te Wurzel* $\sqrt[n]{x}$ soll definiert werden als eine Zahl, deren n-te Potenz x ist: $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

1. Gerader Exponent:

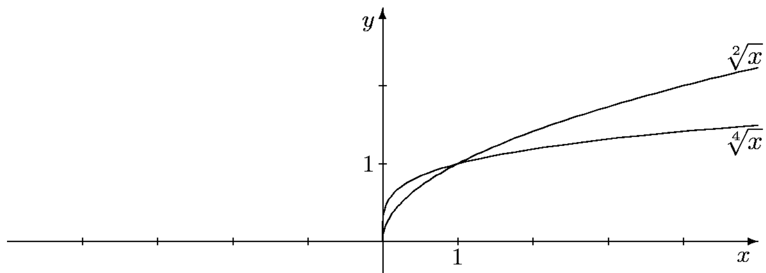
Für *gerades* n geht man genauso vor wie bei den Quadratwurzeln. (Diese bilden ja den Spezialfall $n = 2$.) Gemäß Eigenschaft 4) wissen wir, dass nur die Zahlen $x \geq 0$ n-te Potenzen sind, und dass es für $x > 0$ jeweils *zwei* Zahlen gibt, deren n-te Potenz x ist. Wie bei den Quadratwurzeln bezeichnet man nun die *nicht-negative* darunter als die n-te Wurzel und definiert:

$$\boxed{\text{Für } \underline{\text{gerades}}\ n \text{ und } \underline{x \geq 0}: \quad y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x \ \wedge\ y \geq 0.}$$

Für diese höheren Wurzeln $\sqrt[n]{x}$ gelten bei *geradem* n dieselben Gesetzmäßigkeiten, wie wir sie für die Quadratwurzeln zusammengestellt hatten. Übertragen Sie die Regeln (1) – (8) aus 8.b. sinngemäß auf n-te Wurzeln bei geradem n.

Die Graphen der höheren Wurzelfunktionen entstehen aus den in 9.a. skizzierten Graphen der Potenzfunktionen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I./III. Quadranten. Wie bei der Quadratwurzel wird auch hier vom Graphen der Umkehrrelation der Teil unterhalb der x-Achse (d. h. $y < 0$) ausgeschlossen und gehört nicht zum Graphen der Wurzelfunktion. Man erhält so den nachstehend skizzierten typischen Verlauf für Wurzelfunktionen mit geradem Exponenten.

Wurzelfunktionen $\sqrt[n]{x}$ bei geradem n:



Die Graphen zeigen deutlich, dass bei *geradem* n die n-te Wurzel $\sqrt[n]{x}$ nur für $x \geq 0$ definiert ist, und der Wurzelwert immer ≥ 0 ist.

2. Ungerader Exponent:

Für *ungerades* n ist die Situation wesentlich einfacher, denn gemäß Eigenschaft 4) gibt es in diesem Fall zu *jedem* x genau *eine* solche Zahl, so dass man die n-te Wurzel wie folgt definieren kann:

$$\boxed{\text{Für } \underline{\text{ungerades}}\ n \text{ und } \underline{\text{beliebiges}}\ x: \quad y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x.}$$

Da hier keinerlei Einschränkungen bzgl. der Vorzeichen des Radikanden x oder des Wurzelwertes y nötig sind, erhält man die den Regeln (1) – (8) aus 8.b. entsprechenden Eigenschaften *ohne* irgendwelche *Einschränkungen.* Sie lauten jetzt:

Für ungerades n:

(1) $(\sqrt[n]{a})^n = a\,,$ (2) $\sqrt[n]{a^n} = a\,,$

(3) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\,,$ (4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ für $b \neq 0\,,$

(5) $a = b \iff a^n = b^n\,,$ (6) $a = b \iff \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}\,,$

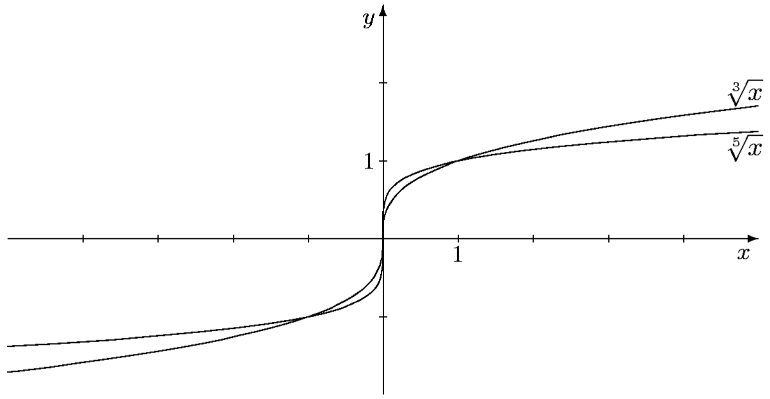
(7) $a \leq b \iff a^n \leq b^n\,,$ (8) $a \leq b \iff \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}\,.$

Insbesondere die Regeln (5) – (8) besagen:

> Für *ungerades* n sind die Potenzierung mit n sowie die Bildung der n-ten Wurzel *uneingeschränkt* Äquivalenzumformungen.

Die Skizzen der Wurzelfunktionen erhält man wieder durch Spiegelung der Graphen der Potenzfunktionen an der Winkelhalbierenden des I./III. Quadranten, nur dass bei *ungeradem* n der Graph der Umkehrrelation schon ein Funktionsgraph ist. Es braucht also kein Teil ausgeschlossen zu werden. Die folgende Skizze zeigt den typischen Verlauf der Graphen der Wurzelfunktionen bei *ungeradem* Exponenten. Beachten Sie, dass diese Wurzelfunktionen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

Wurzelfunktionen $\sqrt[n]{x}$ bei <u>ungeradem</u> n:



c. Potenzen mit rationalen Exponenten. Aufgrund der Erweiterung des Zahlbereichs zu den reellen Zahlen und der darauf basierenden Existenz von Wurzeln kann man nun den Potenzbegriff erneut erweitern, und zwar zu Potenzen mit rationalen Zahlen als Exponenten. Den Ansatz zur Definition entnimmt man der Regel $(a^n)^m = a^{nm}$. Soll diese fundamentale Gesetzmäßigkeit auch für gebrochene Exponenten gültig bleiben, so muss z. B. gelten:

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a\,,$$

m. a. W. $a^{\frac{1}{n}}$ muss eine Zahl sein, deren n-te Potenz a ist. Man definiert daher $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ bzw. allgemein

$$\boxed{\text{Für } a > 0 \text{ und } r = \tfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}\text{:} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.}$$

Da m negativ sein kann, muss man zunächst $a \neq 0$ voraussetzen. Die Beschränkung auf positive Basen $a > 0$ ist dann nötig, da für *gerades* n und $a < 0$ keine n-te Wurzel von a existiert. Hier könnte man zwar wie bei den Wurzeln verschiedene Definitionsbereiche unterscheiden. Dies beseitigt aber die Probleme nicht, weil nur für positive Basen $a > 0$ die fundamentalen Potenzgesetze gültig bleiben. So ist etwa die bekannte Formel $(a^r)^s = a^{rs}$ nicht für beliebige a richtig, denn mit $r = 2$ und $s = \frac{1}{2}$ erhält man z. B. $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{2\cdot\frac{1}{2}} = a^1 = a$. Dies bedeutet $\sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a$. Diese Formel ist zwar für *alle* a definiert, aber, wie wir bereits wissen, nur für $a > 0$ richtig (siehe 9.b. (2) $\sqrt{a^2} = |a|$).

Man muss sich also bei Potenzen mit *gebrochenen* Exponenten auf *positive* Basen beschränken.

Unter dieser Voraussetzung gelten dann die bekannten fundamentalen Potenzgesetze auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten:

$$\boxed{\text{Für } a, b > 0 \text{ und } r, s \in \mathbb{Q}\text{: } a^r a^s = a^{r+s}\,,\ \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}\,,\ (ab)^r = a^r b^r\,,\ (\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}\,,\ (a^r)^s = a^{rs}.}$$

Diese Gesetzmäßigkeiten beinhalten alle Regeln über den Umgang mit Wurzeltermen (bei positiven Radikanden). Das folgende Beispiel zeigt, wie sich dadurch die Berechnung von Wurzeltermen auf *Bruchrechnung* im Exponenten reduziert:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3-2}{6}} = 3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3}\,.$$