

Übungen (2)

- 1) Beschreiben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form:
 - a) die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen,
 - b) die Menge der zweistelligen durch sieben teilbaren Zahlen,
 - c) die Menge T_{60} der Teiler von 60,
 - d) die Menge der arabischen Ziffern,
 - e) die Menge der Zweierpotenzen.
 Welche der Mengen sind endlich, welche unendlich?
- 2) Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch eine charakteristische Eigenschaft:
 - a) $A = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$,
 - b) $B = \{10, 100, 1000, 10000, \dots\}$,
 - c) $C = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$,
 - d) $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
 - e) $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$,
 - f) $F = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$.
- 3) Es sei Q die Menge der Quadratzahlen und \mathcal{P} die Menge der Primzahlen.
 - a) Geben Sie an, welche der folgenden Zahlen

1, 4, 5, 6, 9, 12, 24, 25, 27, 1234544554355

zu diesen Mengen gehören und welche nicht. Verwenden Sie dabei die mathematischen Symbole \in und \notin .

- b) Welche Zahlen gehören zu beiden Mengen?
- 4) Berechnen Sie:
 - a) $(8 - 4) + (7 - 8) - (-6 + 9)$
 - b) $(-3)(16 - 18) - (17 - 19)(-4) - (34 - 28)(22 - 28)$
 - c) $(x - y) + (3x - 7y) - (4x + 5y)$
 - d) $(-4x) \cdot 7x$
 - e) $(-3x) \cdot 6y \cdot (-4x)$
 - f) $(-x)(2x + y) + (3x - y)(-y) - (4x + 4y) \cdot 6y$
- 5) a) Definieren Sie den Betrag $|x|$ einer Zahl x .
 Berechnen Sie:
 - b) $|-7|$
 - c) $|7 - 12|$
 - d) $|(13 - 24)(7 - 12)|$
- 6) Lösen Sie Klammern auf und fassen Sie zusammen:
 - a) $(5x - 6y) - (3x - 7y)$
 - b) $(3p - 4q) - (-5p + 7q) + (-9p - 10q)$
 - c) $8(7u - v) - 12(4u - 5v)$
 - d) $-5r(6k - 7r) - 6k(-5r + 6k)$

Übungen (2) — Lösungen

- 1) a) $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$,
 b) $\{14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$,
 c) $T_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$,
 d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 e) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots\}$.
 Die Mengen unter a) und e) sind unendlich, die anderen endlich.
- 2) a) A ist die Menge der Vielfachen von 4.
 b) B ist die Menge der Potenzen von 10.
 c) C ist die Menge der durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen.
 d) D ist die Menge der Teiler von 12.
 e) E soll die Menge aller Primzahlen darstellen, und
 f) F die Menge aller Quadrate von natürlichen Zahlen.
- 3) a) Von der letzten Zahl 1234544554355 abgesehen gilt:

$$1 \in Q, 4 \in Q, 5 \notin Q, 6 \notin Q, 9 \in Q, 12 \notin Q, 24 \notin Q, 25 \in Q, 27 \notin Q, \\ 1 \notin P, 4 \notin P, 5 \in P, 6 \notin P, 9 \notin P, 12 \notin P, 24 \notin P, 25 \notin P, 27 \notin P.$$

Schließlich gilt:

$$1234544554355 \notin Q, 1234544554355 \notin P.$$

Zur Begründung: Diese Zahl ist offensichtlich durch 5 teilbar, aber von 5 verschieden, ist also keine Primzahl. Wäre sie eine Quadratzahl, so müßte sie nicht nur durch 5, sondern dann sogar durch 25 teilbar sein. Dies ist aber nicht der Fall, weil die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl nicht durch 25 teilbar ist. Also kann 1234544554355 keine Quadratzahl sein.

- b) Keine. (Eine Quadratzahl kann keine Primzahl sein.)
- 4) a) $(8 - 4) + (7 - 8) - (-6 + 9) = 4 - 1 - 3 = 0$.
 b) $(-3)(16 - 18) - (17 - 19)(-4) - (34 - 28)(22 - 28) =$
 $= (-3)(-2) - (-2)(-4) - 6(-6) = 6 - 8 + 36 = 34$.
 c) $(x - y) + (3x - 7y) - (4x + 5y) = x - y + 3x - 7y - 4x - 5y = -13y$.
 d) $(-4x) \cdot 7x = -28x^2$.
 e) $(-3x) \cdot 6y \cdot (-4x) = 72x^2y$.
 f) $(-x)(2x + y) + (3x - y)(-y) - (4x + 4y) \cdot 6y =$
 $= -2x^2 - xy - 3xy + y^2 - 24xy - 24y^2 = -2x^2 - 28xy - 23y^2$.
- 5) a) Anschaulich gesprochen ist der Betrag $|x|$ einer rationalen Zahl x der Abstand von der 0. Dies bedeutet, für positive Zahlen ist der Betrag gleich der Zahl selbst, während für negative Zahlen der Betrag genau die Gegenzahl ist:
 $|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$
 b) $|-7| = 7$, c) $|7 - 12| = 5$, d) $|(13 - 24)(7 - 12)| = 55$.
- 6) a) $(5x - 6y) - (3x - 7y) = 2x + y$.
 b) $(3p - 4q) - (-5p + 7q) + (-9p - 10q) =$
 $= 3p - 4q + 5p - 7q - 9p - 10q = -p - 21q$.
 c) $8(7u - v) - 12(4u - 5v) = 56u - 8v - 48u + 60v = 8u + 52v$.
 d) $-5r(6k - 7r) - 6k(-5r + 6k) = -30kr + 35r^2 + 30kr - 36k^2 = 35r^2 - 36k^2$.