I. Grundbegriffe der Mechanik

1. Grundlagen

a. Die Grundgrößen. Will man die Natur nicht nur qualitativ beschreibend, sondern auch quantitativ erfassen, benötigt man physikalische Größen sowie Einheiten für deren Messung. Dabei baut man die physikalischen Größen von wenigen *Grundgrößen* ausgehend systematisch auf. Die fundamentalsten Grundgrößen sind die Größen für *Raum* und *Zeit* sowie die *Masse.* Die *Messung* dieser Grundgrößen ist Ihnen bekannt: die Zeit misst man mit geeigneten *Uhren,* die Länge durch Vergleich mit einem geeigneten *Maßstab* und Massen vergleicht man mittels einer *Balkenwaage.* (Siehe aber auch später Abschnitt c.)

Größe	Symbol	Einheit	Kürzel
Zeit	t	Sekunde	s
Länge	s	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Kraft	F	Newton	N
Fläche	A	Quadratmeter	m^2
Volumen	V	Kubikmeter	m^3

Die ersten *abgeleiteten* Größen des Raumes sind die *Fläche* sowie das *Volumen.* Als Flächeneinheit legt man das Quadratmeter (1 m^2) als die Fläche eines Quadrates mit 1 m Kantenlänge fest. Entsprechend ist ein Kubikmeter (1 m^3) das Volumen eines Würfels von 1 m Kantenlänge. Die gebräuchlichste Volumeneinheit ist das *Liter* (l), welches definiert ist als 1 Kubikdezimeter, also als das Volumen eines Würfels von einem Dezimeter (= 10 cm) Kantenlänge.

b. Präfixe und Einheitenumrechnung. Um kleinere oder größere Einheiten zu beschreiben, benutzt man sog. Präfixe (Vorsilben), die die Einheit um bestimmte Faktoren (Zehnerpotenzen) vergrößern oder verkleinern. Die wichtigsten derartigen Präfixe mit typischen Beispielen enthalten die nachfolgenden Tabellen.

Bruchteile:

Präfix	Zeichen	Faktor	Beispiele
dezi	d	1/10	
centi	c	1/100	cm
milli	m	1/1000	mm
mikro	μ	10^{-6}	μm
nano	n	10^{-9}	ns
pico	p	10^{-12}	

Vielfache:

Präfix	Zeichen	Faktor	Beispiele
Deka	da	10	
hekto	h	100	hl, hPa
kilo	k	1000	kg, km
Mega	M	10^6	MHz, MByte
Giga	G	10^9	GByte
Tera	T	10^{12}	

Man beachte, dass diese Präfixe sich *unmittelbar* auf die nachfolgende physikalische Einheit beziehen; eventuelle weitere Einheiten oder Rechenoperationen werden erst danach beachtet. So bedeutet zum Beispiel die Volumeneinheit von einem Kubikdezimeter (1 dm^3) das Volumen eines Würfels von 1 dm Kantenlänge. 1 dm^3 ist *nicht* ein Zehntel (dezi) von einem Kubikmeter! Wenn man zur Betonung Klammern schriebe, müsste man $1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,(\mathrm{dm})^3$ schreiben. Diese enge Bindung der Präfixe an die unmittelbar folgende Einheit muss man bei der Umrechnung verschiedener Größen ineinander beachten, etwa wie in folgenden Beispielen:

$$1\,\mathrm{l} = 1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,(\mathrm{dm})^3 = (10\,\mathrm{cm})^3 = 10^3\,\mathrm{cm}^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3\,,$$
$$1\,\mathrm{m}^3 = (10\,\mathrm{dm})^3 = 10^3\,\mathrm{dm}^3 = 1000\,\mathrm{l}\,.$$

Also ist ein Liter dasselbe wie 1000 Kubikzentimeter, oder 1 Kubikzentimeter gerade ein tausendstel Liter, d. h. ein Milliliter (1 ml). Und ein Kubikmeter umfasst gerade Tausend Liter.

Bei Vergrößerung der Kantenlänge um den Faktor 10 erhöht sich der Rauminhalt eines Würfels auf das $10^3 = 1000$-fache.
Ähnlich verhält es sich bei Flächeninhalten, nur dass statt dritter Potenzen zweite Potenzen (Quadrate) auftreten:

$$1\,\mathrm{km}^2 = (1000\,\mathrm{m})^2 = 1000^2\,\mathrm{m}^2 = 1\,000\,000\,\mathrm{m}^2\,,$$
$$1\,\mathrm{m}^2 = (100\,\mathrm{cm})^2 = 100^2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2\,.$$

c. Kraft. Kräfte kann man nicht sehen; man erkennt sie an ihren *Wirkungen.* Diese sind entweder *Formänderungen* oder *Bewegungsänderungen.* Es muss unbedingt betont werden, dass nicht die Bewegung selbst eine Kraft erfordert, sondern nur deren *Änderung,* wobei aber nicht nur die *Beschleunigung* oder *Verlangsamung* (allgemein die Veränderung der Geschwindigkeit), sondern auch die Änderung der Bewegungs*richtung* auf eine wirkende Kraft schließen lässt.

Die Formänderungen hat man dabei zur Grundlage der Kraftmessung gemacht: Kraftmesser sind im Prinzip *Federn,* deren Verlängerung unter der Krafteinwirkung man beobachten und messen kann. Für die Einführungsphase möchte ich den Begriff der Kraft als eine *Grundgröße* ohne Rückführung auf andere physikalische Größen benutzen.

Die Einheit der Kraft ist das Newton (N). Wir beschreiben sie hier im 1. Semester mit Hilfe der *Gewichtskraft* F_G, die jeder Körper auf der Erde erfährt:

Eine Masse von 1 kg erfährt auf der Erde eine Gewichtskraft von 9,81 N.

Oder anders formuliert:

1 N ist die Gewichtskraft einer Masse von etwa 102 g.

Diese Festlegungen sind vorläufig. Der hier völlig willkürlich erscheinende Wert 9,81 wird sich im 3. Semester im Zusammenhang mit der sog. *Fallbeschleunigung* zwangsläufig ergeben. Wir werden dann die Kraft als eine aus Masse, Länge und Zeit *abgeleitete* Größe kennenlernen.

d. Masse und Gewicht. Diese beiden Größen werden umgangssprachlich nur sehr undeutlich, wenn überhaupt, unterschieden. Dabei sind sie jedoch physikalisch sehr verschieden. Jede *Masse* besitzt auf der Erde ein *Gewicht;* dieses ist eine *Kraft.* Die *Gewichtskraft* hat ihre Ursache in der Anziehungskraft der Erde, die diese auf jede *Masse* ausübt. Die Größe dieser Gewichtskraft F_G ist von der Masse abhängig. Genauer gilt: Das *Verhältnis* von Gewicht zu Masse ist an einem Ort konstant:

$$\frac{F_\mathrm{G}}{m} = g \quad \text{konstant.}$$

Man nennt diese Konstante den *Ortsfaktor* g, da sie vom Ort abhängig ist. Wir legen dabei folgenden Normwert zugrunde:

$$\boxed{F_\mathrm{G} = g \cdot m \qquad \text{mit dem Ortsfaktor} \quad g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}.}$$

Trotz dieses engen Zusammenhangs muss zwischen Masse und Gewicht deutlich unterschieden werden:
1. Die Masse eines Körpers ist an jedem Orte gleich, während sein Gewicht *ortsabhängig* ist.
2. Im Gegensatz zur Masse ist die Gewichtskraft (wie alle Kräfte) eine *gerichtete* (oder *vektorielle)* Größe. Gerichtete Größen können sich gegenseitig aufheben, ungerichtete (*skalare*) hingegen nicht. Ein Körper behält seine Masse, kann aber durchaus sein Gewicht verändern (Ortsabhängigkeit) oder sogar (durch andere Kräfte) 'verlieren' (Schwerelosigkeit, Schweben unter Wasser).

e. Dichte. Neben Masse und Gewicht eines Körpers ist das *Volumen* eine weitere charakteristische Größe. Der Zusammenhang zwischen Masse und Volumen hängt jedoch von dem betrachteten *Stoff* ab. Aus unserer täglichen Erfahrung wissen wir, dass das doppelte Volumen eines Stoffes auch die doppelte Masse hat, bzw. allgemein das *Verhältnis* von Masse zu Volumen (bei einem gegebenen Stoff) *konstant* ist. Diese Konstante nennt man die *Dichte* des Stoffes. Man bezeichnet sie mit dem griechischen Buchstaben ρ (rho).

$$\text{Dichte:} \qquad \rho = \frac{m}{V}\,, \qquad \text{Einheit:} \quad 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\,.$$

Ein fundamentaler Dichtewert ist die Dichte des Wassers. Sie beträgt

$$\boxed{\text{Dichte von Wasser: } 1\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}} = 1\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}.}$$

(Bestätigen Sie die Gleichheit der 3 angegebenen Werte.)

f. Hooke'sches Gesetz. Kraftmesser sind Federn; deren Verlängerung zeigt die wirkende Kraft an. Dabei stellt man fest, dass doppelte Kräfte (in gleicher Richtung wirkend) eine doppelt so große Verlängerung, vierfache Kräfte eine vierfache Verlängerung bewirken und allgemein das *Verhältnis* von wirkender Kraft F zur Verlängerung s der Feder *konstant* ist. Die Größe dieser Konstante ist ein Maß für die *Härte* der Feder und wird daher *Federhärte* genannt:

$$\text{Federhärte:} \qquad D = \frac{F}{s}\,, \qquad \text{Einheit: } 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}\,.$$

Das umgekehrte Verhältnis $\frac{s}{F} = \frac{1}{D}$ ist dann ebenfalls konstant; der Wert dieser Konstanten $1/D$ ist ein Maß für die *Dehnbarkeit* der Feder.

g. Proportionalität. In den bisherigen Überlegungen hatten wir etliche Beispiele für physikalische Größen, die unter bestimmten Bedingungen in einem *festen Verhältnis* stehen. Man nennt zwei Größen *proportional,* wenn ihr Quotient konstant ist. Dabei bedeutet Konstanz, dass man bei verschiedenen Messungen dieser Größen stets denselben Quotienten erhält. Man nennt diesen konstanten Wert dann allgemein die *Proportionalitätskonstante.* In speziellen Fällen erhält sie spezielle Namen, wie etwa Dichte, Wichte, Ortsfaktor, Federhärte u. ä. Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenfassung der uns bisher begegneten Proportionalitäten:

1.Größe	2. Größe	Proportionalitätsfaktor	Bedingungen
Gewicht F_{G}	Masse m	Ortsfaktor g	am festen Ort
Masse m	Volumen V	Dichte ρ	homogener Stoff
Gewicht F_{G}	Volumen V	Wichte γ	homogener Stoff
Federkraft F	Verlängerung s	Federhärte D	bestimmte Feder

Proportionalität von Größen erkennt man an Messreihen, indem man die Quotienten berechnet und feststellt, ob sie im Rahmen der Messgenauigkeit als konstant bezeichnet werden können. Eine zweite Möglichkeit ist die graphische Darstellung der Beziehung zwischen den Größen in einem Koordinatenkreuz. Wenn sich dabei eine *Gerade* durch den *Koordinatenursprung* ergibt (siehe Unterricht, Hooke'sches Gesetz), so liegt eine Proportionalität vor; der *Anstieg* der Geraden gibt dann die Proportionalitätskonstante an.

Der Begriff der Proportionalität ist auch deshalb so bedeutsam, da die Definition der meisten physikalischen Größen darauf beruht. Liegt unter bestimmten Bedingungen eine Proportionalität zweier bereits bekannter Größen vor, so wird dadurch ein Proportionalitätsfaktor bestimmt, der dann eine (neue) physikalische Größe darstellt. Neben den bereits genannten Beispielen seien vorausschauend erwähnt: elektrischer Widerstand, Leitfähigkeit, spezifische Wärme, Wärmeleitfähigkeit, …, und unzählige mehr. Aber auch viele universelle physikalische Konstanten rühren von Proportionalitäten her (universelle Gaskonstante R, Gravitationskonstante f, Planck'sches Wirkungsquantum h, elektrische Feldkonstante ε_0 u. a.).

2. Arbeit und Energie

a. Arbeit. An einem Körper wird *Arbeit* verrichtet, wenn er durch die Wirkung einer Kraft F eine Wegstrecke s bewegt wird. Sind dabei Kraft- und Wegrichtung identisch, so definiert man die verrichtete Arbeit W als

$$\text{Arbeit:} \qquad W = F \cdot s\,, \qquad \text{Einheit: } 1\,\text{Nm} = 1\,\text{J}\ (\textit{Joule})$$

Ein Spezialfall ist die *Hubarbeit,* bei der ein Körper vom Gewicht F_G um die Höhe h angehoben wird:

$$\text{Hubarbeit:} \qquad W = F_\text{G} \cdot h\,.$$

Der angehobene Körper hat dann aufgrund seiner erhöhten Lage selbst die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten. So kann etwa ein auf die Höhe h angehobener Körper selbst benutzt werden, um einen anderen Körper anzuheben (etwa unter Verwendung eines Seils und einer an der Decke befestigten Rolle). Die so gewonnene *Fähigkeit, Arbeit zu verrichten,* nennt man auch *Energie;* in diesem speziellen Falle *Lageenergie.* Diese ist identisch mit der an dem Körper verrichteten Hubarbeit, also gilt für eine Masse m in der Höhe h über dem Bezugsniveau:

$$\text{Lageenergie:} \qquad W = F_\text{G} \cdot h = m\,g\,h\,.$$

Physikalisch sind Arbeit und Energie identische Größen (mit derselben Einheit J); welches Wort man benutzt, ist eine Frage der Blickrichtung. Man sagt: An dem Körper wird Arbeit verrichtet; er erhält dadurch einen Energiezuwachs.

b. Leistung. Leistung ist ein Maß dafür, wie *intensiv* eine Arbeit verrichtet wird, das heißt wie schnell. Wird über einen Zeitraum hinweg kontinuierlich eine Arbeit verrichtet, so definiert man das Verhältnis von erbrachter Arbeit W zur benötigten Zeit t als *Leistung:*

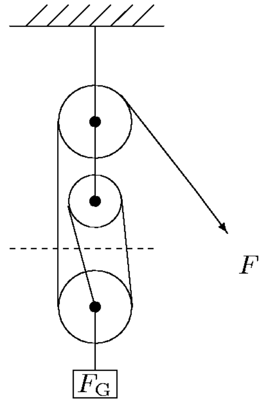
$$\text{Leistung:} \qquad P = \frac{W}{t} \qquad \text{Einheit: } 1\,\frac{\text{J}}{\text{s}} = 1\,\text{W} \quad (\text{Watt})\,.$$

Als Folge dieser Einheitenfestsetzung ist die Einheit *Wattsekunde* Ws gleich der Energieeinheit Joule. Daraus ergibt sich auch, dass die häufig benutzte Einheit *Kilowattstunde* eine Energieeinheit ist:

$$1\,\text{kWh} = 1000\,\text{Wh} = 1000 \cdot 3600\,\text{Ws} = 3\,600\,000\,\text{J}\,.$$

c. Flaschenzug. Ein Flaschenzug dient dazu, dem Menschen die Arbeit zu erleichtern. Bei genauerer physikalischer Betrachtung werden wir feststellen, dass der notwendige *Kraft*einsatz reduziert wird, nicht jedoch der Energieaufwand.

Wir haben im Unterricht einen typischen Flaschenzug, wie er nebenstehend skizziert ist, untersucht und festgestellt, dass die notwendige *Zugkraft* F am freien Seilende immer ein Drittel der *Last* F_G betrug. Dies beruht auf den folgenden beiden Tatsachen:



1. Da es sich um ein einziges straff gespanntes Seil handelt, liegt an allen Stellen des Seiles diese Kraft F (mit ihrer gleichgroßen Gegenkraft) vor, also auch an den Schnittstellen mit der gestrichelten Linie.

2. Die angehängte Last F_G verteilt sich (bei diesem Flaschenzug) auf die *drei* Seilstränge, die von der gestrichelten Linie geschnitten werden. Daher teilt sich die Last in *drei* Teile auf. Diese

drei Teilkräfte sind gemäß 1. gleich groß, und zwar gleich der Zugkraft F, also ist $F_G = 3 \cdot F$.

Diese Überlegungen kann man auf jeden Flaschenzug anwenden. Dabei ergibt sich aus der Zahl n der Seilstränge, auf die sich die Last verteilt, das *Übersetzungsverhältnis* $1 : n$, in dem sich die Kraft reduziert. Im obigen Beispiel bei 3 Strängen also $1 : 3$.

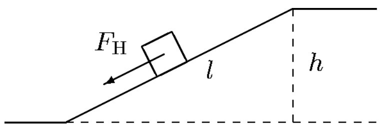
d. Energieerhaltung. Ein Flaschenzug verringert also den benötigten *Kraft*aufwand. Der *Arbeits*aufwand wird dabei jedoch nicht reduziert. Will man nämlich die Last mit dem oben skizzierten Flaschenzug um die Höhe h anheben, so muss sich *jedes* der *drei* Teilstücke des Seiles, an dem die Last hängt, um die Strecke h verkürzen. Dazu muss man das Seil aber *insgesamt* um den *drei*fachen Betrag $3h$ verkürzen. Man muss also die Zugkraft F über den Weg $s = 3h$ anwenden. Dies bedeutet, dass sich der 'Zugweg' in demselben Verhältnis verlängert, wie sich die aufzuwendende Kraft verringert. Der notwendige Arbeitsaufwand W bleibt daher unverändert:

$$W = F \cdot s = F \cdot 3h = 3F \cdot h = F_G \cdot h\,.$$

Der *mit* Hilfe des Flaschenzugs notwendige *Arbeitsaufwand* ist also genau gleich der *ohne* Hilfe zu verrichtenden direkten *Hubarbeit,* also gleich der *Lageenergie* des angehobenen Körpers.[1)]

Dieses Ergebnis ist ein Beispiel für das allgemeine Prinzip der *Energieerhaltung.* Dieses kann man in den vielfältigsten Situationen beobachten und es ist eine der fundamentalen Gesetzmäßigkeiten der Physik.

e. Schiefe Ebene. An einer (reibungsfreien) schiefen Ebene kann man die Energieerhaltung ebenfalls experimentell überprüfen. Wir wollen hier jedoch einmal exemplarisch zeigen, wie das Prinzip der Energieerhaltung umgekehrt benutzt werden kann, um neue Zusammenhänge daraus *abzuleiten.* Wir werden also im folgenden, das (experimentell und theoretisch wohlfundierte) Prinzip der Energieerhaltung als gültig voraussetzen!



Ein Körper gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene wie nebenstehend skizziert. Der Körper habe das Gewicht F_G, gesucht ist die sogenannte *Hangabtriebskraft* F_H.

Um diese zu ermitteln, vergleichen wir zwei Methoden, den Körper von dem Bodenniveau auf die obere Höhe zu bringen:

1. Wir heben den Körper direkt hoch, der nötige Arbeitsaufwand ist die *Hubarbeit* $W = F_G \cdot h$.
2. Wir ziehen der Körper über die schiefe Ebene hoch. Dazu müssen wir der Hangabtriebskraft entgegen eine gleichgroße Kraft $F = F_H$ aufbringen, dies jedoch über die gesamte Länge l der schiefen Ebene hinweg. Der Arbeitsaufwand ist nun $F_H \cdot l$.

Aufgrund des Prinzips der Energieerhaltung müssen die benötigten Energien übereinstimmen:

$$F_G \cdot h = F_H \cdot l \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{F_H}{F_G} = \frac{h}{l}\,.$$

Man nennt dieses Verhältnis h/l die *Neigung* n der schiefen Ebene und erhält damit:

> *Das Verhältnis von Hangabtriebskraft F_H zu Gewichtskraft F_G ist gleich der Neigung $n = h/l$ der schiefen Ebene.*

[1)] Bei diesen Überlegungen haben wir von jeglichen Reibungskräften sowie dem Eigengewicht des Flaschenzugs abgesehen.

5. Gleichförmige Bewegung

a. Geschwindigkeit. Eine *gleichförmige* Bewegung ist eine geradlinige Bewegung, bei der in gleichen Zeitabschnitten gleiche Wegstrecken zurückgelegt werden. Dies bedeutet, dass der zurückgelegte Weg Δs zur dafür benötigten Zeit Δt proportional ist und somit der Quotient

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ konstant.}$$

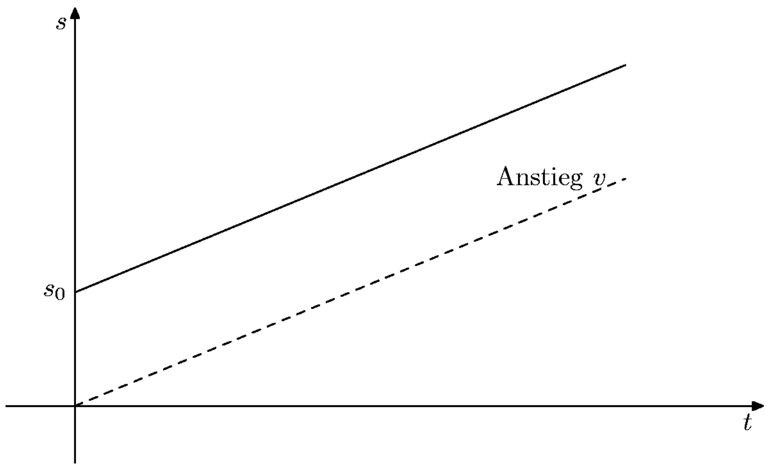
Dieser Quotient ist die **Geschwindigkeit** v der Bewegung. Die Einheit der Geschwindigkeit ist $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Stellt man die Wegstrecke s in Abhängigkeit von der Zeit t graphisch dar, so bedeutet das konstante Verhältnis

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}\,,$$

dass eine Gerade mit dem *Anstieg* v vorliegt. Wählt man Zeit- und Wegstreckenmessung so, dass zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ der Weg $s = 0\,\mathrm{m}$ ist, so erhält man eine Ursprungsgerade mit dem Anstieg v. Befindet sich das Objekt zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Position s_0, so erhält man eine Gerade mit demselben Anstieg v und ausgehend von s_0 auf der s-Achse:

Weg-Zeit-Diagramm



Und als **Weg-Zeit-Gesetz** einer gleichförmigen Bewegung erhält man

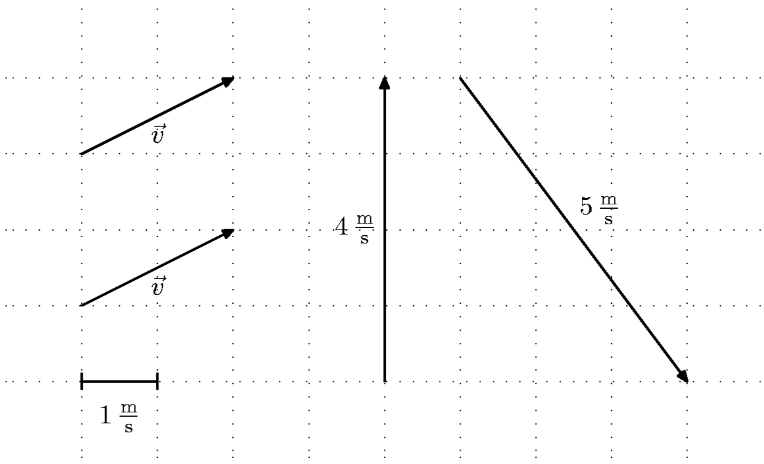
$$\boxed{s = s_0 + v \cdot t}$$

wobei s_0 die Position zum Zeitpunkt $t = 0$ angibt.

b. Vektoren. An einfachen Beispielen (Kanufahrer auf einem Fluss, Flugzeug mit Rücken- oder Gegenwind) haben wir uns verdeutlicht, dass es bei der Geschwindigkeit nicht nur auf den Betrag, sondern auch auf die **Richtung** ankommt: Die Geschwindigkeit ist eine *gerichtete* oder *vektorielle* Größe[1]. Gerichtete Größen stellt man durch **Vektoren** dar; diese werden veranschaulicht durch Pfeile, die zunächst die Richtung angeben, zugleich aber durch ihre Länge

[1] Eine andere wichtige vektorielle Größe ist die Kraft; dagegen ist die Masse ein wichtiges Beispiel für eine ungerichtete, *skalare* Größe.

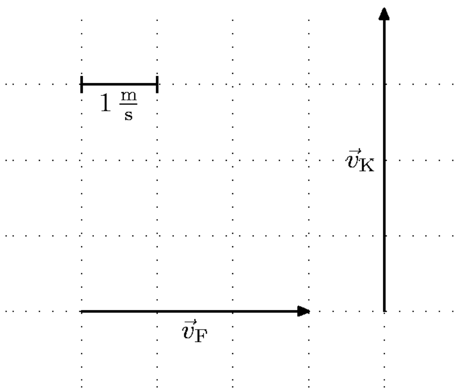
auch den **Betrag** der physikalischen Größe festlegen. Da eine vektorielle physikalische Größe

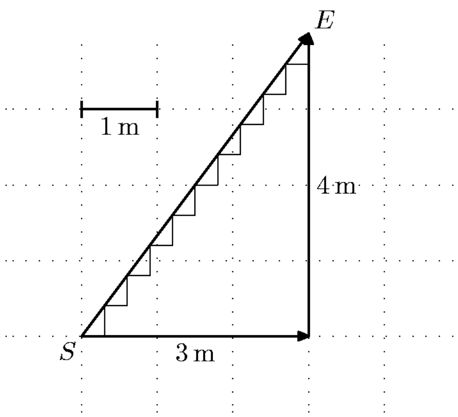


durch Richtung und Betrag vollständig festgelegt ist, ist bei der graphischen Darstellung die Lage (Position) der Pfeile unerheblich, wenn nur *Richtung* und *Länge* unverändert bleiben. So repräsentieren in der obenstehenden Skizze die beiden mit $\vec{v}$ gekennzeichneten Pfeile denselben Geschwindigkeitsvektor. Allgemein bezeichnet man Geschwindigkeitsvektoren mit Symbolen wie $\vec{v}$, während der zugehörige Betrag des Vektors mit $v = |\vec{v}|$ bezeichnet wird. In obigem Beispiel also $v = |\vec{v}| = 2{,}23\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (Nachmessen bzw. Satz des Pythagoras).

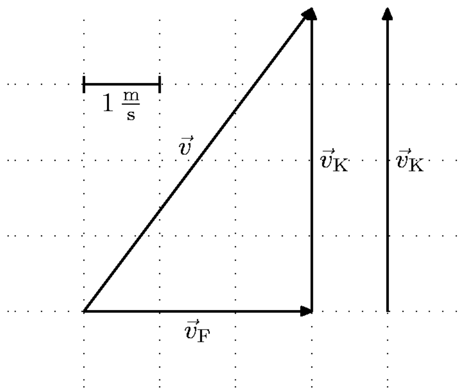
c. Überlagerung von Geschwindigkeiten. Wenn ein Kanufahrer auf einem Fluss paddelt, so überlagern sich die Geschwindigkeiten des Kanus und des fließenden Wassers und es ergibt sich eine **resultierende** Geschwindigkeit. Diese ist von der Richtung der Kanufahrt abhängig. Wir gehen einmal von einer Fließgeschwindigkeit des Flusses $v_\text{F} = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ aus und unterstellen, dass der (durchtrainierte) Kanufahrer eine (konstante) Eigengeschwindigkeit $v_\text{K} = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ relativ zum Wasser erzielt. Solange der Kanufahrer einfach berg- oder talwärts steuert, ist die Antwort klar: Bei Bergfahrt ist seine resultierende Geschwindigkeit relativ zum festen Boden $v = v_\text{K} - v_\text{F} = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, während sich bei Talfahrt $v = v_\text{K} + v_\text{F} = 7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ergibt.

Steuert der Kanufahrer hingegen bei seiner Überfahrt ständig im rechten Winkel zum Fluss, so kann man die resultierende Geschwindigkeit nicht so einfach ermitteln. Hier muss man die beteiligten Geschwindigkeiten als Vektoren darstellen (linke Skizze).



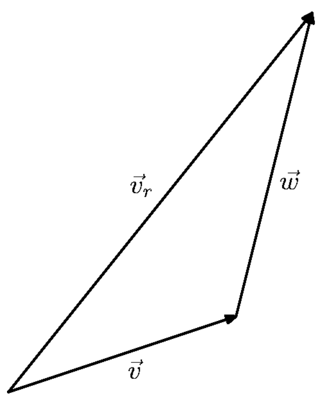


Nun wird in jeder Sekunde der Strom den Kanufahrer um 3 m flussabwärts treiben, zugleich paddelt er aber mit eigener Kraft 4 m quer zum Fluss, so dass er in einer Sekunde vom Startpunkt S zum Endpunkt E gelangt (rechte Skizze). Natürlich bewegt sich der Kanufahrer nicht längs der Katheten, sondern auf direktem Weg von S nach E, denn die Bewegungen von Fluss und Kanu finden natürlich nicht *nacheinander,* sondern gleichzeitig statt. Betrachtet man einmal statt einer Sekunde kleinere Zeitintervalle (etwa $\Delta t = 0{,}1$ s), so ergeben sich mit obiger Überlegung die kleineren Dreiecke, die jedoch insgesamt dieselbe Bewegungsrichtung bestimmen. Man erhält also den resultierenden Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ des Kanufahrers (relativ zum festen Boden) aus den beiden einzelnen Vektoren $\vec{v}_{\mathrm{F}}$ und $\vec{v}_{\mathrm{K}}$, indem man einen der Vektoren am Ende des anderen ansetzt und dann den Vektor vom Anfang des ersten zum Ende des zweiten bildet:



Aus einer genauen Skizze kann man so die resultierende Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Kanufahrers ermitteln: Der Betrag ist $v = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Pythagoras) und die Richtung bildet einen Winkel von 53^0 mit der Fließrichtung des Flusses (Ausmessen).

Die obigen Überlegungen gelten nun ganz allgemein für die Überlagerung zweier Bewegungen und wir erhalten die folgende allgemeine Regel zur Bestimmung des resultierenden Geschwindigkeitsvektors:

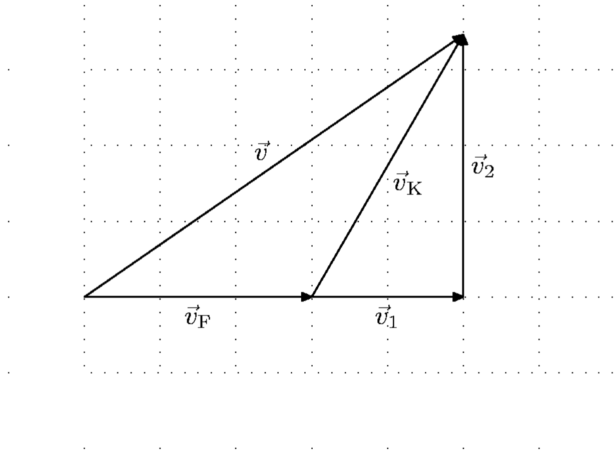
> Überlagern sich zwei Bewegungen mit den Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$, so erhält man den resultierenden Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_r$, indem man einen Vektor am Ende des anderen ansetzt und dann den Vektor $\vec{v}_r$ vom Anfang des ersten zum Ende des zweiten Vektors bildet:
>
> 
>

d. Zerlegung in Komponenten. Ein wichtiges Mittel, Bewegungsvorgänge zu analysieren, liegt in der **Zerlegung** der beteiligten Geschwindigkeitsvektoren in **rechtwinklige Komponenten**. Im obigen Beispiel war die Geschwindigkeit des Kanus senkrecht zur Fließgeschwindigkeit. Dadurch konnte man mit dem Satz des Pythagoras die resultierende Geschwindigkeit v genau bestimmen. Wenn nun das Kanu nicht im rechten Winkel zum Fluss steuert, ist die Situation zunächst unübersichtlicher; sie kann jedoch durch Zerlegung in rechtwinklige Komponenten auf die in c. studierte Situation zurückgeführt werden.

Betrachten wir zum Beispiel wieder unseren Kanufahrer, der diesmal jedoch einen Winkel von 60^0 mit der Strömungsrichtung des Flusses *steuert*[2]. Alle anderen Daten bleiben un-

[2] Dies ist nicht die tatsächliche Fahrtrichtung, sondern die vom Kanufahrer anvisierte Richtung.

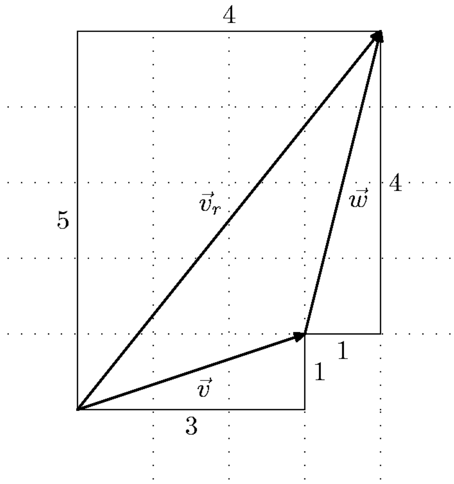
verändert. Man erhält so die nachfolgende Skizze zur Bestimmung des resultierenden Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$:



In dieser Skizze sind aber bereits auch die rechtwinkligen Komponenten $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ von $\vec{v}_K$ eingetragen. Man zerlegt dazu den Geschwindigkeitsvektor des Kanufahrers in zwei Vektoren, einer parallel zum Fluss ($\vec{v}_1$) und einer im rechten Winkel zum Fluss ($\vec{v}_2$). Kennt man beide Komponenten v_1 und v_2, so ist damit auch $\vec{v}_K$ (in Richtung und Betrag) festgelegt. **Ein Vektor ist durch seine Komponenten vollständig festgelegt.**

Außerdem kann man nun auch die Komponenten der resultierende Geschwindigkeit unmittelbar ablesen: Die Komponente von $\vec{v}$ in Flussrichtung ist $v_F + v_1$, während die Komponente quer zum Fluss v_2 ist. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras berechnet man damit den Betrag $v = |\vec{v}|$, und auch die Richtung von $\vec{v}$ ist durch die Komponenten festgelegt (siehe unten bzw. Übung (5), Aufgabe 2). Damit erhält man eine alternative Beschreibung zur Bestimmung des resultierenden Vektors:

Die Komponenten des resultierenden Vektors $\vec{v}_r$ sind die Summen der Komponenten der einzelnen Vektoren.



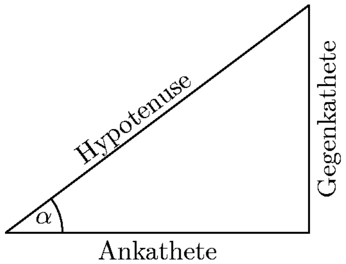
Aus diesem Grund wird der resultierende Vektor auch **Summenvektor** genannt:

$$\vec{v}_r = \vec{v} + \vec{w}\,.$$

e. Rechnerische Bestimmung der Komponenten. Bisher hatten wir uns bei der Bestimmung der resultierenden Geschwindigkeit und der Komponenten eines Vektors auf genaue Zeichnungen stützen müssen. Wir wollen nun sehen, wie man mit Hilfe der trigonometrischen

Funktionen Sinus (sin), Cosinus (cos) und Tangens (tan) und einem Taschenrechner diese Fragen rechnerisch klären kann.

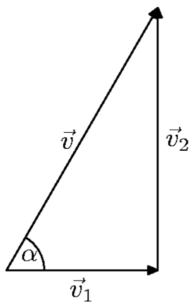
Wir wollen hier die trigonometrischen Funktionen nur für Winkelmaße α mit $0^0 < \alpha < 90^0$ definieren. Sei α ein solcher Winkel. Wir betrachten dann ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel α. In Bezug auf den Winkel α kann man dann die beiden Katheten unterscheiden, die *Ankathete* bildet einen Schenkel des Winkels α, während die *Gegenkathete* dem Winkel α gegenüberliegt:



Mit diesen Bezeichnungen definiert man dann den

$$\begin{aligned} \text{Sinus}: \quad \sin(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\,, \\ \text{Cosinus}: \quad \cos(\alpha) &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\,, \\ \text{Tangens}: \quad \tan(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\,. \end{aligned}$$

Die so definierten Werte sind *nicht* von der Größe des gewählten rechtwinkligen Dreiecks abhängig, da in Dreiecken mit übereinstimmenden Winkeln nach dem Strahlensatz auch die Seitenverhältnisse übereinstimmen (die Dreiecke sind ähnlich).
Wendet man dies auf einen Vektor $\vec{v}$ und seine Komponenten $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ an:



so erhält man:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) = \frac{v_2}{v} &\iff v_2 = v \cdot \sin(\alpha)\,, \\ \cos(\alpha) = \frac{v_1}{v} &\iff v_1 = v \cdot \cos(\alpha)\,. \end{aligned}$$

Damit sind die Komponenten v_1, v_2 aus dem Vektor $\vec{v}$, der seinerseits durch v und α bestimmt ist, berechenbar. Und umgekehrt erhält man v und α aus den Komponenten v_1, v_2 durch:

$$\begin{aligned} v^2 = v_1^2 + v_2^2 &\iff v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\,, \\ \tan(\alpha) = \frac{v_2}{v_1} &\iff \alpha = \arctan(\frac{v_2}{v_1})\,. \end{aligned}$$

6. Beschleunigte geradlinige Bewegung.

a. Momentangeschwindigkeit. (Im Unterricht übersprungen.) Unsere bisherige Definition der Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ setzte eine gleichförmige Bewegung voraus, das bedeutete, dass sich dabei für v immer derselbe Wert ergab, unabhängig vom Zeitintervall Δt. Liegt keine gleichförmige Bewegung vor, so wird durch die Gleichung

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

nur die *Durchschnittsgeschwindigkeit* während des Zeitintervalls Δt definiert.

Diese Durchschnittsgeschwindigkeit muss man unterscheiden von der sog. *Momentangeschwindigkeit.* Darunter will man die Geschwindigkeit verstehen, die ein Körper in einem bestimmten Moment hat. Nun benötigt man zur physikalischen Bestimmung einer Geschwindigkeit immer eine Zeit- und eine Streckenmessung, und das entstehende Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ist dann eben eine Durchschnittsgeschwindigkeit. Diese kommt der beabsichtigten Momentangeschwindigkeit um so näher, je kleiner das Zeitintervall Δt ist. Man muss also untersuchen, welchem Wert sich der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ schließlich *annähert,* wenn Δt immer kleiner wird und sich dem Wert 0 beliebig annähert. Diesen Annäherungsprozess nennt man *Grenzübergang,* und der dabei entstehende *Grenzwert* wird auch als Limes (lat., Grenze) bezeichnet:

$$\text{Momentangeschwindigkeit:} \quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\,.$$

Man beachte, dass dieser Grenzübergang kein physikalischer Prozess ist und Momentangeschwindigkeiten in letzter Konsequenz keine messbare Größen sind. Sie sind als gedankliches Konzept jedoch zur Analyse komplexer Bewegungsvorgänge äußerst nützlich: Unser Verständnis und die Beherrschung komplizierter Bewegungsabläufe (Himmelskörper, Raketen u.a.) sind ohne dieses Konzept der Momentangeschwindigkeit undenkbar.

Aufgrund dieser Definition erhält man die folgende geometrische Beschreibung der Geschwindigkeit, die nun ganz allgemein für beliebige Bewegungsvorgänge gilt:

Die Momentangeschwindigkeit v gibt zu jedem Zeitpunkt t den *Anstieg* der Weg-Zeit-Kurve an der Stelle t an.

b. Beschleunigung. Unter Beschleunigung versteht man umgangssprachlich eine Erhöhung der Geschwindigkeit. Physikalisch versteht man unter Beschleunigung ein Maß dafür, wie schnell sich eine Geschwindigkeit verändert. Man definiert:

$$\text{Beschleunigung:} \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}\,.$$

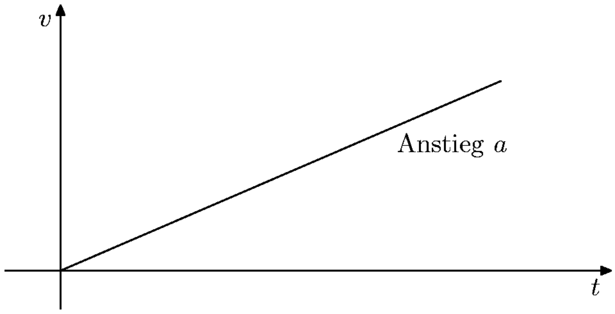
Dabei bezeichnet v_2, v_1 die Momentangeschwindigkeiten zu den Zeitpunkten t_2, t_1. (Insofern setzt die Definition der Beschleunigung den Begriff der Momentangeschwindigkeit voraus.) Die Einheit der Beschleunigung ergibt sich konsequenterweise als $1\,\frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Dieser Begriff der Beschleunigung macht zunächst nur dann einen Sinn, wenn der Wert von a nicht vom Messintervall Δt abhängt. Solche Bewegungsvorgänge nennt man *gleichmäßig beschleunigt:*

Unter einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung versteht man eine geradlinige Bewegung, bei der sich in gleichen Zeitabständen die Geschwindigkeit immer um den gleichen Wert ändert, bei der also die oben definierte Beschleunigung *konstant* ist.

Gemäß ihrer Definition ist die Beschleunigung a der *Anstieg* der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit, das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm daher eine Gerade. Wenn man eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit *Start aus der Ruhe* betrachtet, so ist $v = 0$ für $t = 0$ und man erhält eine Ursprungsgerade:

Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm



Und als **Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz** erhält man $v = a \cdot t$ (wieder für den Fall des Starts aus der Ruhe heraus). Unser Ziel ist es nun, aus dem jetzt bekannten Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz das Weg-Zeit-Gesetz zu ermitteln.

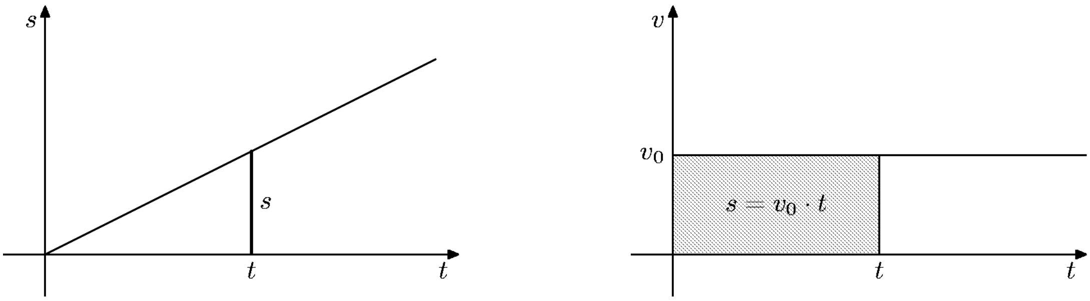
c. Zusammenhang zwischen Weg- und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm. Diesen Zusammenhang haben wir in einer Richtung schon kennengelernt: Die Momentangeschwindigkeit v ist der Anstieg der Weg-Zeit-Kurve im betrachteten Zeitpunkt ('Moment') t. Wir wollen nun umgekehrt aus der Geschwindigkeits-Zeit-Kurve den zur Zeit t zurückgelegten Weg s ermitteln. Dazu kehren wir nochmals zur gleichförmigen Bewegung zurück, für die wir beide Gesetzmäßigkeiten kennen. Es sei v_0 die konstante Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung mit Start im Nullpunkt ($s = 0$ für $t = 0$). Dann gilt für die Momentangeschwindigkeit v die simple Gesetzmäßigkeit: $v = v_0$ konstant, und wir erhalten die folgenden Diagramme:

Gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0:

(bei Start im Koordinatenursprung)

Weg-Zeit-Gesetz: $s = v_0 \cdot t$

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz: $v = v_0$



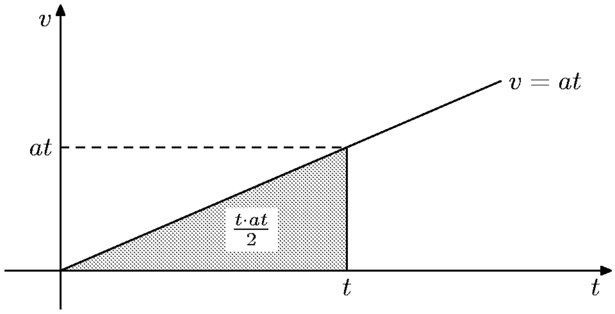
Fixieren wir nun einen Zeitpunkt t und markieren diesen in beiden Diagrammen. Dann ist die zu diesem Zeitpunkt zurückgelegte Wegstrecke im linken Diagramm als Strecke s eingezeichnet. Nach dem Weg-Zeit-Gesetz gilt dann $s = v_0 \cdot t$. Dieses Produkt $v_0 \cdot t$ kann man nun auch im rechten Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm veranschaulichen, es ist nämlich nichts anderes als der Flächeninhalt des markierten Flächenstücks. Dies führt nun zu der wichtigen Beschreibung des zurückgelegten Weges im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm:

Die bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Wegstrecke s ist gleich dem Flächeninhalt zwischen Geschwindigkeits-Zeit-Kurve und t-Achse in den Grenzen von 0 bis t.

Die Formulierung dieser wichtigen Beziehung ist so gewählt, dass sie nicht nur für gleichförmige, sondern ganz allgemein für beliebige Bewegungen anwendbar ist. Man beachte, dass man eine beliebige Geschwindigkeitskurve in viele sehr kleine Abschnitte zerlegen kann, in denen die

Geschwindigkeit (nahezu) konstant ist und daher die zurückgelegte Strecke als Flächeninhalt gedeutet werden kann. Summiert man alle diese Rechtecksflächen, so ergibt sich die Gesamtfläche, die damit die zurückgelegte Strecke angibt.

d. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Wir wenden nun diesen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits- und Weg-Zeit-Diagramm auf eine beschleunigte Bewegung mit der konstanten Beschleunigung a an. Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist eine Ursprungsgerade mit dem Anstieg a (siehe S. 15). Das Flächenstück darunter ist ein rechtwinkliges Dreieck der 'Breite' t und der 'Höhe' $v = at$, dessen Fläche also $\frac{1}{2} \cdot t \cdot at = \frac{1}{2}at^2$. Da diese Fläche den



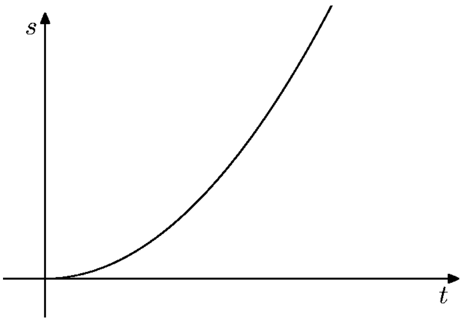
zurückgelegten Weg angibt, erhalten wir für eine konstant beschleunigte Bewegung (mit Start im Koordinatenursprung und aus der Ruhe, d. h. $s = 0$ und $v = 0$ für $t = 0$):

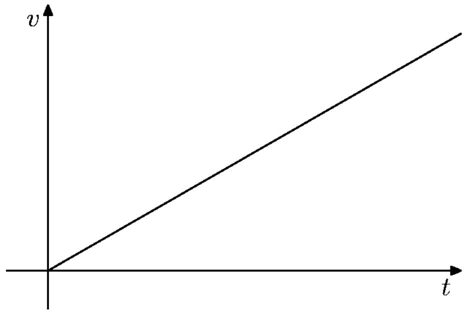
Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung a:

(bei Start im Koordinatenursprung und aus der Ruhe)

Weg-Zeit-Gesetz: $s = \dfrac{1}{2}at^2$

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz: $v = at$





e. Der freie Fall. Das fundamentale Beispiel für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist der freie Fall. Dass dies eine beschleunigte Bewegung ist, ist unmittelbar erkennbar (ein ruhender Körper setzt sich in Bewegung), dass jedoch eine konstante Beschleunigung vorliegt, kann man nicht unmittelbar 'sehen'. Dies haben wir durch Messungen untersucht.

Wenn man von der Definition ausgeht, muss man zum Nachweis der Konstanz der Beschleunigung überprüfen, ob die *Momentangeschwindigkeit* v zur Fallzeit t proportional ist. Wegen der Problematik der Messung der Momentangeschwindigkeit gehen wir einen anderen Weg und benutzen das oben hergeleitete Weg-Zeit-Gesetz für eine beschleunigte Bewegung. Aus der Beziehung $s = \frac{1}{2}at^2$ kann man nämlich $a = \frac{2s}{t^2}$ berechnen. Man misst also für verschiedene Fallstrecken s die Fallzeit t und untersucht, ob der sich ergebende Wert für $a = \frac{2s}{t^2}$ (annähernd) konstant ist.

Der von uns ermittelte Wert für die *Fallbeschleunigung* betrug etwas mehr als $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wir werden später im Zusammenhang mit Schwingungen eine genauere Methode zu ihrer Bestimmung kennenlernen. Wir werden ab jetzt immer den Normwert $a_g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ für die Fallbeschleunigung zugrundelegen.