Übungen (4)

1) a) Was versteht man unter Erweitern und Kürzen einer Bruchzahl? Was ändert sich dabei, was ändert sich nicht?
   b) Begründen Sie: $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.
   c) Welche weiteren Rechenregeln mit Vorzeichen kennen Sie bei Bruchzahlen?
2) a) Wiederholen Sie das Kriterium für die Gleichheit von Brüchen.
   b) Ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ heißt (vollständig) *gekürzt,* wenn $b > 0$ ist und a, b teilerfremd sind. Zeigen Sie: Zwei gekürzte Brüche können nur dann dieselbe Bruchzahl darstellen, wenn sowohl ihre Zähler als auch ihre Nenner übereinstimmen, m. a. W. wenn die beiden Brüche *identisch* sind.
3) Berechnen Sie die folgenden Bruchzahlen:
   a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{-3} =$
   b) $3 \cdot \frac{2}{9} - \frac{-3}{-2} =$
   c) $\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} : \frac{3}{18} =$
   d) $\frac{7}{9} : (\frac{7}{18} + \frac{2}{9}) + \frac{-2}{7} =$
4) Berechnen Sie die folgenden Bruchterme:
   a) $\frac{2x - y}{x - 1} + \frac{y - 2x}{x + 1} =$
   b) $\frac{x - y}{y - x} =$
   c) $\frac{(x - a)(x^2 + a^2)(x + a)}{(x^2 - a^2)(x + a)^2} =$
   d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} =$
   e) $\frac{x + y}{\frac{x-y}{x^2-y^2}} =$
   f) $\frac{\frac{x+y}{x-y}}{x^2 - y^2} =$
   g) $\frac{x - y}{x + y} + \frac{x + y}{x - y} =$
   h) $\frac{\frac{x^2-y^2}{x-y}}{\frac{x+y}{x-y}} =$

Übungen (4) — Lösungen

1) a) Einen Bruch *erweitern* heißt Zähler und Nenner mit derselben Zahl $\neq 0$ mupltiplizieren; einen Bruch *kürzen* heißt Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl $\neq 0$ teilen. Dabei ändern sich zwar Zähler und Nenner des Bruches, nicht aber die Bruch*zahl.*
b) Die beiden Brüche entstehen auseinander durch Erweitern mit -1 und stellen daher dieselbe Bruchzahl dar.
c) Es gilt
$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}\,.$$

2) a) Es gilt
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{genau dann, wenn} \quad ad = bc\,.$$
b) Selbstverständlich stellen identische Brüche dieselbe Zahl dar. Seien nun umgekehrt zwei Brüche wie in a) gegeben, die dieselbe Zahl darstellen. Also gilt mit den Bezeichnungen aus a): $ad = bc$. Sind nun beide Brüche zusätzlich gekürzt, so gilt $b, d > 0$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(c, d) = 1$. Aus $ad = bc$ folgt, daß b ein Teiler von ad ist. Da a und b teilerfremd sind, muß b ein Teiler von d sein. Umgekehrt erhält man genauso $d \mid b$. Für zwei positive Zahlen bedeutet dies aber Gleichheit: $b = d$. Damit gilt dann $ad = bc \iff ab = bc \iff a = c$. Insgesamt sind somit die beiden gegebenen Brüche identisch.

3) Ergebnisse:

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{-3} = -\frac{1}{6}$

b) $3 \cdot \frac{2}{9} - \frac{-3}{-2} = -\frac{5}{6}$

c) $\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} : \frac{3}{18} = 1$

d) $\frac{7}{9} : (\frac{7}{18} + \frac{2}{9}) + \frac{-2}{7} = \frac{76}{77}$

4) Ergebnisse:

a) $\frac{2x-y}{x-1} + \frac{y-2x}{x+1} = \frac{4x-2y}{x^2-1}$

b) $\frac{x-y}{y-x} = -1$

c) $\frac{(x-a)(x^2+a^2)(x+a)}{(x^2-a^2)(x+a)^2} = \frac{x^2+a^2}{(x+a)^2}$

d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+x}$

e) $\frac{x+y}{\frac{x-y}{x^2-y^2}} = (x+y)^2$

f) $\frac{\frac{x+y}{x-y}}{x^2-y^2} = \frac{1}{(x-y)^2}$

g) $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} = \frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}$

h) $\frac{\frac{x^2-y^2}{x-y}}{\frac{x+y}{x-y}} = x - y$