

Ferienübung

- 1) Untersuchen Sie für die nachfolgend definierten quadratischen Funktionen f
- den Verlauf des Graphen,
 - die Anzahl der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
 - ob die Funktion einen größten oder kleinsten Wert annimmt,
 - wie groß dieser Wert ggf. ist und
 - an welcher Stelle er angenommen wird.
- $f(x) = x^2 - 4x + 7$
 - $f(x) = -x^2 - 2x + 1$
 - $f(x) = -2x^2 - 2x - 2$
 - $f(x) = 3x^2 + 2x$
 - $f(x) = -2x^2 - 4x - 6$
 - $f(x) = -7x^2 + 4x - 1$
 - $f(x) = -x^2 + \frac{2}{3} \cdot x + \frac{5}{36}$
 - $f(x) = -2x^2 + \frac{8}{5} \cdot x - \frac{41}{50}$
- 2) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen mittels quadratischer Ergänzung:
- $x^2 - 7x + 12 = 0,$
 - $x^2 + x - 12 = 0,$
 - $x^2 - 6x + 11 = 0,$
 - $3x^2 + 11x - 4 = 0,$
 - $-6x^2 + 17x - 12 = 0,$
 - $9x^2 + 12x + 4 = 0,$
 - $-9x^2 + 6x - 5 = 0,$
 - $6x^2 - x - 12 = 0.$
- 3) Untersuchen Sie die nachfolgend gegebenen Parabeln $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ auf Schnittpunkte.
- \mathcal{P}_1 : Nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S = (1, 2),$
 \mathcal{P}_2 : Graph der Funktion $f_2(x) = x^2 + 4x + 3.$
 - \mathcal{P}_1 : Graph der Funktion $f_1(x) = (x - 1)^2 + 2,$
 \mathcal{P}_2 : Nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (-3, -1).$
 - \mathcal{P}_1 : Lösungsmenge der Gleichung $y + 5 = (x - 3)^2,$
 \mathcal{P}_2 : Nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (1, -1).$
 - \mathcal{P}_1 : Graph der Funktion $f_1(x) = -2(x - 1)^2 + 2,$
 \mathcal{P}_2 : Verschiebung der Parabel mit der Gleichung $y = 3x^2$ um 1 nach links und 2 nach unten.
 - \mathcal{P}_1 : Parabel mit dem Scheitel $S = (1, 0)$ und durch den Punkt $P = (0, -2),$
 \mathcal{P}_2 : Graph der Funktion $f_2(x) = 3(x + 1)^2 - 5.$
 - \mathcal{P}_1 : Parabel mit dem Scheitel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ und dem y -Achsenabschnitt 1,
 \mathcal{P}_2 : Graph der Funktion $f_2(x) = -2(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{13}{2}.$
 - \mathcal{P}_1 : Nach oben geöffnete Normalparabel, die die x -Achse bei +2 und die y -Achse bei -8 schneidet,
 \mathcal{P}_2 : Parabel durch den Koordinatenursprung und mit dem Scheitel $S = (1, 2).$

- 4) a) Ist $a = 0,1\overline{3}$ eine rationale Zahl? Wenn ja, weisen Sie dies durch geeignete Rechnungen nach und bestimmen Sie die gekürzte Bruchdarstellung für a .
 b) Berechnen Sie $0,1\overline{3} \cdot 0,2\overline{7}$ und stellen Sie das Ergebnis als Dezimalzahl dar.

- 5) a) Wie definiert man die Quadratwurzel \sqrt{a} ? Für welche reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ ist sie definiert?

b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $x^2 = a$ (über der Grundmenge \mathbb{R})?. Geben Sie die Lösungsmenge an. (Beachten Sie alle Möglichkeiten für a !)

c) Welche der nachfolgenden Gleichungen sind allgemeingültig (über ihrem Definitionsbereich)?

α) $(\sqrt{a})^2 = a$,

β) $\sqrt{a^2} = a$,

γ) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$,

δ) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

- 6) Überprüfen Sie, ob die folgenden Beziehungen zutreffen oder nicht:

a) $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{18}$. b) $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{6}$. c) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$.

Begründen Sie Ihre Antworten durch geeignete Rechnungen oder Argumentationen.

- 7) Berechnen Sie *ohne* Taschenrechner unter genauer Angabe des Rechenweges die folgenden Wurzelterme *exakt*. Stellen Sie das Ergebnis ohne Wurzeln im Nenner und mit möglichst kleinen Radikanden dar.

a) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{45}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{48} - \sqrt{3}}{\sqrt{147}}$,

c) $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{6}}{\sqrt{8} - \sqrt{6}}$.

d) $\frac{3 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

e) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

f) $\left(\sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{6}} - \sqrt{\sqrt{8} - \sqrt{6}} \right)^2$,

g) $\left(\sqrt{7 - \sqrt{13}} + \sqrt{7 + \sqrt{13}} \right)^2$

- 8) Bestimmen Sie die Nullstellen der in Aufgabe 1) gegebenen Funktionen.

- 9) Lösen Sie – mit möglichst geringem Aufwand – die nachfolgenden Gleichungen:

a) $x^2 + 4 = 4x$,

b) $2x^2 + 18 = 12x$,

c) $3x^2 + 9x = 0$,

d) $(2x + 1)^2 - 4 = 0$,

e) $x^2 - 6x - 7 = 0$,

f) $x^2 - 2x - 15 = 0$,

g) $x^2 - 6x + 7 = 0$,

h) $x^2 + 5x + 3 = 0$,

i) $(x^2 - 3)(x + 3) = 0$,

j) $(x^2 + 3)(x^3 - 5x) = 0$.

Ferienübung — Lösungen

- 1) Generell schneiden Funktionsgraphen die y -Achse genau einmal (Funktionsbegriff: Zu jedem x gehört genau ein Funktionswert $f(x)$). Dieser Teil der Frage ii) ist damit beantwortet und wir werden darauf nicht mehr eingehen.

Alle Graphen sind Parabeln, da die Funktionen quadratisch sind, und man kann ohne weitere Rechnung die Öffnungsrichtung und Form der Parabel am *führenden* Koeffizienten (dem Faktor vor x^2) ablesen.

Um die anderen Fragen beantworten zu können, bestimmen wir durch quadratische Ergänzung die Scheitelpunktsform des Terms $f(x)$ und damit den Scheitelpunkt der jeweiligen Graphen. Im einzelnen erhalten wir so:

a) Es ist $f(x) = x^2 - 4x + 7 = x^2 - 4x + 2^2 - 4 + 7 = (x - 2)^2 + 3$, also:

i) der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S = (2, 3)$,

ii) er trifft die x -Achse nicht, da die Parabel nach oben geöffnet ist und der Scheitelpunkt *oberhalb* der x -Achse liegt ($y_S = 3 > 0$),

iii) die Funktion f nimmt keinen größten, wohl aber einen kleinsten Wert an, da der Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist,

iv) der kleinste Wert von f ist $+3 (= y_S)$, und

v) er wird an der Stelle $2 (= x_S)$ angenommen: $f(2) = 3 \leq f(x)$ für alle x .

b) Es ist $f(x) = -x^2 - 2x + 1 = -(x^2 + 2x - 1) = -(x^2 + 2x + 1^2 - 1 - 1) = -(x + 1)^2 + 2$, also:

i) der Graph ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (-1, 2)$,

ii) er trifft die x -Achse zweimal, da der Scheitel oberhalb der x -Achse liegt und die Parabel nach unten geöffnet ist,

iii)–v) die Funktion f nimmt keinen kleinsten, aber einen größten Wert an, dieser ist $+2$ und wird an der Stelle -1 angenommen: $f(-1) = 2 \geq f(x)$ für alle x .

c) Es ist $f(x) = -2x^2 - 2x - 2 = -2(x^2 + x + 1) = -2(x^2 + x + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1) = -2((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}) = -2(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}$, also:

i) der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, enger als die Normalparabel, mit dem Scheitel $S = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$,

ii) er trifft die x -Achse nicht,

iii) f nimmt keinen kleinsten Wert an, erreicht aber an der Stelle $-\frac{1}{2} (= x_S)$ ihren größten Wert $-\frac{3}{2} (= y_S)$.

d) Es ist $f(x) = 3x^2 + 2x = 3(x^2 + \frac{2}{3}x + (\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9}) = 3((x + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9}) = 3(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$, also:

i) der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel, enger als die Normalparabel, mit dem Scheitel $S = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$,

ii) er trifft die x -Achse zweimal,

iii)–v) f nimmt keinen größten, aber an der Stelle $-\frac{1}{3}$ ihren kleinsten Wert $-\frac{1}{3}$ an.

e) Es ist $f(x) = -2x^2 - 4x - 6 = -2(x^2 + 2x + 3) = -2(x^2 + 2x + 1 - 1 + 3) = -2(x + 1)^2 - 4$, also:

i) der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, enger als eine Normalparabel, mit dem Scheitel $S = (-1, -4)$,

ii) er trifft die x -Achse nicht,

iii)–v) f nimmt keinen kleinsten, aber an der Stelle -1 ihren größten Wert -4 an.

f) Es ist $f(x) = -7x^2 + 4x - 1 = -7(x^2 - \frac{4}{7}x + (\frac{2}{7})^2 - \frac{4}{49}) - 1 = -7(x - \frac{2}{7})^2 + \frac{4}{7} - 1 = -7(x - \frac{2}{7})^2 - \frac{3}{7}$, also:

der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, enger als eine Normalparabel, mit dem Scheitel $S = (\frac{2}{7}, -\frac{3}{7})$,

er schneidet die x -Achse nicht,

f nimmt keinen kleinsten, aber bei $x = \frac{2}{7}$ ihren größten Wert $-\frac{3}{7}$ an.

g) Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + \frac{2}{3} \cdot x + \frac{5}{36} \\ &= -(x^2 - \frac{2}{3}x + (\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9}) + \frac{5}{36} \\ &= -(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{9} + \frac{5}{36} \\ &= -(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

also ist der Graph eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$, er schneidet die x -Achse zweimal und f nimmt keinen kleinsten, aber bei $x = \frac{1}{3}$ ihren größten Wert $\frac{1}{4}$ an.

h) Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + \frac{8}{5} \cdot x - \frac{41}{50} \\ &= -2(x^2 - \frac{4}{5}x + (\frac{2}{5})^2 - \frac{4}{25}) - \frac{41}{50} \\ &= -2(x - \frac{2}{5})^2 + \frac{8}{25} - \frac{41}{50} \\ &= -2(x - \frac{2}{5})^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

also ist der Graph eine nach unten geöffnete Parabel, enger als eine Normalparabel, mit dem Scheitel $S = (\frac{2}{5}, -\frac{1}{2})$, er schneidet die x -Achse nicht, und f nimmt an der Stelle $x = \frac{2}{5}$ als größten Wert $-\frac{1}{2}$ an; einen kleinsten Wert nimmt sie nicht an.

- 2) Wir formen die Gleichungen durch quadratische Ergänzung um in eine Gleichung der Form $(x - x_S)^2 = d$. Ist $d < 0$, so gibt es keine Lösung, da Quadrate niemals negativ sein können. Ist $d = c^2$ eine Quadratzahl, so erhält man die Lösungen $x - x_S = \pm c \iff x = x_S \pm c$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x^2 - 7x + 12 = 0 &\iff x^2 - 7x = -12 \\ &\iff x^2 - 7x + (\frac{7}{2})^2 = -12 + \frac{49}{4} = \frac{1}{4} \\ &\iff (x - \frac{7}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 \\ &\iff x - \frac{7}{2} = \pm \frac{1}{2} \iff x = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \\ &\iff x = 4 \vee x = 3, \end{aligned}$$

$$\text{also: } \mathbb{L} = \{3, 4\}.$$

$$\text{b)} \quad x^2 + x - 12 = 0 \iff x^2 + x = 12$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 12 + \frac{1}{4} = \frac{49}{4} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} &= \pm \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \\ \Leftrightarrow x &= 3 \vee x = -4, \end{aligned}$$

also: $\mathbb{L} = \{-4, 3\}$.

c) $x^2 - 6x + 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 = -11 + 9 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = -2$.

Da die negative Zahl -2 kein Quadrat ist, besitzt diese Gleichung keine Lösung:
 $\mathbb{L} = \emptyset$.

d) $3x^2 + 11x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{11}{3}x = \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x + \frac{11}{3}x + \left(\frac{11}{6}\right)^2 &= \frac{4}{3} + \frac{121}{36} = \frac{169}{36} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{6}\right)^2 &= \left(\frac{13}{6}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x + \frac{11}{6} &= \pm \frac{13}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{6} \pm \frac{13}{6} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3} \vee x = -4, \end{aligned}$$

also: $\mathbb{L} = \left\{-4, \frac{1}{3}\right\}$.

e) $-6x^2 + 17x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{17}{6}x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 - \frac{17}{6}x + \left(\frac{17}{12}\right)^2 &= -2 + \frac{289}{144} = \frac{1}{144} \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{17}{12}\right)^2 &= \left(\frac{1}{12}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x - \frac{17}{12} &= \pm \frac{1}{12} \Leftrightarrow x = \frac{17}{12} \pm \frac{1}{12} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2} \vee x = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

also: $\mathbb{L} = \left\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right\}$.

f) $9x^2 + 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{3}x = -\frac{4}{9}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2 &= -\frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 &= 0 \Leftrightarrow x + \frac{2}{3} = 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

also: $\mathbb{L} = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

$$\begin{aligned}
\text{g)} \quad -9x^2 + 6x - 5 = 0 &\iff x^2 - \frac{2}{3}x = -\frac{5}{9} \\
&\iff x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{5}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{4}{9} \\
&\iff \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9} < 0,
\end{aligned}$$

also: $\mathbb{L} = \emptyset$

$$\begin{aligned}
\text{h)} \quad 6x^2 - x - 12 = 0 &\iff x^2 - \frac{1}{6}x = 2 \\
&\iff x^2 - \frac{1}{6}x + \left(\frac{1}{12}\right)^2 = 2 + \frac{1}{144} = \frac{289}{144} \\
&\iff \left(x - \frac{1}{12}\right)^2 = \left(\frac{17}{12}\right)^2 \\
&\iff x - \frac{1}{12} = \pm \frac{17}{12} \iff x = \frac{1}{12} \pm \frac{17}{12} \\
&\iff x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{4}{3},
\end{aligned}$$

also: $\mathbb{L} = \left\{ -\frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right\}$.

3) Man beschreibt zunächst alle Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen f_1 und f_2 und löst dann die Schnittstellengleichung $f_1(x) = f_2(x)$. Die gefundenen Schnittstellen sind die x -Koordinaten der Schnittpunkte; die y -Koordinaten erhält man durch Einsetzen der Schnittstellen in eine der beiden Funktionsgleichungen.

a) Eine Gleichung für \mathcal{P}_1 ist gegeben durch $y = (x - 1)^2 + 2$, \mathcal{P}_1 ist also Graph der Funktion $f_1(x) = (x - 1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$. Wir lösen nun die Schnittstellengleichung:

$$f_1(x) = f_2(x) \iff x^2 - 2x + 3 = x^2 + 4x + 3 \iff 6x = 0 \iff x = 0.$$

Es gibt also genau eine Schnittstelle $x = 0$; die y -Koordinate des Schnittpunktes ist $f_2(0) = 3$, der einzige Schnittpunkt also $(0, 3)$.

b) \mathcal{P}_2 ist Graph der Funktion $f_2(x) = -(x + 3)^2 - 1 = -x^2 - 6x - 10$. Wir lösen also die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned}
f_1(x) = f_2(x) &\iff (x - 1)^2 + 2 = -(x + 3)^2 - 1 \\
&\iff x^2 - 2x + 3 = -x^2 - 6x - 10 \iff 2x^2 + 4x = -13 \\
&\iff x^2 + 2x = -\frac{13}{2} \iff x^2 + 2x + 1 = -\frac{13}{2} + 1 \\
&\iff (x + 1)^2 = -\frac{11}{2} < 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung, folglich gibt es keine Schnittpunkte.

c) \mathcal{P}_1 ist Graph der Funktion $f_1(x) = (x - 3)^2 - 5 = x^2 - 6x + 4$ und \mathcal{P}_2 ist Graph der Funktion $f_2(x) = -(x - 1)^2 - 1 = -x^2 + 2x - 2$. Wir lösen die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned}
f_1(x) = f_2(x) &\iff x^2 - 6x + 4 = -x^2 + 2x - 2 \iff 2x^2 - 8x + 6 = 0 \\
&\iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x - 1)(x - 3) = 0 \quad (\text{Vieta}) \\
&\iff x = 1 \vee x = 3.
\end{aligned}$$

Es gibt also genau zwei Schnittpunkte:

$$S_1 = (1, f_2(1)) = (1, -1) \text{ und } S_2 = (3, f_2(3)) = (3, -5).$$

d) Verschiebt man die Parabel mit der Gleichung $y = 3x^2$ um 1 nach links und 2 nach unten, so erhält man die Gleichung für die verschobene Parabel \mathcal{P}_2 , indem man x durch $x + 1$ und y durch $y + 2$ ersetzt. Damit ist $y + 2 = 3(x + 1)^2$ eine Gleichung für \mathcal{P}_2 ; \mathcal{P}_2 ist Graph der Funktion $f_2(x) = 3(x + 1)^2 - 2 = 3x^2 + 6x + 1$. Zusammen mit $f_1(x) = -2(x - 1)^2 + 2 = -2x^2 + 4x$ erhält man die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff -2x^2 + 4x = 3x^2 + 6x + 1 \iff 5x^2 + 2x + 1 = 0 \\ &\iff x^2 + \frac{2}{5}x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{25} \\ &\iff \left(x + \frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{4}{25} < 0. \end{aligned}$$

Diese ist unlösbar, da Quadrate nie negativ sein können; es gibt also keine Schnittpunkte.

d) \mathcal{P}_1 ist Graph einer Funktion f_1 mit $f_1(x) = a(x - 1)^2$. Da der Graph durch $P = (0, -2)$ verlaufen soll, ist $f_1(0) = -2$, also $-2 = f_1(0) = a(-1)^2 = a$. Insgesamt erhalten wir $f_1(x) = -2(x - 1)^2 = -2x^2 + 4x - 2$. Zusammen mit dem vorgegebenen Funktionsterm $f_2(x) = 3(x + 1)^2 - 5 = 3x^2 + 6x - 2$ erhalten wir die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff -2x^2 + 4x - 2 = 3x^2 + 6x - 2 \\ &\iff 5x^2 + 2x = 0 \iff 5x\left(x + \frac{2}{5}\right) = 0 \\ &\iff x = 0 \vee x = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Die y -Koordinaten der Schnittpunkte sind $f_2(0) = -2$ und $f_2\left(-\frac{2}{5}\right) = 3 \cdot \frac{9}{25} - 5 = \frac{27-125}{25} = -\frac{98}{25}$, die Schnittpunkte also $S_1 = (0, -2)$ und $S_2 = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{98}{25}\right) = -(0,4; -3,96)$.

f) \mathcal{P}_1 ist Graph von $f_1(x) = a\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$. Da der y -Achsenabschnitt 1 ist, erhalten wir

$$1 = f_1(0) = a \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \iff \frac{a}{9} = \frac{1}{3} \iff a = 3.$$

Damit ist $f_1(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = 3x^2 - 2x + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 3x^2 - 2x + 1$. Für f_2 erhalten wir $f_2(x) = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{2} = -2x^2 - 2x - \frac{1}{2} + \frac{13}{2} = -2x^2 - 2x + 6$. Wir lösen die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff 3x^2 - 2x + 1 = -2x^2 - 2x + 6 \\ &\iff 5x^2 = 5 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1. \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte sind damit $S_1 = (1, f_1(1)) = (1, 2)$ und $S_2 = (-1, f_1(-1)) = (-1, 6)$.

g) Da \mathcal{P}_1 eine nach oben geöffnete Normalparabel ist, ist sie Graph einer normierten quadratischen Funktion $f_1(x) = x^2 + bx + c$. Da die y -Achse bei -8 geschnitten wird, ist $-8 = f_1(0) = c$, also $f_1(x) = x^2 + bx - 8$. Da bei $+2$ die x -Achse geschnitten wird, gilt $0 = f_1(2) = 4 + 2b - 8 = 2b - 4 \iff b = 2$. Insgesamt ist also \mathcal{P}_1 Graph der Funktion $f_1(x) = x^2 + 2x - 8$.

\mathcal{P}_2 ist Graph von $f_2(x) = a(x-1)^2 + 2$. Da die Parabel durch den Koordinatenursprung verläuft, ist $0 = f_2(0) = a + 2$, also $a = -2$.

Wir lösen die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff x^2 + 2x - 8 = -2(x-1)^2 + 2 = -2x^2 + 4x \\ &\iff 3x^2 - 2x = 8 \iff x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{9} = \frac{25}{9} \\ &\iff \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \iff x - \frac{1}{3} = \pm \frac{5}{3} \\ &\iff x = \frac{1}{3} \pm \frac{5}{3} \iff x = 2 \vee x = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Damit erhält man zwei Schnittpunkte $S_1 = (2, f_1(2)) = (2, 0)$ und schließlich $S_2 = \left(-\frac{4}{3}, f_2\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{80}{9}\right)$.

- 4) a) Es ist $100a = 13,\overline{3}$ und $10a = 1,\overline{3}$, also $100a - 10a = 12$, d. h. $a = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.
 b) Es ist $0,\overline{27} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$ und folglich

$$0,1\overline{3} \cdot 0,\overline{27} = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{11} = \frac{2}{55} = \frac{2}{55}.$$

Durch schriftliche Division $2 : 55$ erhält man als dezimales Ergebnis $0,0\overline{36}$.

- 5) a) \sqrt{a} ist die nicht-negative Zahl, deren Quadrat a ist. Sie ist nur definiert, wenn $a \geq 0$ ist.
 b) Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = a$ ist

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } a < 0, \\ \{0\} & \text{falls } a = 0, \\ \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\} & \text{falls } a > 0. \end{cases}$$

Also hat $x^2 = a$ keine Lösung für $a < 0$, eine Lösung für $a = 0$ und zwei Lösungen für $a > 0$.

- c) α ist – über dem Definitionsbereich $a \geq 0$ – allgemeingültig (gemäß Definition von \sqrt{a}).
 β ist nicht allgemeingültig: Gegenbeispiel $a = -1$.
 γ ist – über dem Definitionsbereich $a \geq 0, b \geq 0$ – allgemeingültig (3. Binom!).
 δ ist *grob* falsch! (Gegenbeispiel $a = b = 1$.)

- 6) 1. Weg: Überprüfung gemäß Definition

a) $\sqrt{8} + \sqrt{2} \geq 0$ und $(\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 = 8 + 2\sqrt{8}\sqrt{2} + 2 = 10 + 2\sqrt{16} = 18$, also erfüllt $\sqrt{8} + \sqrt{2}$ die Definition von $\sqrt{18}$, also ist a) richtig.

b) $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 = 8 - 2\sqrt{16} + 2 = 10 - 8 = 2$, also ist b) *falsch*.

c) Beide Seiten sind ≥ 0 . Wir zeigen, dass beide dasselbe Quadrat haben: $\left(\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{24}{3} = 8$ und $(2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8$. Also sind beide Seiten gleich $\sqrt{8}$, insbesondere ist c) richtig.

2. Weg: Mit Hilfe der Rechenregeln für Wurzeln

a) $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{2^2}\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$: a) ist richtig.

b) $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{2^2}\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \neq \sqrt{6}$: b) ist falsch.

c) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{24}{3}} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$: c) ist richtig.

7)

a) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{45}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 45}{15 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 3}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

b) $\frac{\sqrt{48} - \sqrt{3}}{\sqrt{147}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 4^2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3 \cdot 49}} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{3}}{7\sqrt{3}} = \frac{3}{7}$

c) $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{6}}{\sqrt{8} - \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{6})}{(\sqrt{8} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{6})} = \frac{8 + 2\sqrt{8 \cdot 6} + 6}{8 - 6} = 7 + \sqrt{2^4 \cdot 3} = 7 + 4\sqrt{3}$

d) $\frac{3 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{6 + \sqrt{3} - 3}{4 - 3} = 3 + \sqrt{3}$

e) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} + 5 + 5 - 2\sqrt{5}\sqrt{3} + 3 = 16$

f) $\left(\sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{6}} - \sqrt{\sqrt{8} - \sqrt{6}}\right)^2$
 $= \sqrt{8} + \sqrt{6} - 2\sqrt{(\sqrt{8} + \sqrt{6})(\sqrt{8} - \sqrt{6})} + \sqrt{8} - \sqrt{6}$
 $= 2\sqrt{8} - 2\sqrt{8 - 6} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

g) $\left(\sqrt{7 - \sqrt{13}} + \sqrt{7 + \sqrt{13}}\right)^2$
 $= 7 - \sqrt{13} + 2\sqrt{(7 - \sqrt{13})(7 + \sqrt{13})} + 7 + \sqrt{13}$
 $= 14 + 2\sqrt{49 - 13} = 26$

8) 1. Unter Verwendung der in Aufgabe 1 bestimmten Scheitelpunktsform:

a) $f(x) = (x - 2)^2 + 3 = 0 \iff (x - 2)^2 = -3$ hat keine Lösung, da Quadrate nie negativ sind.

b) $f(x) = -(x + 1)^2 + 2 = 0 \iff (x + 1)^2 = 2 \iff x + 1 = \pm\sqrt{2} \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$.

c) $f(x) = -2(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2} = 0 \iff 2(x + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{2}$ hat keine Lösung, da Quadrate nie negativ sind.

d) $f(x) = 3(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} = 0 \iff 3(x + \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3} \iff (x + \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} \iff x + \frac{1}{3} = \pm\frac{1}{3} \iff x = 0 \vee x = -\frac{2}{3}$.

e) $f(x) = -2(x + 1)^2 - 4 = 0 \iff 2(x + 1)^2 = -4$ hat keine Lösung.

f) $f(x) = -(x - \frac{2}{7})^2 - \frac{3}{7}$ ist immer negativ, hat also keine Nullstelle.

g) $f(x) = -(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{4} = 0 \iff (x - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{4} \iff x - \frac{1}{3} = \pm\frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \vee x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$.

h) $f(x) = -2(x - \frac{2}{5})^2 - \frac{1}{2}$ ist immer negativ, hat also keine Nullstelle.

2. Ohne Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabe 1; zur Übung jeweils mittels p, q -Formel:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 7 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{4-7} = 2 \pm \sqrt{-3}$: Der Radikand ist negativ, keine Lösung.

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 1 = 0 \iff x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$.

c) $f(x) = -2x^2 - 2x - 2 = 0 \iff x^2 + x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1}$: Der Radikand ist negativ, keine Lösung.

d) Nicht mit der p, q -Formel, sondern durch Faktorisieren mittels Ausklammern:
 $f(x) = 3x^2 + 2x = 0 \iff x(3x + 2) = 0 \iff x = 0 \vee 3x + 2 = 0 \iff x = 0 \vee x = -\frac{2}{3}$.

e) $f(x) = -2x^2 - 4x - 6 = 0 \iff x^2 + 2x + 3 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{1-3}$: Der Radikand ist negativ, keine Lösung.

f) $f(x) = -7x^2 + 4x - 1 = 0 \iff x^2 - \frac{4}{7}x + \frac{1}{7} = 0 \iff x = \frac{2}{7} \pm \sqrt{\frac{4}{49} - \frac{1}{7}}$: Der Radikand ist negativ ($-\frac{3}{49}$), keine Lösung.

g) $f(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{36} = 0 \iff x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{36} = 0 \iff x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{5}{36}} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{2} \iff x = \frac{5}{6} \vee x = -\frac{1}{6}$.

h) $f(x) = -2x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{41}{50} = 0 \iff x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{41}{100} = 0 \iff x = \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} - \frac{41}{100}} = \frac{2}{5} \pm \sqrt{-\frac{15}{100}}$: Der Radikand ist negativ, keine Lösung.

9) a) Binomische Formel:

$x^2 + 4 = 4x \iff 0 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2: \mathbb{L} = \{2\}$.

b) Ausklammern und binomische Formel:

$2x^2 + 18 = 12x \iff x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x - 3)^2 \iff x = 3: \mathbb{L} = \{3\}$.

c) Ausklammern:

$0 = 3x^2 + 9x = 3x(x + 3) \iff x = 0 \vee x = -3: \mathbb{L} = \{0, -3\}$.

d) $(2x + 1)^2 - 4 = 0 \iff (2x + 1)^2 = 4 \iff 2x + 1 = \pm 2 \iff 2x = 1 \vee 2x = -3 \iff x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{3}{2}: \mathbb{L} = \{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\}$.

e) Faktorisierung nach Vieta:

$0 = x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1) \iff x = 7 \vee x = -1: \mathbb{L} = \{7, -1\}$.

f) Faktorisieren nach Vieta:

$0 = x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3) \iff x = 5 \vee x = -3: \mathbb{L} = \{-3, 5\}$.

g) p, q -Formel:

$x^2 - 6x + 7 = 0 \iff x = 3 \pm \sqrt{9-7} \iff x = 3 \pm \sqrt{2}: \mathbb{L} = \{3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}\}$.

h) p, q -Formel:

$x^2 + 5x + 3 = 0 \iff x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 3} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}: \mathbb{L} = \{-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}, -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}\}$.

i) Produkt zerlegen:

$(x^2 - 3)(x + 3) = 0 \iff x^2 - 3 = 0 \vee x + 3 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3} \vee x = -3: \mathbb{L} = \{-3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

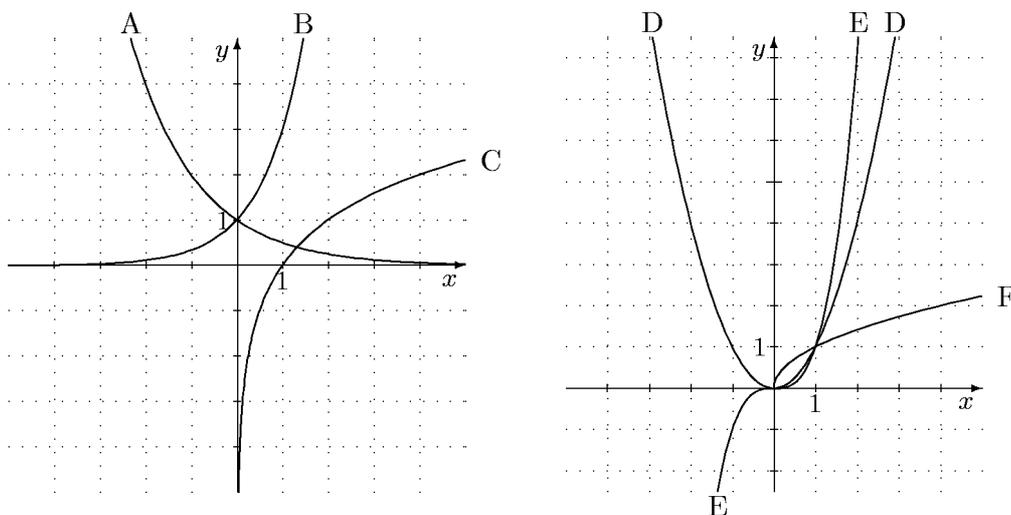
j) Produkt zerlegen:

$(x^2 + 3)(x^3 - 5x) = 0 \iff x^2 = -3 \vee x(x^2 - 5) = 0 \iff x = 0 \vee x^2 = 5 \iff x = 0 \vee x = \pm\sqrt{5}: \mathbb{L} = \{-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}\}$.

Diverse Übungen

- 1) Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen:
- a) $\sqrt{4x^2 + 4x} = 2x + 2$, b) $\sqrt{4x - 3} - 5x + 4 = 0$,
- 2) a) Definieren Sie $\sqrt[n]{a}$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$. Welche Fälle muss man unterscheiden? Welche Voraussetzungen müssen für a in den jeweiligen Fällen erfüllt sein?
- b) Richtig oder falsch?
- i) $\sqrt[5]{a^3} = (\sqrt[5]{a})^3$, ii) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[15]{a^3}$,
- iii) $\frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[15]{a}$, iv) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[15]{a}$,
- c) Berechnen Sie ohne Taschenrechner unter Angabe der Rechenschritte:
- i) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{-4}$, ii) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$, iii) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$,
- d) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
- i) $(x - 3)^4 = 256$, ii) $(x + 5)^5 = -32$,
- iii) $\sqrt[3]{2x^2 + 3x} = x$, iv) $(1 + p)^{10} = 1,5$.
- 3) Ein Sparer möchte 10000,- EURO anlegen und nach 10 Jahren einen Wertzuwachs von 50% erreichen. Wie hoch sollte der jährliche Zinssatz sein?
- 4) a) Was versteht man unter dem Logarithmus von x zur Basis a ? Welche Bedingung müssen x und a erfüllen, damit der Logarithmus definiert ist?
- b) Formulieren Sie wenigstens zwei Rechenregeln für Logarithmen.
- c) Berechnen Sie ohne Taschenrechner unter Angabe der Rechenschritte:
- i) $\log_3(\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt{27})$ ii) $\log_2(4^{12} \cdot 2^{-23})$ iii) $\log_4\left(\frac{\sqrt[7]{32}}{\sqrt[3]{4}}\right)$
- d) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
- i) $10^{(x^3)} = 100^{2x}$, ii) $(\sqrt{2})^{x+1} = (\sqrt[8]{8})^x$,
- iii) $\log_5(x^3 - 2) = 2$, iv) $(1 + 0,03)^n = 1,5$.
- 5) Ein Sparer hat 10000,- EUR für 10 Jahre zu einem jährlichen Zinssatz von 3% angelegt.
- a) Wie groß ist sein Kapital nach 5 Jahren, wie groß nach Ablauf der Festlegungsfrist?
- b) Für wie lange müsste der Sparer sein Geld nach den 10 Jahren noch festlegen, um bei unverändertem Zinssatz eine Verdopplung seines Ausgangskapitals zu erreichen?

- 6) Gegeben sind 6 Funktionsgraphen A–F. Sie stellen Potenz-, Exponential- oder deren Umkehrfunktionen dar.



- Geben Sie für jeden Graphen an, um welchen der genannten Funktionstypen es sich handelt und an welchen Eigenschaften Sie dies erkennen konnten.
- Bestimmen Sie für jeden Graphen einen genauen Funktionsterm.
- Markieren und nennen Sie Punkte auf den Graphen, mit deren Hilfe Sie in b) die Funktionsterme ermitteln konnten.

Diverse Übungen — Lösungen

- 1) Wurzelgleichungen löst man, indem man den Wurzelterm isoliert (wenn möglich) und dann beide Seiten der Gleichung quadriert. Dies ist jedoch i. a. keine Äquivalenzumformung, nur eine logische Folgerung, so dass am Ende nach Bestimmung der *möglichen* Lösungen eine Probe notwendig ist.
- a) Über dem (nicht bestimmten) Definitionsbereich \mathbb{D} gelten die folgenden logischen Beziehungen:

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2 + 4x} = 2x + 2 &\implies 4x^2 + 4x = (2x + 2)^2 = 4x^2 + 8x + 4 \\ &\iff 4x = -4 \iff x = -1.\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass -1 die einzig *mögliche* Lösung der Ausgangsgleichung ist. Durch Einsetzen stellen wir fest, dass -1 auch *tatsächlich* Lösung der Wurzelgleichung ist.

b) Wir isolieren zunächst den Wurzelterm auf einer Seite und quadrieren dann:

$$\begin{aligned}\sqrt{4x - 3} - 5x + 4 = 0 &\iff \sqrt{4x - 3} = 5x - 4 \\ \implies 4x - 3 = 25x^2 - 40x + 16 &\iff 25x^2 - 44x + 19 = 0.\end{aligned}$$

Diese letzte quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen $+1$ und $\frac{19}{25}$. Dies sind die einzig möglichen Lösungen der gegebenen Wurzelgleichung. Setzt man nun $+1$ in die linke Seite ein, so erhält man $\sqrt{4 \cdot 1 - 3} - 5 \cdot 1 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$: $+1$ ist eine Lösung. Beim Einsetzen von $\frac{19}{25}$ erhält man

$$\sqrt{4 \cdot \frac{19}{25} - 3} - 5 \cdot \frac{19}{25} + 4 = \sqrt{\frac{76 - 75}{25}} - \frac{19}{5} + 4 = \frac{1}{5} - \frac{19}{5} + 4 \neq 0.$$

Also ist $\frac{19}{25}$ *keine* Lösung der gestellten Wurzelgleichung. Die Lösungsmenge also $\mathbb{L} = \{1\}$.

- 2) a) Bei der Definition von $\sqrt[n]{a}$ muss man die *Parität* von n unterscheiden:
1. $n > 1$ ungerade: Keine Bedingung für den Radikanden a . $\sqrt[n]{a}$ ist die reelle Zahl, deren n -te Potenz a ergibt: $y = \sqrt[n]{a} \iff y^n = a$.
 2. $n > 1$ gerade: Der Radikand a muss ≥ 0 sein. Dann ist $\sqrt[n]{a}$ definiert als die reelle Zahl, die selbst ≥ 0 ist und deren n -te Potenz a ist:

$$\text{Für } a \geq 0: \quad y = \sqrt[n]{a} \iff y \geq 0 \wedge y^n = a.$$

b) i) richtig, ii) falsch, iii) richtig, iv) richtig.

c) i) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{-4} = -\sqrt[5]{2^3 \cdot 2^2} = -2$,

ii) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 2^4} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$.

iii) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{1}{5}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{13}{15}} = \sqrt[15]{2^{13}}$.

d) Bei Potenzgleichungen muss man zwischen geraden und ungeraden Exponenten unterscheiden. Es gelten folgende Äquivalenzumformungen:

$$x^n = a \begin{cases} \text{hat keine Lösung} & \text{falls } n \text{ gerade und } a < 0, \\ \iff x = \pm \sqrt[n]{a} & \text{falls } n \text{ gerade und } a \geq 0, \\ \iff x = \sqrt[n]{a} & \text{falls } n \text{ ungerade (} a \text{ beliebig)}. \end{cases}$$

Bei Wurzelgleichungen beachte man, dass die Potenzierung mit *ungeraden* Exponenten uneingeschränkt eine Äquivalenzumformung ist, während die Potenzierung mit *geraden* Exponenten i. a. nur eine logische Folgerung ist und daher am Ende eine Probe notwendig ist (siehe Aufgabe 1).

- i) $(x - 3)^4 = 256 \iff x - 3 = \pm \sqrt[4]{256} = \pm 4 \iff x = 7 \vee x = -1,$
 ii) $(x + 5)^5 = -32 \iff x + 5 = \sqrt[5]{-32} = -2 \iff x = -7,$
 iii) $\sqrt[3]{2x^2 + 3x} = x \iff 2x^2 + 3x = x^3$
 $\iff 0 = x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3)$
 $\iff x = 0 \vee 0 = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ (Vieta!)
 $\iff x = 0 \vee x = 3 \vee x = -1,$
 iv) $(1 + p)^{10} = 1,5 \iff 1 + p = \pm \sqrt[10]{1,5}$
 $\iff p = \sqrt[10]{1,5} - 1 \approx 0,041 \vee p = -\sqrt[10]{1,5} - 1 \approx -2,041.$

- 3) Sei p der gesuchte jährliche Zinssatz. Dann wächst ein Kapital K in einem Jahr um die Zinsen $Z = p \cdot K$, nach einem Jahr beträgt das neue Kapital also $K + Z = K + p \cdot K = K \cdot (1 + p)$. Das Kapital multipliziert sich also jedes Jahr mit dem Faktor $1 + p$. In 10 Jahren wachsen 10000 EURO daher auf $10000 \cdot (1 + p)^{10}$. Bei dem geforderten Wertzuwachs von 50% nach 10 Jahren muss also gelten:

$$15000 = 10000 \cdot (1 + p)^{10} \iff (1 + p)^{10} = 1,5 \iff 1 + p = \pm \sqrt[10]{1,5}$$

$$\iff p = \sqrt[10]{1,5} - 1 \approx 0,041 = 4,1\% \vee p = -\sqrt[10]{1,5} - 1 \approx -2,041.$$

Da der negative Wert für die Aufgabenstellung nicht in Frage kommt, müsste der jährliche Zinssatz 4,1% betragen.

- 4) a) Der Logarithmus von x zur Basis a ist der Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um x zu erhalten. Der Logarithmus existiert und ist eindeutig definiert, wenn $x > 0$ und $a > 0, a \neq 1$ ist.

b) Für Logarithmen gilt:

i) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$ ii) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x).$

c) i) $\log_3(\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt{27}) = \frac{1}{4} \log_3(9) + \frac{1}{2} \cdot \log_3(27) = \frac{2}{4} + \frac{3}{2} = 2,$

ii) $\log_2(4^{12} \cdot 2^{-23}) = 12 \log_2(4) - 23 \log_2(2) = 12 \cdot 2 - 23 = 1,$

iii) $\log_4\left(\frac{\sqrt[7]{32}}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{1}{7} \log_4(2^5) - \frac{1}{3} \log_4(4) = \frac{5}{7} \log_4(2) - \frac{1}{3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{42}.$

d) Exponentialgleichungen löst man durch Logarithmieren, Logarithmengleichungen durch Anwendung der zugehörigen Exponentialfunktion.

i) $10^{(x^3)} = 100^{2x} \iff x^3 \log(10) = 2x \log(100) = 2x \log(10^2) = 4x \log(10)$
 $\iff x^3 = 4x \iff 0 = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$
 $\iff x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2,$

ii) $(\sqrt{2})^{x+1} = (\sqrt[8]{8})^x \iff (x + 1) \log(\sqrt{2}) = x \cdot \frac{1}{8} \log(8)$
 $\iff (x + 1) \cdot \frac{1}{2} \log(2) = \frac{x}{8} \cdot 3 \log(2) \iff \frac{x + 1}{2} = \frac{3x}{8}$
 $\iff 4(x + 1) = 3x \iff x = -4,$

$$\text{iii) } \log_5(x^3 - 2) = 2 \iff x^3 - 2 = 5^2 \iff x^3 = 27 = 3^3 \iff x = 3,$$

$$\text{iv) } (1 + 0,03)^n = 1,5 \iff n \log(1,03) = \log(1,5)$$

$$\iff n = \frac{\log(1,5)}{\log(1,03)} \approx 13,7$$

- 5) a) Sei $p = 3\% = 0,03$ der Jahreszinssatz. Dann erhöht sich ein Kapital K in jedem Jahr auf $K + K \cdot p = K(1+p)$, wird also mit dem Faktor $1+p$ multipliziert. In 5 (10) Jahren wird das Kapital also fünfmal (zehnmal) mit diesem Faktor multipliziert, also insgesamt mit $(1+p)^5$ bzw. $(1+p)^{10}$. Dies ergibt als Kapital K_5 nach 5 bzw. K_{10} nach 10 Jahren :

$$K_5 = 10000 \cdot 1,03^5 \approx 11592,74, \quad K_{10} = 10000 \cdot 1,03^{10} \approx 13439,16.$$

- b) Sei n die gesamte Anlegungsdauer (in Jahren) für eine Verdopplung des Kapitals. Dann muss gelten

$$20000 = 10000 \cdot (1 + 0,03)^n \iff 2 = 1,03^n$$

$$\iff \log(2) = n \log(1,03) \iff n = \frac{\log(2)}{\log(1,03)} \approx 23,4.$$

Nach den 10 Jahren muss das Kapital noch weitere 13,4 Jahre festgelegt werden, um insgesamt eine Verdopplung zu erreichen.

- 6) a) Angesichts der eingeschränkten Auswahl sind die Funktionstypen sehr einfach erkennbar:

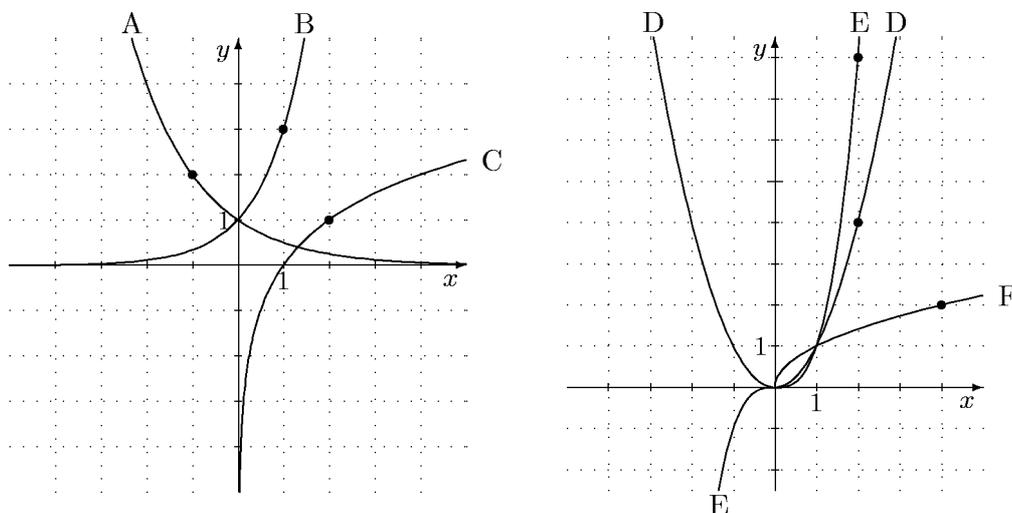
A und B sind Graphen von Exponentialfunktionen, da (nur) sie durch den Punkt $(0, 1)$ verlaufen. Bei A ist die Basis kleiner als 1, da A monoton fällt, bei B ist die Basis größer als 1, da B monoton steigt.

C ist Graph einer Logarithmusfunktion, da (nur) er durch den Punkt $(1, 0)$ verläuft. D ist Graph einer Potenzfunktion mit geradem Exponenten, da er achsensymmetrisch (zur y -Achse) ist und durch $(0, 0)$ verläuft.

Entsprechend ist E Graph einer Potenzfunktion mit ungeradem Exponenten, da er punktsymmetrisch (zum Koordinatenursprung) ist.

F ist der Graph einer Wurzelfunktion (mit geradem Wurzelexponenten), da sie durch $(0, 0)$ verläuft und für $x < 0$ nicht definiert ist.

- b)/c) Markierte Punkte:



A: Gemäß a) ist A Graph einer Exponentialfunktion $f_1(x) = a^x$. Da der Punkt

- $(-1, 2)$ zum Graphen A gehört, gilt $2 = f_1(-1) = a^{-1} \iff a = \frac{1}{2}$. Also ist A Graph von $f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$.
- B: Gemäß a) ist B Graph einer Exponentialfunktion $f_2(x) = b^x$. Da der Punkt $(1, 3)$ zum Graphen B gehört, gilt $3 = f_2(1) = b^1 = b$, also ist B der Graph von $f_2(x) = 3^x$.
- C: Gemäß a) ist C Graph einer Logarithmusfunktion $f_3(x) = \log_a(x)$. Da der Punkt $(2, 1)$ zu C gehört, gilt $1 = f_3(2) = \log_a(2) \iff a^1 = 2$, also ist C der Graph von $f_3(x) = \log_2(x)$.
- D: D ist Graph einer Potenzfunktion $f_4(x) = x^n$ mit geradem n . Da der Punkt $(2, 4)$ zu D gehört, gilt $4 = f_4(2) = 2^n \iff n = 2$, also ist D der Graph von $f_4(x) = x^2$.
- E: E ist Graph einer Potenzfunktion $f_5(x) = x^m$ mit ungeradem n . Da der Punkt $(2, 8)$ zu E gehört, gilt $8 = f_5(2) = 2^m \iff m = 3$, also ist D der Graph von $f_5(x) = x^3$.
- F: F ist der Graph von $f_6(x) = \sqrt[m]{x}$ mit geradem Wurzelexponenten m . Da der Punkt $(4, 2)$ zu F gehört, gilt $2 = f_6(4) = \sqrt[m]{4} \iff m = 2$, also ist F der Graph der Wurzelfunktion \sqrt{x} .