## Übungen (6)

Lösen Sie die nachfolgenden (Un)Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen:

1) $3(x-2) = 4x + 7$
2) $8z - (5 - z) = 4(2 - 3z)$
3) $9x = 13 + (6x - 13)$
4) $8(3z - 20) = 4(6z - 40)$
5) $(x-3)(x-5) > (x-2)(x-6)$
6) $5(3x-1) = 3(5x-2)$
7) $(x+6)(x+1) < (x+2)(x+4)$
8) $(2x-4)(x+5) > (x-3)(2x+5)$
9) $(4-3x)(4x-7) \leq (2x+5)(7-6x)$
10) $x(x-3) = x(2x+5)$

Übertragen Sie die nachfolgenden Fragen zunächst in (Un)Gleichungen für die gesuchte(n) Zahl(en). Formulieren Sie diesen *Ansatz* so dicht wie möglich am Text der Aufgabe. Beantworten Sie dann die gestellten Fragen.

11) Von welcher Zahl ist das 3-fache um 4 größer als das 5-fache?
12) Bei welchen 5 aufeinanderfolgenden Zahlen ist die Summe viermal so groß wie die Summe der beiden kleinsten dieser Zahlen?

Lösen Sie die folgenden (Un)Gleichungen mit Formvariablen (*Parametern*).

13) a) $3x + 4a = 5x + 8a$, b) $(x+a)(a-2) < (x-a)(a+2)$.
14) $(x-a)(a+2) + 4a = 2(x-a)$
15) $6(4x+a) = 8(3x+a)$
16) a) $ax = a$, b) $ax = 1$.
17) a) $ax < a$, b) $a^2x < a^2$, c) $ax < x$

## Übungen (6) — Lösungen

1)
$$\begin{aligned} & 3x-6 = 4x+7 \quad \mid -3x-7 \\ \iff & -13 = x \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{-13\}$

2)
$$\begin{aligned} & 8z-(5-z) = 4(2-3z) \\ \iff & 9z-5 = 8-12z \quad \mid +12z+5 \\ \iff & 21z = 13 \quad \mid :21 \\ \iff & z = \tfrac{13}{21} \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{\frac{13}{21}\}$

3)
$$\begin{aligned} & 9x = 13+(6x-13) \\ \iff & 9x = 6x \quad \mid -6x \\ \iff & 3x = 0 \quad \mid :3 \\ \iff & x = 0 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{0\}$

4)
$$\begin{aligned} & 8(3z-20) = 4(6z-40) \\ \iff & 24z-160 = 24z-160 \quad \mid -24z+160 \\ \iff & 0 = 0 \end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung wahr ist, ist (wegen der Äquivalenz) auch die erste immer wahr. Das bedeutet, alle Zahlen sind Lösungen: $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.

5)
$$\begin{aligned} & (x-3)(x-5) > (x-2)(x-6) \\ \iff & x^2-3x-5x+15 > x^2-2x-6x+12 \quad \mid -x^2 \\ \iff & -8x+15 > -8x+12 \quad \mid +8x \\ \iff & 15 > 12 \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung wahr ist, ist auch die erste immer wahr, also $L = \mathbb{Q}$.

6)
$$\begin{aligned} & 5(3x-1) = 3(5x-2) \\ \iff & 15x-5 = 15x-6 \quad \mid -15x \\ \iff & -5 = -6 \end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung falsch ist, ist (wegen der Äquivalenz) auch die erste immer falsch. Das bedeutet, sie hat keine Lösung: $\mathbb{L} = \emptyset$.

7)
$$\begin{aligned} & (x+6)(x+1) < (x+2)(x+4) \\ \iff & x^2+7x+6 < x^2+6x+8 \quad \mid -x^2-6x-6 \\ \iff & x < 2 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\} = ]-\infty; 2[$.

8)
$$\begin{aligned} & (2x-4)(x+5) > (x-3)(2x+5) \\ \iff & 2x^2+6x-20 > 2x^2-x-15 \quad \mid -2x^2+x+20 \\ \iff & 7x > 5 \quad \mid :7 (>0!) \\ \iff & x > \tfrac{5}{7} \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{5}{7}\} = ]\frac{5}{7}; \infty[$.

9)
$$\begin{aligned}
&& (4-3x)(4x-7) &\leq (2x+5)(7-6x) & \\
\iff && -12x^2+37x-28 &\leq -12x^2-16x+35 & \mid +12x^2+16x+28 \\
\iff && 53x &\leq 63 & \mid :53(>0!) \\
\iff && x &\leq \tfrac{63}{53} &
\end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \frac{63}{53}\} = \left]-\infty; \frac{63}{53}\right]$.

10) Behandelt man diese Gleichung wie die anderen (ausmultiplizieren), so wird man auf eine sog. *quadratische* Gleichung geführt, die Sie zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht lösen können.
Der andere, im Unterricht vorgeschlagene Weg war: Man dividiere beide Seiten der Gleichung durch $x$. Dies ist aber *keine* Äquivalenzumformung, denn dafür müsste sichergestellt sein, dass $x$ nicht 0 ist; andernfalls ist die Division durch $x$ nicht möglich! Ein möglicher Ausweg war (Vorschlag Frau Häger): Man formt die Gleichung zunächst um in eine Gleichung mit rechter Seite 0 und stelle die linke Seite nach Möglichkeit als Produkt dar. Dies ist hier durch Ausklammern möglich:

$$x(x-3) = x(2x+5) \iff x^2-3x = 2x^2+5x \iff 0 = x^2+8x = x\cdot(x+8)$$

Jetzt benutze man die grundlegende Tatsache: Ein Produkt kann nur dann Null sein, wenn wenigstens einer der Faktoren 0 ist. Dies bedeutet hier:

$$x\cdot(x+8) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x+8 = 0\,.$$

Auf diese Weise ist die die *eine quadratische* Gleichung äquivalent in *zwei* einfache lineare Gleichungen umgeformt, die sich nun sehr einfach lösen lassen: 0 und $-8$ sind die Lösungen der beiden linearen Gleichungen und folglich $\mathbb{L} = \{0, -8\}$.
Zu diesem Thema werden wir demnächst noch mehr hören, da sich alle Lösungsmethoden für Gleichungen höheren Grades (d. h. mit höheren $x$-Potenzen) darauf stützen.

11) Die gesuchte Zahl nennen wir $x$. Die Forderungen der Aufgabenstellung lauten dann: $3x = 5x+4$. Wir lösen nun diese Gleichung:

$$\begin{aligned}
&& 3x &= 5x+4 & \mid -5x \\
\iff && -2x &= 4 & \mid :(-2) \\
\iff && x &= -2 &
\end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl ist $-2$.

12) Hier ist nach 5 Zahlen gefragt. Da diese aber aufeinanderfolgen sollen, genügt es die kleinste davon zu kennen; nennen wir sie $x$. Dann sind die anderen $x+1$, $x+2$, $x+3$ und $x+4$. Die gesuchte Zahl $x$ muss also die folgende Gleichung erfüllen:

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4) = 4(x+(x+1))\,.$$

$$\begin{aligned}
&& x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4) &= 4(x+(x+1)) & \\
\iff && 5x+10 &= 8x+4 & \mid -5x-4 \\
\iff && 6 &= 3x & \mid :2 \\
\iff && 2 &= x &
\end{aligned}$$

Die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen sind 2, 3, 4, 5 und 6.

Parameteraufgaben löst man zunächst genauso wie solche ohne Parameter. Man muss hier nun jedoch besonders genau darauf achten, ob die beabsichtigten Umformungen auch tatsächlich Äquivalenzumformungen sind. In Aufgabe 13) ist dies noch problemlos. Aber ab Aufgabe 14) muss man im Laufe der Rechnung durch Terme dividieren, von denen nicht immer gesichert ist, dass sie $\neq 0$ sind (bzw. bei Ungleichungen, dass sie $> 0$ sind). Man ist dann gezwungen verschiedene *Fälle* zu *unterscheiden*.

13) a)

$$\begin{array}{rrcll} & 3x+4a &=& 5x+8a & \mid -3x-8a \\ \iff & -4a &=& 2x & \mid :2 (\neq 0) \\ \iff & -2a &=& x & \end{array}$$

Also: $\mathbb{L} = \{-2a\}$.

b)

$$\begin{array}{rrcll} & (x+a)(a-2) &<& (x-a)(a+2) & \\ \iff & xa+a^2-2x-2a &<& ax-a^2+2x-2a & \mid -ax+2x+a^2+2a \\ \iff & 2a^2 &<& 4x & \mid :4\,(>0!) \\ \iff & \frac{a^2}{2} &<& x & \end{array}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{a^2}{2}\} = \left]\frac{a^2}{2};\infty\right[$.

14)

$$\begin{array}{rrcll} & (x-a)(a+2)+4a &=& 2(x-a) & \\ \iff & ax-a^2+2x-2a+4a &=& 2x-2a & \mid -2x+a^2-2a \\ \iff & ax &=& a^2-4a & (*) \end{array}$$

Die jetzt üblicherweise anstehende Division durch $a$ (um $x$ zu 'isolieren') ist aber nur möglich, wenn $a \neq 0$ ist. Wir müssen also die beiden Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$ unterscheiden:

1. Fall: $a = 0$.

Dann lautet die Gleichung $(*)$:

$$\begin{array}{rrcl} (*) & 0 \cdot x &=& 0^2 - 4 \cdot 0 \\ \iff & 0 &=& 0 \\ & \mathbb{L} &=& \mathbb{Q}\,. \end{array}$$

2. Fall: $a \neq 0$.

In diesem Falle können wir bei $(*)$ mit einer Division durch $a$ fortfahren:

$$\begin{array}{rrcll} (*) & ax &=& a^2-4a & \mid :a\,(\neq 0!) \\ \iff & x &=& \frac{a^2-4a}{a} & \\ \iff & x &=& a-4 & \end{array}$$

Also: $\mathbb{L} = \{a-4\}$

Damit ist in beiden Fällen die Lösungsmenge bestimmt worden. Zusammengefasst:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{falls } a = 0, \\ \{a-4\} & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$$

15)

$$\begin{array}{rrcll} & 6(4x+a) &=& 8(3x+a) & \\ \iff & 24x+6a &=& 24x+8a & \mid -24x-6a \\ \iff & 0 &=& 2a & \end{array}$$

Die Ausgangsgleichung hat also für alle $x$ denselben Wahrheitswert wie die letzte Gleichung $2a = 0$. Deren Wahrheitswert hängt nun vom Wert von $a$ ab:

1. Fall: $a = 0$.

Dann ist die letzte Gleichung, also auch die erste wahr; das heißt $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.

2. Fall: $a \neq 0$.

Dann ist die letzte Gleichung falsch, also auch die erste: $\mathbb{L} = \emptyset$.

$$\text{Zusammengefasst: } \mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{falls } a = 0, \\ \emptyset & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$$

16) a) Die erste Umformung, die man hier durchführen möchte, ist die Division durch $a$. Dies ist aber nur dann eine zulässige Äquivalenzumformung, wenn $a \neq 0$ ist. Wir unterscheiden daher wieder die beiden Fälle:

1. Fall: $a = 0$.
Dann lautet die Gleichung einfach:

$$\begin{aligned} ax &= a \quad | \,(a = 0!) \\ \Longleftrightarrow \quad 0 &= 0 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$

2. Fall: $a \neq 0$.
Dann ist die Division durch $a$ eine Äquivalenzumformung und wir erhalten:

$$\begin{aligned} ax &= a \quad | :a\,(\neq 0!) \\ \Longleftrightarrow \quad x &= 1 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{1\}$

Zusammengefasst folgt: $\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{falls } a = 0, \\ \{1\} & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$

b) Hier ist dieselbe Fallunterscheidung nötig.
1. Fall: $a = 0$. Dann lautet die Gleichung $0 = 1$ und ist falsch: $\mathbb{L} = \emptyset$.
2. Fall: $a \neq 0$. Dann gilt $ax = 1 \iff x = \frac{1}{a}$: $\mathbb{L} = \{\frac{1}{a}\}$.

17) a) Auch hier wäre die erste Umformung eine Division durch $a$. Da es sich hier aber um eine Ungleichung handelt, ist die Division durch $a$ nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn $a > 0$ ist; wenn hingegen $a < 0$ ist, muss man das Relationszeichen ($<$, $>$) 'umdrehen'. Wir haben daher hier 3 Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $a > 0$.

$$\begin{aligned} ax &< a \quad | :a(> 0!) \\ \Longleftrightarrow \quad x &< 1 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\} = ]-\infty; 1[$.

2. Fall: $a = 0$. Dann lautet die Ungleichung $0 \cdot x < 0$, also $0 < 0$, und ist falsch: $\mathbb{L} = \emptyset$.

3. Fall: $a < 0$.

$$\begin{aligned} ax &< a \quad | :a(< 0!) \\ \Longleftrightarrow \quad x &> 1 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\} = ]1\,; \infty[$.

Zusammengefasst: $\mathbb{L} = \begin{cases} ]-\infty; 1[ & \text{falls } a > 0, \\ \emptyset & \text{falls } a = 0, \\ ]1; \infty[ & \text{falls } a < 0. \end{cases}$

b) Hier müsste man zunächst durch $a^2$ dividieren. Da aber $a^2$ nie negativ sein kann, braucht man nur zwei Fälle zu unterscheiden: $a^2 = 0$ und $a^2 > 0$. Die weiteren Überlegungen verlaufen wie in a) und man erhält:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} ]-\infty; 1[ & \text{falls } a^2 > 0, \text{ d.h. falls } a \neq 0, \\ \emptyset & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

c) Vorsicht: Man führe solange wie möglich die üblichen Äquivalenzumformungen durch! Man unterscheide verschiedene Fälle erst dann, wenn dies unbedingt nötig ist, d. h. wenn man multiplizieren oder dividieren will und sicherstellen muss, dass der Divisor $> 0$ ist.

$$\begin{aligned} ax &< x \quad | -x \\ \Longleftrightarrow \quad ax - x &< 0 \\ \Longleftrightarrow \quad (a-1)x &< 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Jetzt wäre der nächste Schritt die Division durch $a - 1$. Man muss also nun die 3 Fälle $a - 1 > 0$, $a - 1 = 0$ und $a - 1 < 0$ unterscheiden.

1. Fall: $a - 1 > 0$.

$$\begin{aligned} (*) \quad (a-1)x &< 0 \quad | :(a-1)\,(> 0!) \\ \Longleftrightarrow \quad x &< 0 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = ]-\infty; 0[$

2. Fall: $a-1=0$. Dann lautet die Ungleichung $(*)$ $0 \cdot x < 0$ und ist falsch: $\mathbb{L} = \emptyset$.

3. Fall: $a-1<0$.

$$\begin{array}{rrcl} (*) & (a-1)x & < & 0 \qquad | :(a-1)\,(<0!) \\ \iff & x & > & 0 \\ \text{Also:} & \mathbb{L} & = & ]0;\infty[ \end{array}$$

Da $a-1>0$ nichts anderes besagt als $a>1$, erhält man das Endergebnis:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} ]-\infty;0[ & \text{falls } a>1, \\ \emptyset & \text{falls } a=1, \\ ]0;\infty[ & \text{falls } a<1. \end{cases}$$