

## Übungen (3)

1) Schreiben Sie die folgenden Terme als Produkt, indem Sie 'ausklammern':

a)  $4x^2y - 6xy + 12xy^3 - 24x^2y^2 =$

b)  $3pq^2 + 6p^2q^3 - 6p^3q^2 - 3p^2q^2 =$

c)  $17a^2b + 7ab - 24a^2b - 14a^3b =$

d)  $4a^3b^2z - 2ab^3z^2 + 10a^2bz^2 =$

e)  $a(x - 3) + b(x - 3) =$

f)  $3(x - 1)^2y - 9a(x - 1)^3y + 6(x - 1)^2y^3 =$

g)  $(u + v) - b(u + v) =$

h)  $a(x - y) + (x - y)^2 =.$

2) a) Formulieren Sie das Distributivgesetz.

b) Folgern Sie daraus die Regel:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:

c)  $(2a + 3b)(c + d) =$

d)  $(9x - 5y)(7x - 6y) =$

e)  $(x - 4)(x - 5) =$

f)  $(x + y)(x - y)(2x + y) =$

g)  $(2a - 3b)(-2b - 3a) =$

h)  $(4b^2 - 3b)(b - 2b^2) =$

i)  $(9x - 5y)(7y - 6x) =$

j)  $(a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4) =$

k)  $(a + b)(a - b) =$

3) Lösen Sie Klammern auf und fassen Sie zusammen:

a)  $(x + y)^2 =$

b)  $(x + y)^3 =$

c)  $(x + y)^4 =$

d)  $(a + b + c)^2 =$

e)  $(a - b + c)^2 =$

f)  $(x - 3)^2(x - 4) =$

g)  $(3x + 2y - z)^2 =$

4) Vereinfachen Sie:

a)  $(x - y)^2 + (x + y)^2 =$

b)  $(x + y)^2 - (x - y)^2 =$

c)  $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 - x) =$

d)  $(1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5)(1 + a) =$

e) Was vermuten Sie aufgrund Ihrer Ergebnisse bei c) und d) allgemein?

## Übungen (3) — Lösungen

- 1) a)  $4x^2y - 6xy + 12xy^3 - 24x^2y^2 = 2xy(2x - 3 + 6y^2 - 12xy)$ .  
 b)  $3pq^2 + 6p^2q^3 - 6p^3q^2 - 3p^2q^2 = 3pq^2(1 + 2pq - 2p^2 - p)$ .  
 c)  $17a^2b + 7ab - 24a^2b - 14a^3b = -7a^2b + 7ab - 14a^3b = 7ab(-a + 1 - 2a^2)$ .  
 d)  $4a^3b^2z - 2ab^3z^2 + 10a^2bz^2 = 2abz(2a^2b - b^2z + 5az)$ .  
 e)  $a(x - 3) + b(x - 3) = (a + b)(x - 3)$ .  
 f)  $3(x - 1)^2y - 9a(x - 1)^3y + 6(x - 1)^2y^3 = 3(x - 1)^2y(1 - 3a(x - 1) + 2y^2) = 3(x - 1)^2y(1 + 3a - 3ax + 2y^2)$ .  
 g)  $(u + v) - b(u + v) = (1 - b)(u + v)$ .  
 h)  $a(x - y) + (x - y)^2 = (a + (x - y))(x - y) = (a + x - y)(x - y)$ .
- 2) a) Es gilt für alle Zahlen  $x, y, z$ :  $x(y + z) = xy + xz$ .  
 b)  $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$ .  
 c)  $(2a + 3b)(c + d) = 2ac + 2ad + 3bc + 3bd$ .  
 d)  $(9x - 5y)(7x - 6y) = 63x^2 - 54xy - 35xy + 30y^2 = 63x^2 - 89xy + 30y^2$ .  
 e)  $(x - 4)(x - 5) = x^2 - 5x - 4x + 20 = x^2 - 9x + 20$ .  
 f)  $(x + y)(x - y)(2x + y) = (x^2 - y^2)(2x + y) = 2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3$ .  
 g)  $(2a - 3b)(-2b - 3a) = -4ab - 6a^2 + 6b^2 + 9ab = -6a^2 + 5ab + 6b^2$ .  
 h)  $(4b^2 - 3b)(b - 2b^2) = 4b^3 - 8b^4 - 3b^2 + 6b^3 = -8b^4 + 10b^3 - 3b^2$ .  
 i)  $(9x - 5y)(7y - 6x) = 63xy - 54x^2 - 35y^2 + 30xy = -54x^2 + 93xy - 35y^2$ .  
 j)  $(a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4) = a^4 - 2a^3 + 4a^2 + 2a^3 - 4a^2 + 8a + 4a^2 - 8a + 16 = a^4 + 4a^2 + 16$ .  
 k)  $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$ .
- 3) a)  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ,  
 b)  $(x + y)^3 = (x^2 + 2xy + y^2)(x + y) = x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ ,  
 c)  $(x + y)^4 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x + y) = \dots = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ .  
 d)  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ ,  
 e)  $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$ .  
 f)  $(x - 3)^2(x - 4) = (x^2 - 6x + 9)(x - 4) = x^3 - 10x^2 + 33x - 36$ .  
 g)  $(3x + 2y - z)^2 = 9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz$ .
- 4) a)  $(x - y)^2 + (x + y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$ .  
 b)  $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = 2xy + 2xy = 4xy$ .  
 c)  $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6 = 1 - x^6$ .  
 d)  $(1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5)(1 + a) = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a - a^2 + a^3 - a^4 + a^5 - a^6 = 1 - a^6$ .

Wir bemerken, dass diese Formel ein Spezialfall von c) ist; setzt man nämlich in c) für  $x$  den Term  $-a$  ein, so erhält man

$$(1 + (-a) + (-a)2 + (-a)^3 + (-a)^4 + (-a)^5)(1 - (-a)) = (1 - (-a)^6), \text{ also}$$

$$(1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5)(1 + a) = (1 - a^6).$$

e) In Verallgemeinerung von c) gilt für alle natürlichen Exponenten  $n$ :

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}. \quad (*)$$

Eine Verallgemeinerung von d) erhält man, indem man wieder  $x$  durch  $-a$  ersetzt.