Übungen (7)

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Bruchgleichungen:

1) $\dfrac{x+6}{x} = \dfrac{x+4}{x+1}$

2) $\dfrac{5}{x-3} = \dfrac{2}{3-x}$

3) $\dfrac{x}{x-1} = 1 - \dfrac{1}{1-x}$

4) $\dfrac{2-x}{3-x} - 1 = \dfrac{4-x}{x-3}$

5) $\dfrac{5x+1}{30-10x} = \dfrac{x+3}{4x-12}$

6) $\dfrac{4x}{6x-24} = \dfrac{x}{12-3x}$

7) $\dfrac{x+2}{6x} + \dfrac{x^2-2}{3x^2} = \dfrac{1}{2}$

8) $\dfrac{9}{x+3} - \dfrac{8}{x-2} - \dfrac{1}{x+1} = 0$

Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen durch *Faktorisieren:*

9) a) $(x-3)\cdot(x+1) = 0$,
   b) $(x-3)(x+1)(x-2) = 0$,
   c) $(2x-4)(3x+1) = 0$,
   d) $6x^2 + 3x = 0$,
   e) $2x^2 - 50 = 0$,
   f) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

10) a) $x^2 + 16 = 8x$,
   b) $2x^2+6x+6 = x^2-2x-10$,
   c) $(2x+2)(x+2)+5 = 9$,
   d) $3(x^2+3) = 36$,
   e) $x^3 + 4x = 4x^2$,
   f) $2x(x+3)-45 = (3x-2)(x-2)$.

Lösen Sie die nachfolgenden Bruchgleichungen:

11) $\dfrac{8}{x-3} - \dfrac{10}{x+3} = \dfrac{40}{x^2-9}$

12) $\dfrac{3}{x+4} + \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{5x-4}{x^2-16}$

13) $\dfrac{3}{x+4} - \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{5x-4}{x^2-16}$

14) $\dfrac{6x+1}{2x+6} - \dfrac{5x-3}{3x-9} = \dfrac{4x^2+42}{3x^2-27}$

15) $\dfrac{3-x}{x+1} + \dfrac{2+x}{x-3} = \dfrac{4x-1}{x^2-2x-3}$

16) $\dfrac{3}{x^2+3x} - \dfrac{2}{x^2-2x} - \dfrac{1}{x^2+x-6} = 0$

9) a) $(x-3)(x+1)=0 \iff x-3=0 \lor x+1=0 \iff x=3 \lor x=-1$, also $\mathbb{L}=\{-1\,,\,3\}$.

b) $(x-3)(x+1)(x-2)=0 \iff x-3=0 \lor x+1=0 \lor x-2=0 \iff$ $\iff x=3 \lor x=-1 \lor x=2$, also $\mathbb{L}=\{-1\,,\,2\,,\,3\}$.

c) $(2x-4)(3x+1)=0 \iff 2x=4 \lor 3x=-1 \iff x=2 \lor x=-1/3$, also $\mathbb{L}=\{-1/3\,,\,2\}$.

d) Hier faktorisiert man zunächst durch Ausklammern und schließt dann wie oben weiter: $6x^2+3x=0 \iff 3x(2x+1)=0 \iff 3x=0 \lor 2x=-1 \iff$ $\iff x=0 \lor x=-1/2$, und damit ist $\mathbb{L}=\{-1/2\,,\,0\}$ die Lösungsmenge.

e) Hier wird der Term mit der dritten binomischen Formel faktorisiert: $2x^2-50=0 \iff x^2-25=0 \iff (x+5)(x-5)=0 \iff$ $\iff x+5=0 \lor x-5=0 \iff x=-5 \lor x=5$, also $\mathbb{L}=\{-5\,,\,+5\}$.

f) $x^2-6x+9=0 \iff (x-3)^2=0 \iff x-3=0 \iff x=3$, also $\mathbb{L}=\{3\}$.

10) a) $x^2+16=8x \iff x^2-8x+16=0 \iff (x-4)^2=0 \iff x-4=0 \iff$ $x=4$, also $\mathbb{L}=\{4\}$.

b) $2x^2+6x+6=x^2-2x-10 \iff x^2+8x+16=0 \iff (x+4)^2=0 \iff$ $x=-4$, also $\mathbb{L}=\{-4\}$.

c) $(2x+2)(x+2)+5=9 \iff 2x^2+6x+4-4=0 \iff x^2+3x=0 \iff$ $x(x+3)=0 \iff x=0 \lor x=-3$, also $\mathbb{L}=\{-3\,,\,0\}$.

d) $3(x^2+3)=36 \iff x^2+3=12 \iff x^2-9=0 \iff$ $\iff (x+3)(x-3)=0 \iff x=\pm 3$, also $\mathbb{L}=\{-3\,,\,+3\}$.

e) Auch diese (*kubische*) Gleichung ist durch Faktorisieren lösbar:

$$x^3+4x=4x^2 \iff x^3-4x^2+4x=0 \iff x(x^2-4x+4)=0$$
$$\iff x(x-2)^2=0 \iff x=0 \lor x=2\,,$$

also $\mathbb{L}=\{0\,,\,2\}$.

f) $2x(x+3)-45=(3x-2)(x-2) \iff 2x^2+6x-45=3x^2-8x+4 \iff$ $x^2-14x+49=0 \iff (x-7)^2=0 \iff x=7$, also $\mathbb{L}=\{7\}$.

Bei den nun folgenden Bruchgleichungen muss man zur Bestimmung des Definitionsbereiches die auftretenden Nenner faktorisieren. Dies erleichtert zugleich die Bestimmung des Hauptnenners.

11) Die Nenner $x-3$ und $x+3$ werden 0 für $x=+3$ bzw. für $x=-3$. Der quadratische (!) Nenner x^2-9 wird mit der dritten binomischen Formel zerlegt: $x^2-9=(x+3)(x-3)$. Dieser Term kann nur dann den Wert 0 haben, wenn $x-3=0$ oder $x+3=0$ ist. Damit ist der Definitionsbereich der gesamten Gleichung $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-3,+3\}$.
Zugleich erkennen wir $(x+3)(x-3)$ als Hauptnenner, mit dem wir dann die Bruchgleichung multiplizieren. Über $\mathbb{D}$ gelten dann die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{8}{x-3}-\frac{10}{x+3}=\frac{40}{x^2-9}\\
\iff\ &\frac{8}{x-3}-\frac{10}{x+3}=\frac{40}{(x-3)(x+3)} \quad \mid \cdot(x-3)(x+3)\\
\iff\ &8(x+3)-10(x-3)=40\\
\iff\ &-2x+54=40 \quad \mid -54\\
\iff\ &-2x=-14 \quad \mid :(-2)\\
\iff\ &x=7\\
&\mathbb{L}=\{7\}\,,\ \text{ denn } 7\in\mathbb{D}\,.
\end{aligned}$$