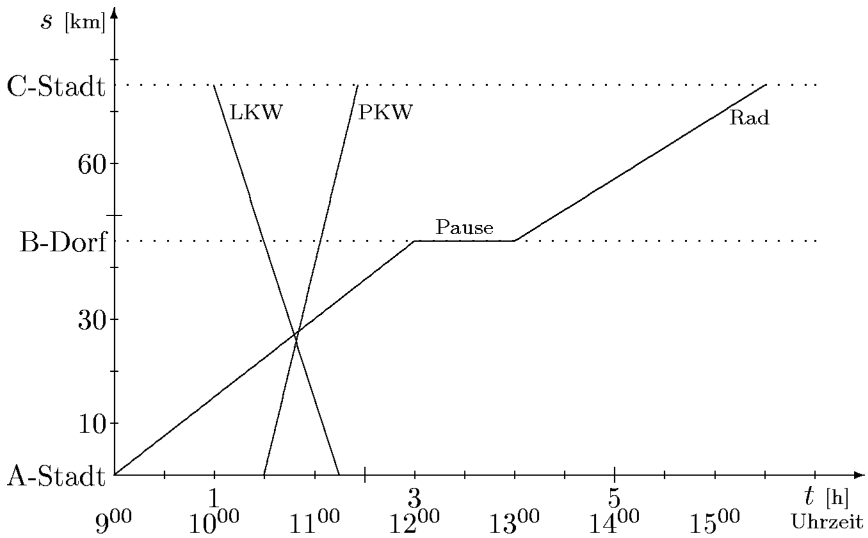
Übungen (4)

1) Ein Radfahrer fährt um 9 Uhr von A-Stadt zum 45 km entfernten B-Dorf. Er kommt dort um 12 Uhr an. Er macht eine Stunde Mittagspause und legt dann noch 30 km bis C-Stadt zurück, wo er um 15.30 Uhr eintrifft. [Auf jeder Strecke hält er eine konstante Geschwindigkeit ein.]
Um 10.30 Uhr folgt ihm ein PKW mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h.
Um 10 Uhr startet ein LKW in C-Stadt. Er fährt ohne Pause über B-Dorf nach A-Stadt. Seine Geschwindigkeit beträgt konstant 60 km/h.
a) Erstellen Sie in *einer* Skizze die Weg-Zeit-Diagramme des Radfahrers und der beiden Kraftfahrzeuge. (Wählen Sie in der Zeichnung 2cm für 1 Stunde bzw. für 10 km.)
b) Bestimmen Sie zeichnerisch
   i) die beiden Geschwindigkeiten des Radfahrers auf den Teilstrecken,
   ii) wann und wo der PKW den Radfahrer überholt,
   iii) die Zeiten, zu denen der LKW B-Dorf passiert bzw. in A-Stadt ankommt, und
   iv) Ort und Zeit des Treffpunkts von Radfahrer und entgegenkommendem LKW.
c) Bestimmen Sie die Weg-Zeit-Gesetze (s die Entfernung von A-Stadt, t die Zeit ab 9^{00} Uhr) für alle drei Fahrzeuge und beantworten Sie die Fragen i) – iv) rechnerisch.

2) Ein Fluss strömt mit einer Geschwindigkeit von $3\,\mathrm{m/s}$ zu Tal. Ein Kanufahrer überquert den Fluss, wobei er einen Winkel von 60^0 *gegen* die Strömung steuert. (Skizze!) Der durchtrainierte Kanufahrer hat eine Eigengeschwindigkeit von $4\,\mathrm{m/s}$.
a) Bestimmen Sie Richtung und Betrag der Geschwindigkeit des Kanufahrers aus der Sicht eines ruhenden Beobachters am Ufer.
b) Wie lange benötigt er zur Überquerung des Flusses, wenn dieser 100 m breit ist?
c) Wie weit und in welche Richtung (berg- oder talwärts) wurde er dabei abgetrieben?

Übungen (4) — Lösungen

1) a) Das Weg-Zeit-Diagramm für alle drei 'Verkehrsteilnehmer' hat das nachfolgende Aussehen. Da die drei zu unterschiedlichen Zeiten starten und sogar in unterschiedliche Richtungen fahren, muss man sich bei der Wahl der dargestellten Größen auf einen der drei Beteiligten festlegen. Hier ist s gewählt als die Fahrtstrecke des Radfahrers. Dies ist zugleich die *Entfernung von A-Stadt.* Ebenso beginnt die Zeitskala mit dem Start des Radfahrers; für die beiden anderen gelten spätere Startzeiten. Da alle Bewegungen gleichförmig sind, liegen immer Geraden vor, aber wegen der unterschiedlichen Startzeiten nicht notwendig Ursprungsgeraden. Man markiert also für Start- und Ziel die entsprechenden Punkte im Weg-Zeit-Diagramm und verbindet diese durch eine Gerade. Beim Radfahrer beachtet man die Pause und führt dies für Vor- und Nachmittag getrennt durch. Das Ergebnis sieht etwa folgendermaßen aus.



b,c) i) Die Geschwindigkeiten des Radfahrers auf den Teilstrecken sind leicht ermittelt: Am Vormittag legt er in 3 Stunden 45 km zurück, also hält er eine Geschwindigkeit von $v = \frac{45\,\text{km}}{3\,\text{h}} = 15\,\text{km/h}$ ein. Am Nachmittag beträgt die Geschwindigkeit nur $\frac{30\,\text{km}}{2{,}5\,\text{h}} = 12\,\text{km/h}$.

ii) Man erkennt aus der Skizze, dass sich Radfahrer, PKW und LKW etwa zur gleichen Zeit am Vormittag treffen. Will man genauere Informationen haben, so muss man *rechnerisch* vorgehen. Im folgenden sei s die jeweilige *Entfernung* von A-Stadt und t bezeichne die *Fahrzeit* des *Radfahrers,* also die nach 9^{00} Uhr verstrichene Zeit. Dann gilt für den Radfahrer $s = v_{\text{Rad}} \cdot t$. Entsprechend gilt für den PKW $s = v_{\text{PKW}} \cdot t_{\text{PKW}}$, wobei t_{PKW} die Fahrzeit des PKW ist. Da dieser erst um 10^{30} Uhr startet, ist sie um anderthalb Stunden geringer: $t_{\text{PKW}} = t - 1{,}5\,\text{h}$. Damit erhalten wir

$$\begin{array}{ll} \text{Radfahrer:} & s = 15\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t \\ \text{PKW:} & s = 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot (t - 1{,}5\,\text{h}) \end{array}$$

Um den Treffzeitpunkt zu bestimmen, müssen wir die Gleichung

$$15\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t = s = 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot (t - 1{,}5\,\text{h})$$

lösen. Wir erhalten als Lösung

$$t = \frac{120}{65}\,\mathrm{h} \approx 1,84615\,\mathrm{h} \approx 110,77\,\mathrm{min} \approx 1\mathrm{h}\,50\mathrm{min}\,46\,\mathrm{s}\,.$$

Der PKW überholt den Radfahrer etwa um 10:50:46 Uhr.
Zu diesem Zeitpunkt sind beide $s = 15\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{120}{65}\,\mathrm{h} \approx 27,7\,\mathrm{km}$ von A-Stadt entfernt.

iii) Für die 30 km von C-Stadt nach B-Dorf benötigt der LKW die Zeit

$$t = \frac{s}{v} = \frac{30\,\mathrm{km}}{60\,\mathrm{km/h}} = 1/2\,\mathrm{h} = 30\,\mathrm{min}\,,$$

er passiert B-Dorf also genau um 10^{30} Uhr. Für die weiteren 45 km bis A-Stadt benötigt er dann noch $\frac{45\,\mathrm{km}}{60\,\mathrm{km/h}} = 0,75\,\mathrm{h}$, d. h. eine Dreiviertelstunde; er kommt um 11^{15} Uhr in A-Stadt an.

iv) Um das Treffen des Radfahrers mit dem LKW zu berechnen, stellen wir das Weg-Zeit-Gesetz für den LKW auf. Da dieser von C-Stadt aus startet, *verringert* er seinen ursprünglichen Abstand von 75 km von A-Stadt ständig. Außerdem startet er 1 Stunde nach dem Radfahrer, daher gilt für seinen jeweiligen Abstand von A-Stadt:

$$\text{LKW: } s = 75\,\mathrm{km} - v_{LKW} \cdot t_{LKW} = 75\,\mathrm{km} - 60\,\mathrm{km/h} \cdot (t - 1\,\mathrm{h})\,.$$

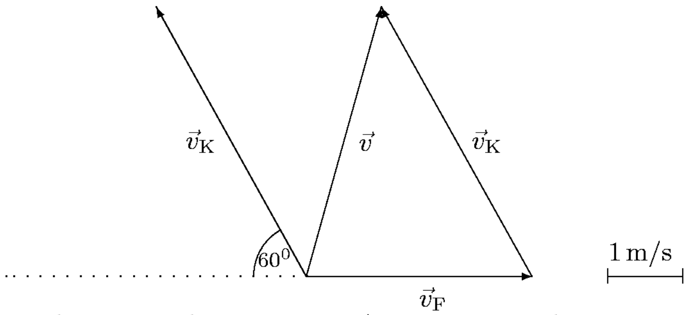
Als Lösung der Gleichung

$$15\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t = 75\,\mathrm{km} - 60\,\mathrm{km/h} \cdot (t - 1\,\mathrm{h})$$

erhalten wir $t = 1,8\,\mathrm{h} = 108\,\mathrm{min}$. Treffzeitpunkt ist daher 10:48 Uhr; die Entfernung des Treffpunktes von A-Stadt beträgt $s = 15\,\mathrm{km/h} \cdot 1,8\,\mathrm{h} = 27\,\mathrm{km}$.

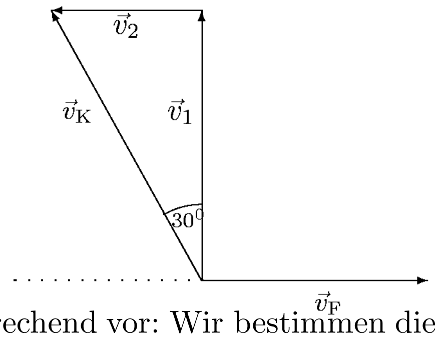
2) a) Da die beiden beteiligten Bewegungsvorgänge (Fluss, Kanu) unterschiedliche *Richtung* haben, kann man die sich ergebende Geschwindigkeit nicht durch einfache Rechenoperationen ermitteln. Das Ergebnis hängt von den Richtungen der beiden Geschwindigkeiten ab: Geschwindigkeit ist eine *gerichtete* oder *vektorielle* physikalische Größe. Diese stellt man durch sog. *Vektoren* dar. Vektoren werden repräsentiert durch Pfeile, die Richtung und Orientierung kennzeichnen und deren Länge den Wert (Betrag) der Größe angibt. Die Lage der Pfeile ist dabei unerheblich, wenn nur *Richtung, Orientierung* und *Länge* unverändert bleiben. So repräsentieren in der nachstehenden Skizze die beiden mit $\vec{v}_\mathrm{K}$ bezeichneten Pfeile den Geschwindigkeitsvektor des Kanufahrers (ohne Berücksichtigung der Flussströmung).

Unter Beachtung der Flussströmung ergibt sich eine Bewegung des Kanus mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ der nachfolgenden Skizze. Diesen erhält man, indem man den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_\mathrm{K}$ des Kanufahrers am *Ende* des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}_\mathrm{F}$ des Flusses (ohne Richtungs-, Orientierungs- oder Längenänderung) 'ansetzt'. Verbindet man nun den Anfang des ersten mit dem Ende des angesetzten zweiten Pfeiles, so erhält man einen neuen Vektor, die *Vektorsumme* $\vec{v} = \vec{v}_\mathrm{F} + \vec{v}_\mathrm{K}$. Dieser Vektor ist nun die tatsächliche Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Kanus. Begründung: In jeder Zeiteinheit wird das Kanu in Richtung $\vec{v}_\mathrm{F}$ abgetrieben, zugleich aber in Richtung $\vec{v}_\mathrm{K}$ bewegt. Das Verhältnis der jeweiligen Strecken entspricht dabei genau dem Verhältnis der Geschwindigkeiten, so dass sich das Kanu zu jedem Zeitpunkt in Richtung von $\vec{v}$ bewegt und dabei die durch die Länge von $\vec{v}$ angegebene Geschwindigkeit einhält.



Nun kann man Richtung und Länge von $\vec{v}$ aus einer sauberen Zeichnung entnehmen. Die obige Zeichnung ergibt z. B. eine Geschwindigkeit von etwa $3,7\,\mathrm{m/s}$ unter einem Winkel von etwa 75^0 mit der Fließrichtung des Flusses. (Bemerkungen zur rechnerischen Bestimmung dieser Größen siehe unten.)

b) Um zu ermitteln, wie lange der Kanufahrer zur Überquerung benötigt, muss man feststellen, mit welcher Geschwindigkeit sich das Kanu *quer* zum Fluss bewegt. Diese Geschwindigkeit v_1 bestimmt man, indem man den Vektor $\vec{v}_\mathrm{K}$ senkrecht auf die Richtung quer zum Fluss *projeziert* (siehe nebenstehende Skizze). Man entnimmt der Skizze $v_1 \approx 3,5\,\mathrm{m/s}$. Bei dieser Geschwindigkeit benötigt der Kanufahrer für die 100 m



$$t = \frac{100\,\mathrm{m}}{3{,}5\,\mathrm{m/s}} \approx 28,6\,\mathrm{s}\,.$$

Beachten Sie, dass v_1 von der Strömung des Flusses *unabhängig* ist!

c) Zur Bestimmung des 'Abtriebs' gehen wir entsprechend vor: Wir bestimmen die Komponente $\vec{v}_2$ von $\vec{v}_\mathrm{K}$ *parallel* zum Fluss. Diese Geschwindigkeit v_2 entnimmt man ebenfalls der obigen Skizze. Man ermittelt etwa $v_2 = 2\,\mathrm{m/s}$ entgegen der Fließrichtung. Da die Fließgeschwindigkeit $v_\mathrm{F} = 3\,\mathrm{m/s}$ beträgt, wird der Kanufahrer mit der Geschwindigkeit $1\,\mathrm{m/s}$ talwärts abgetrieben. Während der Fahrtzeit von $28,6\,\mathrm{s}$ wird er also $28,6\,\mathrm{m}$ abgetrieben.

Die in b) und c) verwendete Methode, die Kanugeschwindigkeit in zwei zueinander *rechtwinklige Geschwindigkeitskomponenten zu zerlegen,* ist von grundsätzlicher Bedeutung! Wie b) und c) zeigen, erleichtert dieses Vorgehen eine Analyse der Einflüsse der beteiligten Bewegungsvorgänge. Zugleich ermöglicht sie aber auch eine rechnerische Lösung aller Aufgabenteile.

Rechnerische Lösung von b) und c): Zur rechnerischen Ermittlung der Geschwindigkeitskomponenten v_1 und v_2 genügen die Definitionen von Sinus und Cosinus: In einem *rechtwinkligen* Dreieck ist das Längenverhältnis von *Gegen*kathete zu Hypotenuse der *Sinus*wert und das von *An*kathete zu Hypotenuse der *Cosinus*wert des betrachteten Winkels. Hier ergibt sich also (siehe obige Skizze)

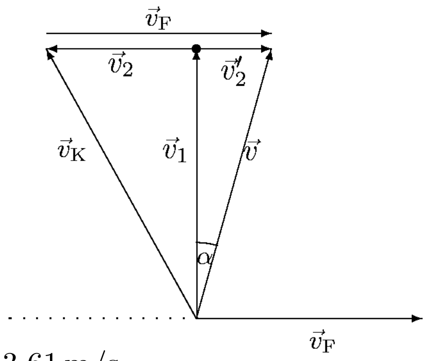
$$\frac{v_1}{v_\mathrm{K}} = \cos(30^0) \quad \text{und} \quad \frac{v_2}{v_\mathrm{K}} = \sin(30^0)\,.$$

Mit Hilfe des Taschenrechners ergeben sich so die Werte

$$v_1 = \cos(30^0) \cdot v_\mathrm{K} \approx 3,46\,\mathrm{m/s}\,,\ v_2 = \sin(30^0) \cdot v_\mathrm{K} = 2\,\mathrm{m/s}\,.$$

Mit diesen exakteren Werten arbeitet man dann wie oben weiter.

Rechnerische Lösung von a): Aus den beiden Geschwindigkeitskomponenten kann man auch die in a) gesuchte Geschwindigkeit $\vec{v}$ (in Betrag und Richtung) exakt ermitteln. Durch die Strömung des Flusses ändert sich nur die Komponente v_2 zu $v_2' = v_\mathrm{F} - v_2 = 1\,\mathrm{m/s}$, während die Komponente v_1 unverändert bleibt. Der Betrag v der Geschwindigkeit ergibt sich dann aus dem Satz des Pythagoras



$$v = \sqrt{v_1^2 + {v_2'}^2} = \sqrt{13}\,\mathrm{m/s} \approx 3{,}61\,\mathrm{m/s}\,,$$

während man den Winkel wieder mit den trigonometrischen Funktionen ermittelt. Am besten verwendet man den Tangens: In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Längenverhältnis von Gegenkathete zu Ankathete der *Tangens* des betrachteten Winkels. Dies ergibt mit den Bezeichnungen der Skizze

$$\tan(\alpha) = \frac{v_2'}{v_1}\,,\ \alpha = \arctan(\frac{v_2'}{v_1}) \approx 16,1^0\,.$$

Die Richtung von $\vec{v}$ bildet also mit der Fließrichtung einen Winkel von $90^0 - 16,1^0 = 73,9^0$.