Übungen (1)

1) Bestimmen Sie mit Hilfe der Teilbarkeitskriterien möglichst viele Teiler der nachfolgenden Zahlen. Von welchen Zahlen können Sie ausschließen, dass sie Teiler sind?
   $a = 553\,637\,225\,625$, $b = 456\,377\,651\,976$, $c = 239\,598\,267\,287\,400$.
2) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegungen der folgenden natürlichen Zahlen:
   $a = 198$ $b = 544$ $c = 1024$
   $d = 2160$ $e = 24750$ $f = 26 \cdot 13^2 \cdot 98 \cdot 170$
   $g = 25^4 \cdot 16^2$ $h = 39^3 \cdot 37^4 \cdot 27^5$
3) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von
   a) 27, 39 b) 10000, 500 c) 17, 3433
   d) 6, 8, 12 e) 9, 30, 50 f) 34, 85, 153
   g) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 11$, $2^3 \cdot 3^4 \cdot 13$ h) $6^3 \cdot 28$, $21^2 \cdot 27$ i) $25^3 \cdot 27$, $32 \cdot 18$
4) Bestimmen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache von
   a) 12, 8 b) 18, 24 c) 12, 20, 30
   d) 2, 3, 4, 5, 6 e) 39, 34 f) 16, 25
   g) $2^3 \cdot 3 \cdot 17$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ h) $17 \cdot 39$, $34 \cdot 26$ i) $2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^8$, $3^{12} \cdot 5^{12}$
5) Stellen Sie die nachfolgenden Zahlen als Produkte von Potenzen mit möglichst kleinen Basen dar:
   $a = 6^{10} \cdot 10^4 \cdot 15^5$, $b = 12^5 \cdot 24^7 \cdot 75^3$, $c = 54^4 \cdot 48^5 \cdot 250^5$, $d = 12^6 \cdot 15^7 \cdot 30^2$.
   Stellen Sie fest, welche Teilbarkeiten zwischen diesen Zahlen bestehen.
6) Zeigen Sie, dass die folgenden Zahlen Potenzen sind. Mit welcher Basis und welchem Exponenten?
   $a = 14^4 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 6^6 \cdot 21^3$, $b = 49^2 \cdot 51^3 \cdot 75 \cdot 17 \cdot 5^2$, $c = 10^4 \cdot 22^5 \cdot 80 \cdot 2^2$.
7) Gegeben sind drei natürliche Zahlen in dualer Darstellung:
   $a = 10101$, $b = 11111$, $c = 1000001$.
   a) Berechnen Sie (durch schriftliche Rechnung im Dualsystem) $d = b + c$, $e = c - a$ und $f = a \cdot b$.
   b) Stellen Sie alle 6 Zahlen a, b, c, d, e, f dezimal dar und überprüfen Sie Ihre Rechnungen.
8) Stellen Sie die folgenden (in üblicher dezimaler Form angegebenen) Zahlen dual dar:
   a) 1 bis 9 b) 314 c) 128 d) 255 e) 1000
   f) 500 g) 250 h) 13 i) 26 j) 52
9) a) Wandeln Sie die Zahlen $a, \ldots, f$ von Aufgabe 7) ins Hexadezimalsystem um. Überprüfen Sie in dieser neuen Darstellung die Beziehungen $d = b + c$, $e = c - a$ und $f = a \cdot b$.
   b) Erläutern Sie die Vor- und Nachteile der Rechnungen *innerhalb* des Dual-, Dezimal- und Hexadezimalsystems.

Übungen (1) — Lösungen

1) a ist nicht durch 2 (oder irgendeine gerade Zahl) teilbar;
a ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar (da die Quersumme durch 3, aber nicht durch 9 teilbar ist);
a ist durch 125 (und daher erst recht durch 25 und 5) teilbar, da die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl 625 durch 125 teilbar ist;
a ist durch 11 teilbar (da die Wechselsumme $5-2+6-5+2-2+7-3+6-3+5-5 = 11$ durch 11 teilbar ist).
b ist durch 8 teilbar (da $976 = 800 + 160 + 16$ durch 8 teilbar ist);
b ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar (Quersumme 66);
b ist nicht durch 5 teilbar;
b ist nicht durch 11 teilbar (Wechselsumme 4).
c ist durch 8, 9 und 25 teilbar; c ist nicht durch 11 teilbar.

2) $a = 198 = 2 \cdot 99 = 2 \cdot 9 \cdot 11 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$,
$b = 544 = 4 \cdot 136 = 2^2 \cdot 2 \cdot 68 = 2^3 \cdot 4 \cdot 17 = 2^5 \cdot 17$,
$c = 1024 = 2^{10}$,
$d = 10 \cdot 216 = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 24 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$,
$e = 10 \cdot 5 \cdot 495 = 2 \cdot 5^2 \cdot 5 \cdot 99 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11$,
$f = 2 \cdot 13 \cdot 13^2 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 10 \cdot 17 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13^3 \cdot 7^2 \cdot 17$,
$g = (5^2)^4 \cdot (2^4)^2 = 5^8 \cdot 2^8$,
$h = (3 \cdot 13)^3 \cdot 37^4 \cdot (3^3)^5 = 3^{18} \cdot 13^3 \cdot 37^4$.

3) a) $\mathrm{ggT}(27, 39) = \mathrm{ggT}(3^3, 3 \cdot 13) = 3$.
b) $\mathrm{ggT}(10000, 500) = 500$.
c) $\mathrm{ggT}(17, 3433) = 1$, da 17 eine Primzahl ist und 3433 nicht teilt.
d) $\mathrm{ggT}(6, 8, 12) = \mathrm{ggT}(2 \cdot 3, 2^3, 2^2 \cdot 3) = 2$.
e) $\mathrm{ggT}(9, 30, 50) = 1$, da $9 = 3^2$ und 3 kein Teiler von 50 ist.
f) $\mathrm{ggT}(34, 85, 153) = \mathrm{ggT}(2 \cdot 17, 5 \cdot 17, 9 \cdot 17) = 17$.
g) $\mathrm{ggT}(2^4 \cdot 3^3 \cdot 11, 2^3 \cdot 3^4 \cdot 13) = 2^3 \cdot 3^3 = 216$.
h) $\mathrm{ggT}(6^3 \cdot 28, 21^2 \cdot 27) = \mathrm{ggT}(2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 7, 3^2 \cdot 7^2 \cdot 3^3) = \mathrm{ggT}(2^5 \cdot 3^3 \cdot 7, 3^5 \cdot 7^2) = 3^3 \cdot 7 = 189$.
i) $\mathrm{ggT}(25^3 \cdot 27, 32 \cdot 18) = \mathrm{ggT}(5^6 \cdot 3^3, 2^5 \cdot 2 \cdot 3^2) = 3^2 = 9$.

4) a) $\mathrm{kgV}(12, 8) = \mathrm{kgV}(2^2 \cdot 3, 2^3) = 2^3 \cdot 3 = 24$.
b) $\mathrm{kgV}(18, 24) = \mathrm{kgV}(2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.
c) $\mathrm{kgV}(12, 20, 30) = \mathrm{kgV}(2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.
d) $\mathrm{kgV}(2, 3, 4, 5, 6) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
e) $\mathrm{kgV}(39, 34) = 39 \cdot 34 = 1326$, da 39 und 34 keinen Primteiler gemeinsam haben (teilerfremd sind).
f) $\mathrm{kgV}(16, 25) = 16 \cdot 25 = 400$, da 16 und 25 teilerfremd sind.
g) $\mathrm{kgV}(2^3 \cdot 3 \cdot 17, 2^2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 2040$.
h) $\mathrm{kgV}(17 \cdot 39, 24 \cdot 26) = \mathrm{kgV}(3 \cdot 13 \cdot 17, 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13) = 2^4 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 = 10608$
i) $\mathrm{kgV}(2^{10} \cdot 3^3 \cdot 2^8 \cdot 5^8, 3^{12} \cdot 5^{12}) = \mathrm{kgV}(2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5^8, 3^{12} \cdot 5^{12}) = 2^{18} \cdot 3^{12} \cdot 5^{12} = 2^6 \cdot 3^{12} \cdot (2 \cdot 5)^{12} = 34012224 \cdot 10^{12} = 34012224000000000000$.

5) $a = 6^{10} \cdot 10^4 \cdot 15^5 = (2 \cdot 3)^{10} \cdot (2 \cdot 5)^4 \cdot (3 \cdot 5)^5 = 2^{10+4} \cdot 3^{10+5} \cdot 5^{4+5} = 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^9$.
$b = 12^5 \cdot 24^7 \cdot 75^3 = (2^2 \cdot 3)^5 \cdot (2^3 \cdot 3)^7 \cdot (3 \cdot 5^2)^3 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 2^{21} \cdot 3^7 \cdot 3^3 \cdot 5^6 = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^6$.
$c = 54^4 \cdot 48^5 \cdot 250^5 = (2 \cdot 3^3)^4 \cdot (2^4 \cdot 3)^5 \cdot (2 \cdot 5^3)^5 = 2^{4+20+5} \cdot 3^{12+5} \cdot 5^{15} = 2^{29} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$.
$d = 12^6 \cdot 15^7 \cdot 30^2 = (2^2 \cdot 3)^6 \cdot (3 \cdot 5)^7 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^9$.

Offenbar ist $d = a$, insbesondere teilen sich a und d *gegenseitig.*
a teilt c, weil die Exponenten in der Darstellung von a *sämtlich* kleiner oder gleich den entsprechenden Exponenten in der Darstellung von c sind. b ist weder Teiler noch Vielfaches einer der anderen Zahlen.

6) $a = 2^4 \cdot 7^4 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 2^6 \cdot 3^6 \cdot 3^3 \cdot 7^3 = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 7^{10} = 42^{10}$,
$b = 7^4 \cdot 3^3 \cdot 17^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 5^2 = 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 17^4 = (3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17)^4 = 1785^4$,
$c = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^5 \cdot 11^5 \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot 2^2 = 2^{15} \cdot 5^5 \cdot 11^5 = 8^5 \cdot 5^5 \cdot 11^5 = 440^5$.
Die Frage, ob eine natürliche Zahl eine Potenz ist, kann man also an der Primzerlegung ablesen.

- Eine natürliche Zahl ist genau dann k-te Potenz einer natürlichen Zahl, wenn in ihrer Primzerlegung *alle* Exponenten Vielfache von k sind.