Übungen (5)

1) Berechnen Sie (ohne Taschenrechner):

a) $2^{-4} =$

b) $3^{-3} =$

c) $5^{-2} =$

d) $2^{-5} =$

e) $\dfrac{2^{-4}}{3^{-2}} =$

f) $\dfrac{3^{-2} \cdot 2^4 \cdot 3^3}{2^{-2} \cdot 3^4 \cdot 2^3} =$

g) $(\dfrac{2}{3})^{-2} \cdot (\dfrac{3}{4})^{-3} \cdot \dfrac{3^{-2}}{2^3} =$

2) Berechnen Sie (ohne Taschenrechner) und stellen Sie das Ergebnis als Bruch und ohne negative Exponenten dar:

a) $3^{-99} - 2 \cdot 3^{-100} =$

b) $(2^{-100} - 2^{-99}) \cdot 2^{100} =$

c) $\dfrac{2^{-199} - 2^{-200}}{2^{-201} - 2^{-200}} =$

d) $\dfrac{5^{-99} + 5^{-100}}{5^{-100}}$

3) Berechnen Sie durch Ausmultiplizieren und Anwendung der Potenzgesetze:

a) $(2^{1302} + 2^{1300})(2^{-1301} - 2^{-1300}) =$

b) $(3^{-201} - 3^{-200})(3^{201} - 3^{200}) =$

c) $3^{100} \cdot (3^{-99} - 3^{-100}) =$

4) Stellen Sie die folgenden Terme ohne negative Exponenten dar:

a) $\dfrac{x^{-3}y^2z^{-2}}{x^2y^3z^{-3}} =$

b) $\dfrac{a^{-2}b^{-3}c^4}{a^{-4}b^2c^2} =$

c) $\dfrac{x^{-3}(yz)^{-3}}{(xy)^2z^{-2}} =$

d) $x^2y^{-2}z^3 \cdot x^{-3}y^{-5}z^{-2} =$

Übungen (5) — Lösungen

1) Ergebnisse:

a) $\frac{1}{16}$, b) $\frac{1}{27}$, c) $\frac{1}{25}$, d) $\frac{1}{32}$, e) $\frac{3^2}{2^4} = \frac{9}{16}$,

f) $\frac{2^4 \cdot 3}{3^4 \cdot 2} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$,

g) $\frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdot \frac{1}{3^2 \cdot 2^3} = \frac{3^2 \cdot 2^6}{2^2 \cdot 3^5 \cdot 2^3} = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27}$.

2) Weg 1: Definition der Potenzen mit negativen Exponenten einsetzen und Bruchrechnung anwenden:

a) $3^{-99} - 2 \cdot 3^{-100} = \frac{1}{3^{99}} - \frac{2}{3^{100}} = \frac{3}{3^{100}} - \frac{2}{3^{100}} = \frac{1}{3^{100}}$,

b) $(2^{-100} - 2^{-99}) \cdot 2^{100} = \left(\frac{1}{2^{100}} - \frac{1}{2^{99}}\right) \cdot 2^{100} = \left(\frac{1}{2^{100}} - \frac{2}{2^{100}}\right) \cdot 2^{100} = -1$,

c) $\frac{2^{-199} - 2^{-200}}{2^{-201} - 2^{-200}} = \frac{\frac{1}{2^{199}} - \frac{1}{2^{200}}}{\frac{1}{2^{201}} - \frac{1}{2^{200}}} = \frac{\frac{2-1}{2^{200}}}{\frac{1-2}{2^{201}}} = \frac{1}{2^{200}} \cdot \frac{2^{201}}{-1} = -2$,

d) $\frac{5^{-99} + 5^{-100}}{5^{-100}} = \frac{\frac{1}{5^{99}} + \frac{1}{5^{100}}}{\frac{1}{5^{100}}} = \left(\frac{5}{5^{100}} + \frac{1}{5^{100}}\right) \cdot \frac{5^{100}}{1} = 6$.

Weg 2: Potenzgesetze anwenden, indem man die Potenz mit niedrigstem Exponenten ausklammert oder mit passender Potenz erweitert oder ausmultipliziert:

a) $3^{-99} - 2 \cdot 3^{-100} = 3^{-100} \cdot (3^1 - 2) = 3^{-100} = \frac{1}{3^{100}}$,

b) $(2^{-100} - 2^{-99}) \cdot 2^{100} = 2^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1$,

c) $\frac{2^{-199} - 2^{-200}}{2^{-201} - 2^{-200}} = \frac{(2^{-199} - 2^{-200}) \cdot 2^{200}}{(2^{-201} - 2^{-200}) \cdot 2^{200}} = \frac{2-1}{2^{-1} - 1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$,

d) $\frac{5^{-99} + 5^{-100}}{5^{-100}} = (5^{-99} + 5^{-100}) \cdot 5^{100} = 5^1 + 1 = 6$.

Ich glaube, man erkennt deutlich die Vorteile des 2. Weges: Die Anwendung der Potenzgesetze vermeidet Doppelbrüche und ersetzt weitgehend die Bruchrechnung.

3) a) $(2^{1302} + 2^{1300})(2^{-1301} - 2^{-1300}) = 2^1 - 2^2 + 2^{-1} - 2^0 = 2 - 4 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$

b) $(3^{-201} - 3^{-200})(3^{201} - 3^{200}) = 3^0 - 3^{-1} - 3^1 + 3^0 = 1 - \frac{1}{3} - 3 + 1 = -\frac{4}{3}$

c) $3^{100} \cdot (3^{-99} - 3^{-100}) = 3^1 - 3^0 = 2$

4) Wir wenden die Potenzgesetze an: $a^k a^l = a^{k+l}$, $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$, $a^k b^k = (ab)^k$:

a) $\frac{x^{-3}y^2z^{-2}}{x^2y^3z^{-3}} = x^{-3-2}y^{2-3}z^{-2-(-3)} = x^{-5}y^{-1}z^1 = \frac{z}{x^5y}$,

b) $\frac{a^{-2}b^{-3}c^4}{a^{-4}b^2c^2} = a^{-2-(-4)}b^{-3-2}c^{4-2} = a^2b^{-5}c^2 = \frac{a^2c^2}{b^5}$,

c) $\dfrac{x^{-3}(yz)^{-3}}{(xy)^2 z^{-2}} = \dfrac{x^{-3}y^{-3}z^{-3}}{x^2y^2z^{-2}} = x^{-3-2}y^{-3-2}z^{-3-(-2)} = x^{-5}y^{-5}z^{-1} = \dfrac{1}{x^5y^5z}$,

d) $x^2y^{-2}z^3 \cdot x^{-3}y^{-5}z^{-2} = x^{2+(-3)}y^{-2+(-5)}z^{3+(-2)} = x^{-1}y^{-7}z^1 = \dfrac{z}{xy^7}$.