Übungen (8)

1) a) Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $y = ax + b$ mit rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ ist __________ mit dem _______ a und dem __________________ b.
b) Geraden mit dem Anstieg 0 sind ____________________.
c) Beschreiben Sie in Worten die Lösungsmengen der Gleichungen $y = 3$ und $x = 5$.
d) Welchen Anstieg haben die Geraden in c)?

2) Zeichnen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in ein Koordinatenkreuz.
a) $y = x - 2$ b) $y = -3x + 5$
c) $y = \frac{x}{2} - 1$ d) $y = 3 + \frac{x}{5}$
e) $3x - 2y = 4$ f) $3x - 2y = 4(3x - y + 1)$

3) Beschreiben Sie in Worten die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen — so genau, dass eine Zeichnung unmittelbar möglich ist.
a) $(4x - 3)(3y + 1) = (6y - 1)(2x + 1)$ b) $(9x - 4)(2y + 5) = (3y + 1)(6x - 2)$
c) $(2x + 1)(6y - 4) = (3y - 2)(4x - 3)$ d) $(2x + 1)(6y - 4) = (3y - 2)(4x + 2)$

4) a) Markieren Sie in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $P = (3, 2)$ und $Q = (-1, -1)$ und zeichnen Sie die Gerade durch diese Punkte.
b) Entnehmen Sie Ihrer Zeichnung möglichst genau den Anstieg und den y-Achsenabschnitt dieser Geraden.
c) *Berechnen* Sie nun diese Werte und vergleichen Sie sie mit den in b) gefundenen.
d) Beschreiben Sie die Gerade durch eine Gleichung, d. h. geben Sie eine Gleichung an, deren Lösungsmenge diese Gerade ist.
e) Welche der nachfolgenden Punkte liegen auf der Geraden?

$$Q_1 = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}), \quad Q_2 = (4, \frac{11}{4}), \quad Q_3 = (\frac{1}{9}, -\frac{1}{5})$$

f) Ergänzen Sie in den folgenden Punkten

$$P_1 = (2, \quad), \quad P_2 = (-3, \quad), \quad P_3 = (\quad , 1)$$

die fehlende Koordinate so, dass der jeweilige Punkt auf der gegebenen Geraden liegt. Markieren Sie die Punkte dann in ihrem Koordinatensystem.

5) Bestimmen Sie zu den gegebenen Punkten P und Q jeweils den Anstieg und den y-Achsenabschnitt der Geraden durch diese Punkte:
a) $P = (2, 3)$, $Q = (1, 1)$, b) $P = (3, 8)$, $Q = (-3, 2)$,
c) $P = (6, 4)$, $Q = (1, 3)$, d) $P = (2, 3)$, $Q = (2, -1)$.

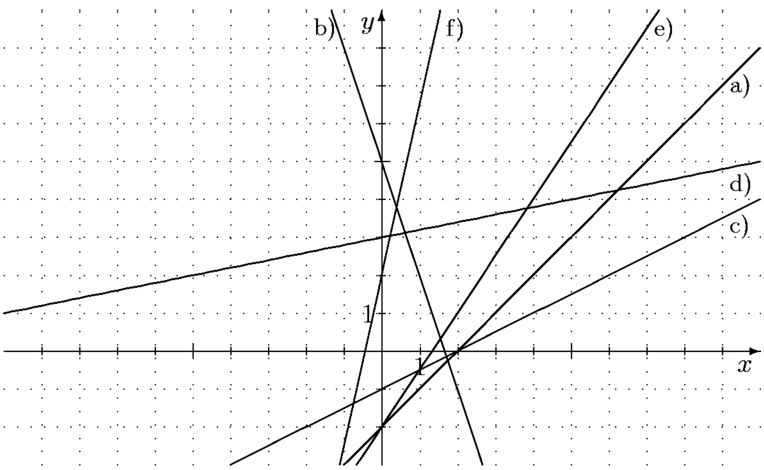
6) a) Eine Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ heißt linear, wenn ...
b) Der Graph einer Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = ax + b$ ist ...
c) Welche Teilmengen von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kommen als Graph einer linearen Funktion vor?

7) Eine Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ist linear und es gilt $f(-1) = 3$ sowie $f(3) = -3$.
a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
b) Bestimmen Sie einen Funktionsterm für f.

Übungen (8) — Lösungen

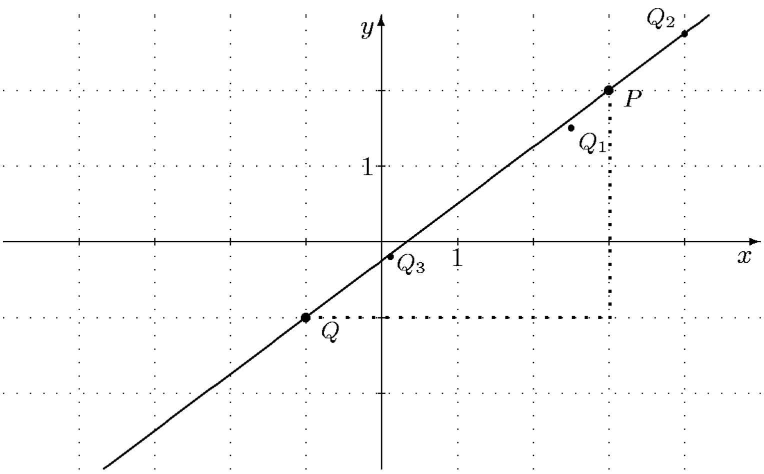
1) a) Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $y = ax + b$ mit rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ ist die Gerade mit dem Anstieg a und dem y-Achsenabschnitt b.
b) Geraden mit dem Anstieg 0 sind Parallelen zur x-Achse.
c)/d) Die Lösungsmenge der Gleichung $y = 3$ in der Koordinatenebene ist die Parallele zur x(!)-Achse, die bei 3 die y-Achse schneidet. Sie hat den Anstieg 0.
Die Lösungsmenge der Gleichung $x = 5$ ist die Parallele zur y(!)-Achse, die bei 5 die x-Achse schneidet. Für sie ist der Anstieg nicht definiert.

2)



3) a) Die Lösungsmenge ist die Gerade mit dem Anstieg $\frac{2}{5}$ und dem y-Achsenabschnitt $-\frac{2}{15}$.
b) Die Lösungsmenge ist die Gerade mit dem Anstieg $\frac{39}{2}$ und dem y-Achsenabschnitt -9.
c) Die Lösungsmenge ist die Parallele zur x-Achse mit dem y-Achsenabschnitt $\frac{2}{3}$.
d) Die Lösungsmenge ist die gesamte Koordinatenebene $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (da die gegebene Gleichung äquivalent ist zur Gleichung '$0 = 0$').

4) a) Die Skizze hat etwa folgende Gestalt.



Bei Zeichnung auf Millimeterpapier (bzw. bei Auswahl des 'richtigen' Steigungsdreiecks, siehe Skizze) kann man daraus den Anstieg $a = \frac{3}{4}$ entnehmen. Als y-Achsenabschnitt liest man etwa $-0,25$ ab. Eine (hinreichend genaue) Zeichnung

zeigt: Nur Q_2 liegt auf der Geraden. Völlige Sicherheit bietet die Zeichnung aber nicht. Dazu braucht man eine Gleichung für die Gerade.
c) Der Geradenanstieg ist $a = \frac{2-(-1)}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$. Damit ist die Gerade Lösungsmenge der Gleichung $y = ax + b = \frac{3}{4}x + b$ und es muss noch b bestimmt werden. Da der Punkt $P = (3 \mid 2)$ auf der Geraden liegt, erfüllen seine Koordinaten diese Gleichung: $2 = a \cdot 3 + b = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$, also $b = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$. (Man kann statt P auch den Punkt Q benutzen, um b zu berechnen. Führt man beide Rechnungen durch, so hat man eine gute Probe!)
Insgesamt erhalten wir als Gleichung für die Gerade: $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. Eine andere (äquivalente) Gleichung wäre etwa $3x - 4y = 1$.
d) Damit läßt sich nun leicht (und exakt) entscheiden, dass Q_2 auf der Geraden liegt (seine Koordinaten erfüllen die Gleichung: $\frac{11}{4} = \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{1}{4}$). während Q_1 und Q_3 nicht darauf liegen ($\frac{3}{2} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{4}$).
e) Man bestimmt für P_1 und P_2 die fehlende y-Koordinate gerade so, dass die Geradengleichung erfüllt ist: Also $y_1 = \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ für P_1 und $y_2 = \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot (-3) - \frac{1}{4} = -\frac{5}{2}$ für P_2.
Bei P_3 ist die y-Koordinate $y_3 = 1$ bekannt und die x-Koordinate x_3 gesucht. Da P_3 auf der Geraden liegen soll, muss x_3 so gewählt werden, dass die Geradengleichung erfüllt ist: $y_3 = 1 = \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}$. Diese Gleichung löst man wie üblich und erhält als (einzige) Lösung $x_3 = \frac{5}{3}$. Damit sind die Punkte $P_1 = (2, \frac{5}{4})$, $P_2 = (-3, -\frac{5}{2})$ und $P_3 = (\frac{5}{3} \mid 1)$.

5) a) Anstieg $a = \dfrac{1-3}{1-2} = 2$, y-Achsenabschnitt $b = y_1 - ax_1 = 3 - 2 \cdot 2 = -1$.
b) $a = \dfrac{2-8}{-3-3} = 1$, $b = 8 - 3 = 5$. c) $a = \dfrac{3-4}{1-6} = \dfrac{1}{5}$, $b = 4 - \dfrac{1}{5} \cdot 6 = \dfrac{14}{5}$.
d) Der Anstieg a ist nicht definiert; die Gerade ist eine Parallele zur y-Achse. (Dies merkt man spätestens daran, dass in der Formel für a bei Einsetzen der gegebenen Punktkoordinaten im Nenner eine 0 auftaucht!)

6) a) Eine Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ heißt linear, wenn *sie durch einen Funktionsterm der Form $f(x) = ax + b$ beschrieben werden kann.*
b) Der Graph einer Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = ax + b$ ist *eine Gerade in der Koordinatenebene mit dem Anstieg a und dem y-Achsenabschnitt b.*
c) Alle Geraden in der Koordinatenebene, die *nicht parallel zur y-Achse* sind, kommen als Graph einer linearen Funktion vor.

7) a) Wegen $f(-1) = 3$ gehört der Punkt $P = (-1, 3)$ zum Graphen von f, und wegen $f(3) = -3$ der Punkt $Q = (3, -3)$ ebenfalls. Da f eine lineare Funktion ist, ist ihr Graph eine Gerade. Man verbindet also die Punkte P und Q durch eine Gerade und erhält so den Graphen von f.
b) Da man zwei Punkte des Graphen kennt und dieser eine Gerade ist, kann man deren Anstieg und y-Achsenabschnitt berechnen:

$$a = \frac{3-(-3)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad b = 3 - a(-1) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

Ein Term für die Funktion f ist also gegeben durch $f(x) = ax + b = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.