

## Ferienübung

- 1) Untersuchen Sie für die nachfolgend definierten quadratischen Funktionen  $f$
- den Verlauf des Graphen,
  - die Anzahl der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
  - ob die Funktion einen größten oder kleinsten Wert annimmt,
  - wie groß dieser Wert ggf. ist und
  - an welcher Stelle er angenommen wird.
- $f(x) = x^2 - 4x + 7$
  - $f(x) = -x^2 - 2x + 1$
  - $f(x) = -2x^2 - 2x - 2$
  - $f(x) = 3x^2 + 2x$
  - $f(x) = -2x^2 - 4x - 6$
  - $f(x) = -7x^2 + 4x - 1$
  - $f(x) = -x^2 + \frac{2}{3} \cdot x + \frac{5}{36}$
  - $f(x) = -2x^2 + \frac{8}{5} \cdot x - \frac{41}{50}$
- 2) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen mittels quadratischer Ergänzung:
- $x^2 - 7x + 12 = 0,$
  - $x^2 + x - 12 = 0,$
  - $x^2 - 6x + 11 = 0,$
  - $3x^2 + 11x - 4 = 0,$
  - $-6x^2 + 17x - 12 = 0,$
  - $9x^2 + 12x + 4 = 0,$
  - $-9x^2 + 6x - 5 = 0,$
  - $6x^2 - x - 12 = 0.$
- 3) Untersuchen Sie die nachfolgend gegebenen Parabeln  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  auf Schnittpunkte.
- $\mathcal{P}_1$ : Nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt  $S = (1, 2),$   
 $\mathcal{P}_2$ : Graph der Funktion  $f_2(x) = x^2 + 4x + 3.$
  - $\mathcal{P}_1$ : Graph der Funktion  $f_1(x) = (x - 1)^2 + 2,$   
 $\mathcal{P}_2$ : Nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel  $S = (-3, -1).$
  - $\mathcal{P}_1$ : Lösungsmenge der Gleichung  $y + 5 = (x - 3)^2,$   
 $\mathcal{P}_2$ : Nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel  $S = (1, -1).$
  - $\mathcal{P}_1$ : Graph der Funktion  $f_1(x) = -2(x - 1)^2 + 2,$   
 $\mathcal{P}_2$ : Verschiebung der Parabel mit der Gleichung  $y = 3x^2$  um 1 nach links und 2 nach unten.
  - $\mathcal{P}_1$ : Parabel mit dem Scheitel  $S = (1, 0)$  und durch den Punkt  $P = (0, -2),$   
 $\mathcal{P}_2$ : Graph der Funktion  $f_2(x) = 3(x + 1)^2 - 5.$
  - $\mathcal{P}_1$ : Parabel mit dem Scheitel  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  und dem  $y$ -Achsenabschnitt 1,  
 $\mathcal{P}_2$ : Graph der Funktion  $f_2(x) = -2(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{13}{2}.$
  - $\mathcal{P}_1$ : Nach oben geöffnete Normalparabel, die die  $x$ -Achse bei +2 und die  $y$ -Achse bei -8 schneidet,  
 $\mathcal{P}_2$ : Parabel durch den Koordinatenursprung und mit dem Scheitel  $S = (1, 2).$

- 4) a) Ist  $a = 0,1\overline{3}$  eine rationale Zahl? Wenn ja, weisen Sie dies durch geeignete Rechnungen nach und bestimmen Sie die gekürzte Bruchdarstellung für  $a$ .  
 b) Berechnen Sie  $0,1\overline{3} \cdot 0,2\overline{7}$  und stellen Sie das Ergebnis als Dezimalzahl dar.

- 5) a) Wie definiert man die Quadratwurzel  $\sqrt{a}$ ? Für welche reelle Zahlen  $a \in \mathbb{R}$  ist sie definiert?

b) Es sei  $a \in \mathbb{R}$  vorgegeben. Wie viele Lösungen hat die Gleichung  $x^2 = a$  (über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ )?. Geben Sie die Lösungsmenge an. (Beachten Sie alle Möglichkeiten für  $a$ !)

c) Welche der nachfolgenden Gleichungen sind allgemeingültig (über ihrem Definitionsbereich)?

$\alpha$ )  $(\sqrt{a})^2 = a$ ,

$\beta$ )  $\sqrt{a^2} = a$ ,

$\gamma$ )  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ ,

$\delta$ )  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

- 6) Überprüfen Sie, ob die folgenden Beziehungen zutreffen oder nicht:

a)  $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{18}$ .      b)  $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{6}$ .      c)  $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$ .

Begründen Sie Ihre Antworten durch geeignete Rechnungen oder Argumentationen.

- 7) Berechnen Sie *ohne* Taschenrechner unter genauer Angabe des Rechenweges die folgenden Wurzelterme *exakt*. Stellen Sie das Ergebnis ohne Wurzeln im Nenner und mit möglichst kleinen Radikanden dar.

a)  $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{45}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{2}}$

b)  $\frac{\sqrt{48} - \sqrt{3}}{\sqrt{147}}$ ,

c)  $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{6}}{\sqrt{8} - \sqrt{6}}$ .

d)  $\frac{3 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

e)  $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

f)  $\left( \sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{6}} - \sqrt{\sqrt{8} - \sqrt{6}} \right)^2$ ,

g)  $\left( \sqrt{7 - \sqrt{13}} + \sqrt{7 + \sqrt{13}} \right)^2$

- 8) Bestimmen Sie die Nullstellen der in Aufgabe 1) gegebenen Funktionen.

- 9) Lösen Sie – mit möglichst geringem Aufwand – die nachfolgenden Gleichungen:

a)  $x^2 + 4 = 4x$ ,

b)  $2x^2 + 18 = 12x$ ,

c)  $3x^2 + 9x = 0$ ,

d)  $(2x + 1)^2 - 4 = 0$ ,

e)  $x^2 - 6x - 7 = 0$ ,

f)  $x^2 - 2x - 15 = 0$ ,

g)  $x^2 - 6x + 7 = 0$ ,

h)  $x^2 + 5x + 3 = 0$ ,

i)  $(x^2 - 3)(x + 3) = 0$ ,

j)  $(x^2 + 3)(x^3 - 5x) = 0$ .

## Ferienübung — Lösungen

- 1) Generell schneiden Funktionsgraphen die  $y$ -Achse genau einmal (Funktionsbegriff: Zu jedem  $x$  gehört genau ein Funktionswert  $f(x)$ ). Dieser Teil der Frage ii) ist damit beantwortet und wir werden darauf nicht mehr eingehen.

Alle Graphen sind Parabeln, da die Funktionen quadratisch sind, und man kann ohne weitere Rechnung die Öffnungsrichtung und Form der Parabel am *führenden* Koeffizienten (dem Faktor vor  $x^2$ ) ablesen.

Um die anderen Fragen beantworten zu können, bestimmen wir durch quadratische Ergänzung die Scheitelpunktsform des Terms  $f(x)$  und damit den Scheitelpunkt der jeweiligen Graphen. Im einzelnen erhalten wir so:

a) Es ist  $f(x) = x^2 - 4x + 7 = x^2 - 4x + 2^2 - 4 + 7 = (x - 2)^2 + 3$ , also:

i) der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt  $S = (2, 3)$ ,

ii) er trifft die  $x$ -Achse nicht, da die Parabel nach oben geöffnet ist und der Scheitelpunkt *oberhalb* der  $x$ -Achse liegt ( $y_S = 3 > 0$ ),

iii) die Funktion  $f$  nimmt keinen größten, wohl aber einen kleinsten Wert an, da der Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist,

iv) der kleinste Wert von  $f$  ist  $+3 (= y_S)$ , und

v) er wird an der Stelle  $2 (= x_S)$  angenommen:  $f(2) = 3 \leq f(x)$  für alle  $x$ .

b) Es ist  $f(x) = -x^2 - 2x + 1 = -(x^2 + 2x - 1) = -(x^2 + 2x + 1^2 - 1 - 1) = -(x + 1)^2 + 2$ , also:

i) der Graph ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel  $S = (-1, 2)$ ,

ii) er trifft die  $x$ -Achse zweimal, da der Scheitel oberhalb der  $x$ -Achse liegt und die Parabel nach unten geöffnet ist,

iii)–v) die Funktion  $f$  nimmt keinen kleinsten, aber einen größten Wert an, dieser ist  $+2$  und wird an der Stelle  $-1$  angenommen:  $f(-1) = 2 \geq f(x)$  für alle  $x$ .

c) Es ist  $f(x) = -2x^2 - 2x - 2 = -2(x^2 + x + 1) = -2(x^2 + x + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1) = -2((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}) = -2(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}$ , also:

i) der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, enger als die Normalparabel, mit dem Scheitel  $S = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ ,

ii) er trifft die  $x$ -Achse nicht,

iii)  $f$  nimmt keinen kleinsten Wert an, erreicht aber an der Stelle  $-\frac{1}{2} (= x_S)$  ihren größten Wert  $-\frac{3}{2} (= y_S)$ .

d) Es ist  $f(x) = 3x^2 + 2x = 3(x^2 + \frac{2}{3}x + (\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9}) = 3((x + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9}) = 3(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$ , also:

i) der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel, enger als die Normalparabel, mit dem Scheitel  $S = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ ,

ii) er trifft die  $x$ -Achse zweimal,

iii)–v)  $f$  nimmt keinen größten, aber an der Stelle  $-\frac{1}{3}$  ihren kleinsten Wert  $-\frac{1}{3}$  an.

e) Es ist  $f(x) = -2x^2 - 4x - 6 = -2(x^2 + 2x + 3) = -2(x^2 + 2x + 1 - 1 + 3) = -2(x + 1)^2 - 4$ , also:

i) der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, enger als eine Normalparabel, mit dem Scheitel  $S = (-1, -4)$ ,

ii) er trifft die  $x$ -Achse nicht,

Korr.

iii)–v)  $f$  nimmt keinen kleinsten, aber an der Stelle  $-1$  ihren größten Wert  $-4$  an.  
 f) Es ist  $f(x) = -7x^2 + 4x - 1 = -7(x^2 - \frac{4}{7}x + (\frac{2}{7})^2 - \frac{4}{49}) - 1 = -7(x - \frac{2}{7})^2 + \frac{4}{7} - 1 = -7(x - \frac{2}{7})^2 - \frac{3}{7}$ , also:

der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, enger als eine Normalparabel, mit dem Scheitel  $S = (\frac{2}{7}, -\frac{3}{7})$ ,

er schneidet die  $x$ -Achse nicht,

$f$  nimmt keinen kleinsten, aber bei  $x = \frac{2}{7}$  ihren größten Wert  $-\frac{3}{7}$  an.

g) Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + \frac{2}{3} \cdot x + \frac{5}{36} \\ &= -(x^2 - \frac{2}{3}x + (\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9}) + \frac{5}{36} \\ &= -(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{9} + \frac{5}{36} \\ &= -(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

also ist der Graph eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel  $S = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ , er schneidet die  $x$ -Achse zweimal und  $f$  nimmt keinen kleinsten, aber bei  $x = \frac{1}{3}$  ihren größten Wert  $\frac{1}{4}$  an.

h) Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + \frac{8}{5} \cdot x - \frac{41}{50} \\ &= -2(x^2 - \frac{4}{5}x + (\frac{2}{5})^2 - \frac{4}{25}) - \frac{41}{50} \\ &= -2(x - \frac{2}{5})^2 + \frac{8}{25} - \frac{41}{50} \\ &= -2(x - \frac{2}{5})^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

also ist der Graph eine nach unten geöffnete Parabel, enger als eine Normalparabel, mit dem Scheitel  $S = (\frac{2}{5}, -\frac{1}{2})$ , er schneidet die  $x$ -Achse nicht, und  $f$  nimmt an der Stelle  $x = \frac{2}{5}$  als größten Wert  $-\frac{1}{2}$  an; einen kleinsten Wert nimmt sie nicht an.

- 2) Wir formen die Gleichungen durch quadratische Ergänzung um in eine Gleichung der Form  $(x - x_S)^2 = d$ . Ist  $d < 0$ , so gibt es keine Lösung, da Quadrate niemals negativ sein können. Ist  $d = c^2$  eine Quadratzahl, so erhält man die Lösungen  $x - x_S = \pm c \iff x = x_S \pm c$ .

a) 
$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 12 = 0 &\iff x^2 - 7x = -12 \\ &\iff x^2 - 7x + (\frac{7}{2})^2 = -12 + \frac{49}{4} = \frac{1}{4} \\ &\iff (x - \frac{7}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 \\ &\iff x - \frac{7}{2} = \pm \frac{1}{2} \iff x = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \\ &\iff x = 4 \vee x = 3, \end{aligned}$$

also:  $\mathbb{L} = \{3, 4\}$ .

b) 
$$x^2 + x - 12 = 0 \iff x^2 + x = 12$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 12 + \frac{1}{4} = \frac{49}{4} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} &= \pm \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \\ \Leftrightarrow x &= 3 \vee x = -4, \end{aligned}$$

also:  $\mathbb{L} = \{-4, 3\}$ .

c)  $x^2 - 6x + 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 = -11 + 9 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = -2$ .

Da die negative Zahl  $-2$  kein Quadrat ist, besitzt diese Gleichung keine Lösung:  
 $\mathbb{L} = \emptyset$ .

d)  $3x^2 + 11x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{11}{3}x = \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x + \frac{11}{3}x + \left(\frac{11}{6}\right)^2 &= \frac{4}{3} + \frac{121}{36} = \frac{169}{36} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{6}\right)^2 &= \left(\frac{13}{6}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x + \frac{11}{6} &= \pm \frac{13}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{6} \pm \frac{13}{6} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3} \vee x = -4, \end{aligned}$$

also:  $\mathbb{L} = \left\{-4, \frac{1}{3}\right\}$ .

e)  $-6x^2 + 17x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{17}{6}x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 - \frac{17}{6}x + \left(\frac{17}{12}\right)^2 &= -2 + \frac{289}{144} = \frac{1}{144} \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{17}{12}\right)^2 &= \left(\frac{1}{12}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x - \frac{17}{12} &= \pm \frac{1}{12} \Leftrightarrow x = \frac{17}{12} \pm \frac{1}{12} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2} \vee x = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

also:  $\mathbb{L} = \left\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right\}$ .

f)  $9x^2 + 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{3}x = -\frac{4}{9}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2 &= -\frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 &= 0 \Leftrightarrow x + \frac{2}{3} = 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

also:  $\mathbb{L} = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ .

$$\begin{aligned}
\text{g)} \quad -9x^2 + 6x - 5 = 0 &\iff x^2 - \frac{2}{3}x = -\frac{5}{9} \\
&\iff x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{5}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{4}{9} \\
&\iff \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9} < 0,
\end{aligned}$$

also:  $\mathbb{L} = \emptyset$

$$\begin{aligned}
\text{h)} \quad 6x^2 - x - 12 = 0 &\iff x^2 - \frac{1}{6}x = 2 \\
&\iff x^2 - \frac{1}{6}x + \left(\frac{1}{12}\right)^2 = 2 + \frac{1}{144} = \frac{289}{144} \\
&\iff \left(x - \frac{1}{12}\right)^2 = \left(\frac{17}{12}\right)^2 \\
&\iff x - \frac{1}{12} = \pm \frac{17}{12} \iff x = \frac{1}{12} \pm \frac{17}{12} \\
&\iff x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{4}{3},
\end{aligned}$$

also:  $\mathbb{L} = \left\{ -\frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right\}$ .

3) Man beschreibt zunächst alle Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  und löst dann die Schnittstellengleichung  $f_1(x) = f_2(x)$ . Die gefundenen Schnittstellen sind die  $x$ -Koordinaten der Schnittpunkte; die  $y$ -Koordinaten erhält man durch Einsetzen der Schnittstellen in eine der beiden Funktionsgleichungen.

a) Eine Gleichung für  $\mathcal{P}_1$  ist gegeben durch  $y = (x - 1)^2 + 2$ ,  $\mathcal{P}_1$  ist also Graph der Funktion  $f_1(x) = (x - 1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$ . Wir lösen nun die Schnittstellengleichung:

$$f_1(x) = f_2(x) \iff x^2 - 2x + 3 = x^2 + 4x + 3 \iff 6x = 0 \iff x = 0.$$

Es gibt also genau eine Schnittstelle  $x = 0$ ; die  $y$ -Koordinate des Schnittpunktes ist  $f_2(0) = 3$ , der einzige Schnittpunkt also  $(0, 3)$ .

b)  $\mathcal{P}_2$  ist Graph der Funktion  $f_2(x) = -(x + 3)^2 - 1 = -x^2 - 6x - 10$ . Wir lösen also die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned}
f_1(x) = f_2(x) &\iff (x - 1)^2 + 2 = -(x + 3)^2 - 1 \\
&\iff x^2 - 2x + 3 = -x^2 - 6x - 10 \iff 2x^2 + 4x = -13 \\
&\iff x^2 + 2x = -\frac{13}{2} \iff x^2 + 2x + 1 = -\frac{13}{2} + 1 \\
&\iff (x + 1)^2 = -\frac{11}{2} < 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung, folglich gibt es keine Schnittpunkte.

c)  $\mathcal{P}_1$  ist Graph der Funktion  $f_1(x) = (x - 3)^2 - 5 = x^2 - 6x + 4$  und  $\mathcal{P}_2$  ist Graph der Funktion  $f_2(x) = -(x - 1)^2 - 1 = -x^2 + 2x - 2$ . Wir lösen die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned}
f_1(x) = f_2(x) &\iff x^2 - 6x + 4 = -x^2 + 2x - 2 \iff 2x^2 - 8x + 6 = 0 \\
&\iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x - 1)(x - 3) = 0 \quad (\text{Vieta}) \\
&\iff x = 1 \vee x = 3.
\end{aligned}$$

Es gibt also genau zwei Schnittpunkte:

$$S_1 = (1, f_2(1)) = (1, -1) \text{ und } S_2 = (3, f_2(3)) = (3, -5).$$

d) Verschiebt man die Parabel mit der Gleichung  $y = 3x^2$  um 1 nach links und 2 nach unten, so erhält man die Gleichung für die verschobene Parabel  $\mathcal{P}_2$ , indem man  $x$  durch  $x + 1$  und  $y$  durch  $y + 2$  ersetzt. Damit ist  $y + 2 = 3(x + 1)^2$  eine Gleichung für  $\mathcal{P}_2$ ;  $\mathcal{P}_2$  ist Graph der Funktion  $f_2(x) = 3(x + 1)^2 - 2 = 3x^2 + 6x + 1$ . Zusammen mit  $f_1(x) = -2(x - 1)^2 + 2 = -2x^2 + 4x$  erhält man die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff -2x^2 + 4x = 3x^2 + 6x + 1 \iff 5x^2 + 2x + 1 = 0 \\ &\iff x^2 + \frac{2}{5}x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{25} \\ &\iff \left(x + \frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{4}{25} < 0. \end{aligned}$$

Diese ist unlösbar, da Quadrate nie negativ sein können; es gibt also keine Schnittpunkte.

d)  $\mathcal{P}_1$  ist Graph einer Funktion  $f_1$  mit  $f_1(x) = a(x - 1)^2$ . Da der Graph durch  $P = (0, -2)$  verlaufen soll, ist  $f_1(0) = -2$ , also  $-2 = f_1(0) = a(-1)^2 = a$ . Insgesamt erhalten wir  $f_1(x) = -2(x - 1)^2 = -2x^2 + 4x - 2$ . Zusammen mit dem vorgegebenen Funktionsterm  $f_2(x) = 3(x + 1)^2 - 5 = 3x^2 + 6x - 2$  erhalten wir die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff -2x^2 + 4x - 2 = 3x^2 + 6x - 2 \\ &\iff 5x^2 + 2x = 0 \iff 5x\left(x + \frac{2}{5}\right) = 0 \\ &\iff x = 0 \vee x = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Die  $y$ -Koordinaten der Schnittpunkte sind  $f_2(0) = -2$  und  $f_2\left(-\frac{2}{5}\right) = 3 \cdot \frac{9}{25} - 5 = \frac{27-125}{25} = -\frac{98}{25}$ , die Schnittpunkte also  $S_1 = (0, -2)$  und  $S_2 = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{98}{25}\right) = -(0,4; -3,96)$ .

f)  $\mathcal{P}_1$  ist Graph von  $f_1(x) = a\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$ . Da der  $y$ -Achsenabschnitt 1 ist, erhalten wir

$$1 = f_1(0) = a \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \iff \frac{a}{9} = \frac{1}{3} \iff a = 3.$$

Damit ist  $f_1(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = 3x^2 - 2x + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 3x^2 - 2x + 1$ . Für  $f_2$  erhalten wir  $f_2(x) = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{2} = -2x^2 - 2x - \frac{1}{2} + \frac{13}{2} = -2x^2 - 2x + 6$ . Wir lösen die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff 3x^2 - 2x + 1 = -2x^2 - 2x + 6 \\ &\iff 5x^2 = 5 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1. \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte sind damit  $S_1 = (1, f_1(1)) = (1, 2)$  und  $S_2 = (-1, f_1(-1)) = (-1, 6)$ .

g) Da  $\mathcal{P}_1$  eine nach oben geöffnete Normalparabel ist, ist sie Graph einer normierten quadratischen Funktion  $f_1(x) = x^2 + bx + c$ . Da die  $y$ -Achse bei  $-8$  geschnitten wird, ist  $-8 = f_1(0) = c$ , also  $f_1(x) = x^2 + bx - 8$ . Da bei  $+2$  die  $x$ -Achse geschnitten wird, gilt  $0 = f_1(2) = 4 + 2b - 8 = 2b - 4 \iff b = 2$ . Insgesamt ist also  $\mathcal{P}_1$  Graph der Funktion  $f_1(x) = x^2 + 2x - 8$ .

$\mathcal{P}_2$  ist Graph von  $f_2(x) = a(x-1)^2 + 2$ . Da die Parabel durch den Koordinatenursprung verläuft, ist  $0 = f_2(0) = a + 2$ , also  $a = -2$ .

Wir lösen die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff x^2 + 2x - 8 = -2(x-1)^2 + 2 = -2x^2 + 4x \\ &\iff 3x^2 - 2x = 8 \iff x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{9} = \frac{25}{9} \\ &\iff \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \iff x - \frac{1}{3} = \pm \frac{5}{3} \\ &\iff x = \frac{1}{3} \pm \frac{5}{3} \iff x = 2 \vee x = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Damit erhält man zwei Schnittpunkte  $S_1 = (2, f_1(2)) = (2, 0)$  und schließlich  $S_2 = \left(-\frac{4}{3}, f_2\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{80}{9}\right)$ .

- 4) a) Es ist  $100a = 13,\overline{3}$  und  $10a = 1,\overline{3}$ , also  $100a - 10a = 12$ , d. h.  $a = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$ .  
 b) Es ist  $0,\overline{27} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$  und folglich

Korr.

$$0,1\overline{3} \cdot 0,\overline{27} = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{11} = \frac{2}{55} = \frac{2}{55}.$$

Durch schriftliche Division  $2 : 55$  erhält man als dezimales Ergebnis  $0,0\overline{36}$ .

- 5) a)  $\sqrt{a}$  ist die nicht-negative Zahl, deren Quadrat  $a$  ist. Sie ist nur definiert, wenn  $a \geq 0$  ist.  
 b) Die Lösungsmenge der Gleichung  $x^2 = a$  ist

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } a < 0, \\ \{0\} & \text{falls } a = 0, \\ \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\} & \text{falls } a > 0. \end{cases}$$

Also hat  $x^2 = a$  keine Lösung für  $a < 0$ , eine Lösung für  $a = 0$  und zwei Lösungen für  $a > 0$ .

- c)  $\alpha$  ist – über dem Definitionsbereich  $a \geq 0$  – allgemeingültig (gemäß Definition von  $\sqrt{a}$ ).  
 $\beta$  ist nicht allgemeingültig: Gegenbeispiel  $a = -1$ .  
 $\gamma$  ist – über dem Definitionsbereich  $a \geq 0, b \geq 0$  – allgemeingültig (3. Binom!).  
 $\delta$  ist *grob* falsch! (Gegenbeispiel  $a = b = 1$ .)

- 6) 1. Weg: Überprüfung gemäß Definition

a)  $\sqrt{8} + \sqrt{2} \geq 0$  und  $(\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 = 8 + 2\sqrt{8}\sqrt{2} + 2 = 10 + 2\sqrt{16} = 18$ , also erfüllt  $\sqrt{8} + \sqrt{2}$  die Definition von  $\sqrt{18}$ , also ist a) richtig.

b)  $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 = 8 - 2\sqrt{16} + 2 = 10 - 8 = 2$ , also ist b) falsch.

c) Beide Seiten sind  $\geq 0$ . Wir zeigen, dass beide dasselbe Quadrat haben:  $\left(\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{24}{3} = 8$  und  $(2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8$ . Also sind beide Seiten gleich  $\sqrt{8}$ , insbesondere ist c) richtig.

2. Weg: Mit Hilfe der Rechenregeln für Wurzeln

a)  $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{2^2}\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$ : a) ist richtig.

b)  $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{2^2}\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \neq \sqrt{6}$ : b) ist falsch.



c)  $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{24}{3}} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ : c) ist richtig.

7)

a)  $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{45}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 45}{15 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 3}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ .

b)  $\frac{\sqrt{48} - \sqrt{3}}{\sqrt{147}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 4^2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3 \cdot 49}} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{3}}{7\sqrt{3}} = \frac{3}{7}$

c)  $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{6}}{\sqrt{8} - \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{6})}{(\sqrt{8} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{6})} = \frac{8 + 2\sqrt{8 \cdot 6} + 6}{8 - 6} = 7 + \sqrt{2^4 \cdot 3} = 7 + 4\sqrt{3}$

d)  $\frac{3 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{6 + \sqrt{3} - 3}{4 - 3} = 3 + \sqrt{3}$

e)m.Korr.  $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} + 5 + 5 - 2\sqrt{5}\sqrt{3} + 3 = 16$

f) 
$$\begin{aligned} & \left( \sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{6}} - \sqrt{\sqrt{8} - \sqrt{6}} \right)^2 \\ &= \sqrt{8} + \sqrt{6} - 2\sqrt{(\sqrt{8} + \sqrt{6})(\sqrt{8} - \sqrt{6})} + \sqrt{8} - \sqrt{6} \\ &= 2\sqrt{8} - 2\sqrt{8 - 6} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

g) 
$$\begin{aligned} & \left( \sqrt{7 - \sqrt{13}} + \sqrt{7 + \sqrt{13}} \right)^2 \\ &= 7 - \sqrt{13} + 2\sqrt{(7 - \sqrt{13})(7 + \sqrt{13})} + 7 + \sqrt{13} \\ \text{Korr :} &= 14 + 2\sqrt{49 - 13} = 26 \end{aligned}$$

8) 1. Unter Verwendung der in Aufgabe 1 bestimmten Scheitelpunktsform:

a)  $f(x) = (x - 2)^2 + 3 = 0 \iff (x - 2)^2 = -3$  hat keine Lösung, da Quadrate nie negativ sind.

b)  $f(x) = -(x + 1)^2 + 2 = 0 \iff (x + 1)^2 = 2 \iff x + 1 = \pm\sqrt{2} \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$ .

c)  $f(x) = -2(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2} = 0 \iff 2(x + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{2}$  hat keine Lösung, da Quadrate nie negativ sind.

d)  $f(x) = 3(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} = 0 \iff 3(x + \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3} \iff (x + \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} \iff x + \frac{1}{3} = \pm\frac{1}{3} \iff x = 0 \vee x = -\frac{2}{3}$ .

e)  $f(x) = -2(x + 1)^2 - 4 = 0 \iff 2(x + 1)^2 = -4$  hat keine Lösung.

f)  $f(x) = -(x - \frac{2}{7})^2 - \frac{3}{7}$  ist immer negativ, hat also keine Nullstelle.

g)  $f(x) = -(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{4} = 0 \iff (x - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{4} \iff x - \frac{1}{3} = \pm\frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \vee x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$ .

h)  $f(x) = -2(x - \frac{2}{5})^2 - \frac{1}{2}$  ist immer negativ, hat also keine Nullstelle.

2. Ohne Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabe 1; zur Übung jeweils mittels  $p, q$ -Formel:

a)  $f(x) = x^2 - 4x + 7 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{4-7} = 2 \pm \sqrt{-3}$ : Der Radikand ist negativ, keine Lösung.

b)  $f(x) = -x^2 - 2x + 1 = 0 \iff x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$ .

c)  $f(x) = -2x^2 - 2x - 2 = 0 \iff x^2 + x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1}$ : Der Radikand ist negativ, keine Lösung.

d) Nicht mit der  $p, q$ -Formel, sondern durch Faktorisieren mittels Ausklammern:  
 $f(x) = 3x^2 + 2x = 0 \iff x(3x + 2) = 0 \iff x = 0 \vee 3x + 2 = 0 \iff x = 0 \vee x = -\frac{2}{3}$ .

e)  $f(x) = -2x^2 - 4x - 6 = 0 \iff x^2 + 2x + 3 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{1-3}$ : Der Radikand ist negativ, keine Lösung.

f)  $f(x) = -7x^2 + 4x - 1 = 0 \iff x^2 - \frac{4}{7}x + \frac{1}{7} = 0 \iff x = \frac{2}{7} \pm \sqrt{\frac{4}{49} - \frac{1}{7}}$ : Der Radikand ist negativ ( $-\frac{3}{49}$ ), keine Lösung.

g)  $f(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{36} = 0 \iff x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{36} = 0 \iff x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{5}{36}} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{2} \iff x = \frac{5}{6} \vee x = -\frac{1}{6}$ .

h)  $f(x) = -2x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{41}{50} = 0 \iff x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{41}{100} = 0 \iff x = \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} - \frac{41}{100}} = \frac{2}{5} \pm \sqrt{-\frac{15}{100}}$ : Der Radikand ist negativ, keine Lösung.

9) a) Binomische Formel:

$x^2 + 4 = 4x \iff 0 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2: \mathbb{L} = \{2\}$ .

b) Ausklammern und binomische Formel:

$2x^2 + 18 = 12x \iff x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x - 3)^2 \iff x = 3: \mathbb{L} = \{3\}$ .

c) Ausklammern:

$0 = 3x^2 + 9x = 3x(x + 3) \iff x = 0 \vee x = -3: \mathbb{L} = \{0, -3\}$ .

d)  $(2x + 1)^2 - 4 = 0 \iff (2x + 1)^2 = 4 \iff 2x + 1 = \pm 2 \iff 2x = 1 \vee 2x = -3 \iff x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{3}{2}: \mathbb{L} = \{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\}$ .

e) Faktorisierung nach Vieta:

$0 = x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1) \iff x = 7 \vee x = -1: \mathbb{L} = \{7, -1\}$ .

f) Faktorisieren nach Vieta:

$0 = x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3) \iff x = 5 \vee x = -3: \mathbb{L} = \{-3, 5\}$ .

g)  $p, q$ -Formel:

$x^2 - 6x + 7 = 0 \iff x = 3 \pm \sqrt{9-7} \iff x = 3 \pm \sqrt{2}: \mathbb{L} = \{3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}\}$ .

h)  $p, q$ -Formel:

$x^2 + 5x + 3 = 0 \iff x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 3} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}: \mathbb{L} = \{-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}, -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}\}$ .

i) Produkt zerlegen:

$(x^2 - 3)(x + 3) = 0 \iff x^2 - 3 = 0 \vee x + 3 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3} \vee x = -3: \mathbb{L} = \{-3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ .

j) Produkt zerlegen:

$(x^2 + 3)(x^3 - 5x) = 0 \iff x^2 = -3 \vee x(x^2 - 5) = 0 \iff x = 0 \vee x^2 = 5 \iff x = 0 \vee x = \pm\sqrt{5}: \mathbb{L} = \{-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}\}$ .