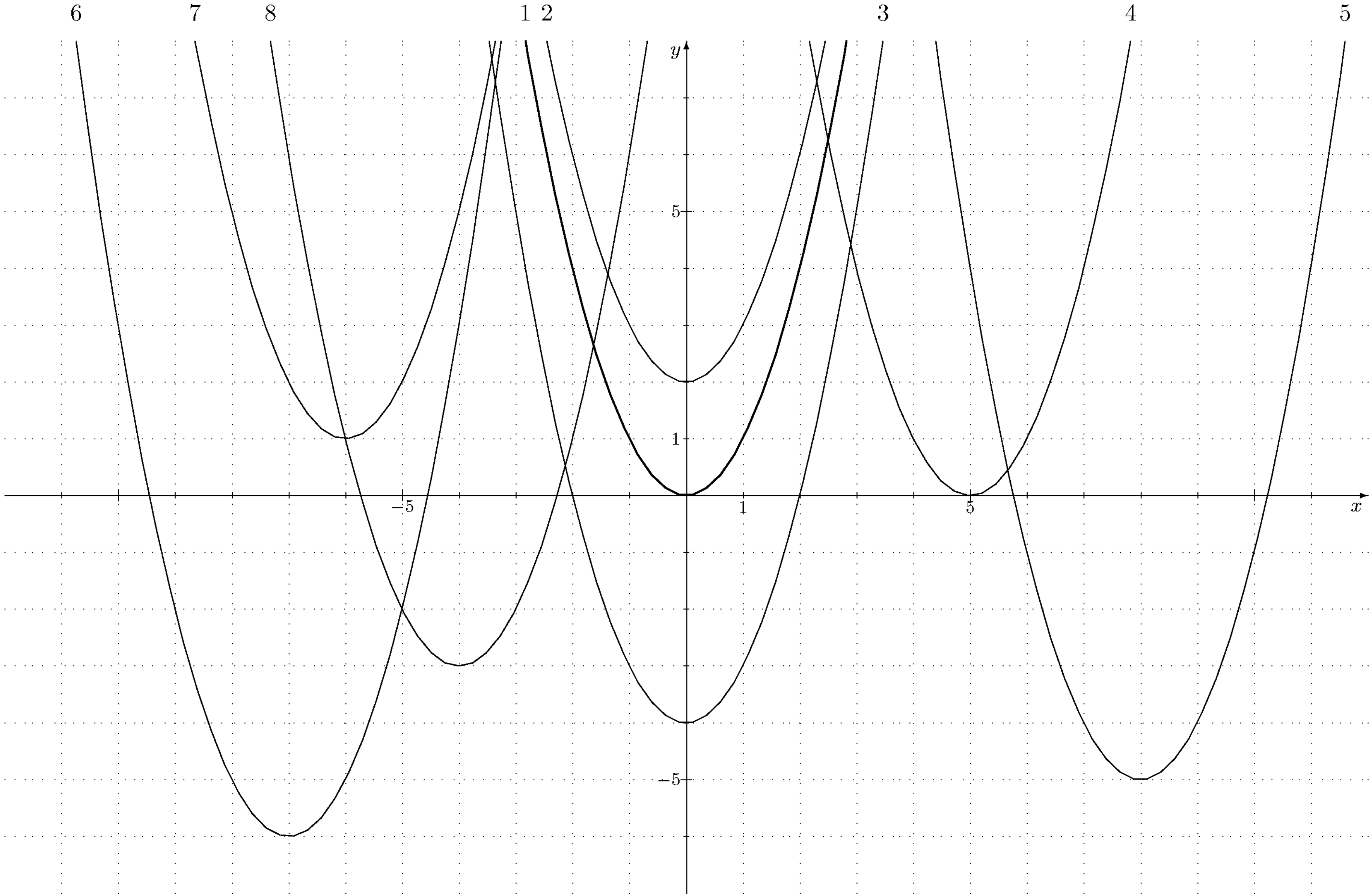
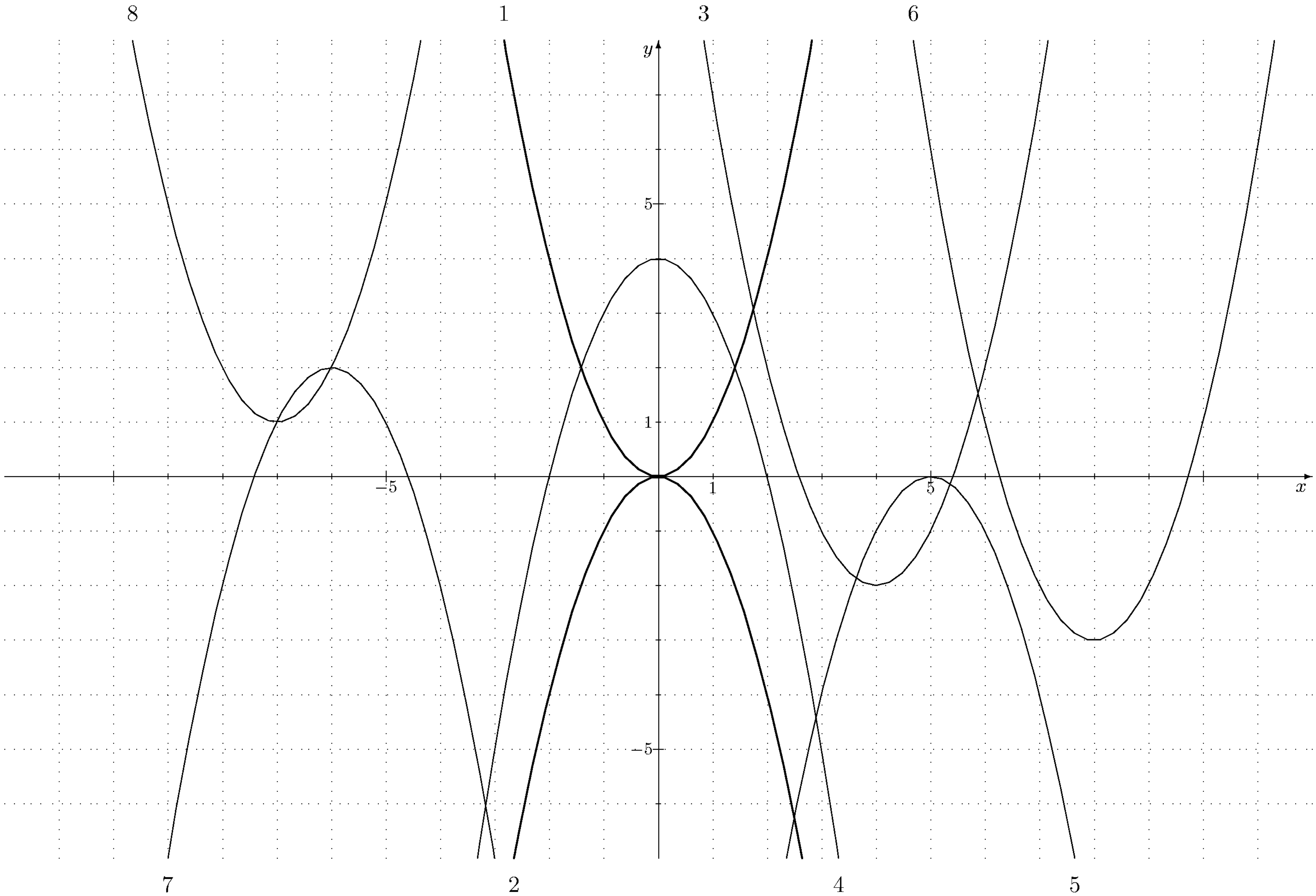
Übungen (1)

1) Auf den Skizzenblättern Normalparabeln (1) bzw. (2) sind ausschließlich Normalparabeln skizziert.
   a) Bestimmen Sie Gleichungen für die auf Blatt (1) skizzierten Graphen.
   b) Führen Sie dasselbe für Blatt (2) durch.
2) Beschreiben Sie die Lösungsmengen der folgenden Relationsgleichungen:
   a) $y = x^2 + 1$,
   b) $y = -x^2 - 4$,
   c) $y = -(x + 2)^2$,
   d) $y = (x - 2)^2 + 3$,
   e) $y = (x + 1)^2 + 4$,
   f) $y = 3x - 4$,
   g) $y + 6 = x^2$,
   h) $y - 4 = -x^2$,
   i) $y - (x + 4)^2 + 1 = 0$,
   j) $y = -((x - 2)^2 + 3)$,
   k) $y - 2 = (x + 2)^2$,
   l) $y^2 = x$.
3) Welche der nachfolgenden Relationsgleichungen lassen sich äquivalent in Scheitelpunktsform umformen? Geben Sie die Lösungsmenge an.
   a) $y = x^2 + 2x + 1$,
   b) $y = -x^2 - 4x - 4$,
   c) $y = x^2 - 6x + 9$,
   d) $y - 1 = x^2 + 4x + 4$,
   e) $y + 3 = x^2 - 10x + 25$,
   f) $y + 2 = -x^2 + 2x - 1$,
   g) $y - 1 = x^2 - 2x$,
   h) $y - 4 = x^2 - 4x$,
   i) $y = x^2 - 4x$,
   j) $y = x^2 - 4x + 5$.
4) Bestimmen Sie die Graphen der Funktionen mit den nachfolgend definierten Funktionstermen:
   a) $f(x) = x^2 + 4x - 7$,
   b) $f(x) = (x - 4)^2 + 2x$,
   c) $f(x) = -x^2 + 4x - 6$,
   d) $f(x) = x^2 + 5x - 2$,
   e) $f(x) = -(x - 2)^2 + 8x + 3$,
   f) $f(x) = (-x + 2)^2 + 5$,
   g) $f(x) = x^2 + 7x - 1$,
   h) $f(x) = -x^2 - x + 1$,
   i) $f(x) = (x + 2)^2 - x^2 - 4$,
   j) $f(x) = x^2 + 5(x + 1)$.
5) Bestimmen Sie die Graphen der nachfolgend definierten Funktionen.
   a) $f(x) = (2x - 2)^2 - (x - 1)^2 + 5$,
   b) $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3(x - 1)$,
   c) $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$,
   d) $f(x) = 4x^3 + (2x^2 + 1)(1 - 2x)$,
   e) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 7$,
   f) $f(x) = \frac{1}{3}(x - 2)(3 - x)$.
6) a) Gegeben ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S = (4, 2)$. Wie lautet eine Gleichung für die Symmetrieachse dieser Parabel? In wievielen Punkten trifft die Parabel die x-Achse?
   b) Man verschiebt die Parabel aus a) um 3 Einheiten nach unten und um 2 Einheiten nach links. Bestimmen Sie eine Gleichung für diese verschobene Parabel und beantworten Sie für diese neue Parabel die Fragen von a).
7) Gegeben ist die Funktion f mit dem Term $f(x) = 2x^2 + 4x - 7$. Untersuchen Sie, welche Werte f annehmen kann. Gibt es einen *kleinsten* Wert $f(x)$, den die Funktion f annimmt? An welcher Stelle x nimmt sie ihn ggf. an? Gibt es auch einen größten Wert, den f annimmt?
8) Eine Parabel hat ihren Scheitel im Punkt $S = (2, -1)$ und verläuft durch den Punkt $P = (3, 1)$. Bestimmen Sie eine Gleichung, deren Lösungsmenge diese Parabel ist. In welche Richtung ist die Parabel geöffnet? Ist sie enger oder weiter als die Normalparabel?

Normalparabeln (1)



Normalparabeln (2)



Übungen (1) — Lösungen

1) a) Alle skizzierten Normalparabeln entstehen durch Verschiebung aus der Normalparabel Nr. 1 mit der Gleichung $y = x^2$. Man muss nur aus der Lage des Scheitelpunkts die Verschiebung ablesen und erhält dann die folgenden Gleichungen:

1:	$y = x^2$	5:	$y = (x-8)^2 - 5$
2:	$y = x^2 + 2$	6:	$y = (x+7)^2 - 6$
3:	$y = x^2 - 4$	7:	$y = (x+6)^2 + 1$
4:	$y = (x-5)^2$	8:	$y = (x+4)^2 - 3$

Man erhält also in allen Fällen eine Gleichung der Form $y = (x - x_S)^2 + y_S$, wobei $(x_S, y_S) = S$ der Scheitelpunkt ist. Man nennt diese Gleichung auch die *Scheitelpunktsgleichung* für die Parabel.

b) Hier sind einige Normalparabeln nach unten geöffnet. Sie erhält man, indem man zunächst die Normalparabel Nr. 1 an der x-Achse spiegelt (das Ergebnis ist die ebenfalls dicker gezeichnete Normalparabel Nr. 2 mit der Gleichung $-y = x^2$ bzw. $y = -x^2$) und diese dann verschiebt. Man erhält also für die *nach oben geöffneten* Normalparabeln eine Gleichung in der bisher behandelten Scheitelpunktsform $y = (x - x_S)^2 + y_S$, während sich für die *nach unten geöffneten* Normalparabeln Gleichungen in der Form $y = -(x-x_S)^2 + y_S$ ergeben. Beide Gleichungstypen kann man zusammenfassen als:

$$\text{Allgemeine Scheitelpunktsgleichung:} \qquad y = a(x - x_S)^2 + y_S\,.$$

Dabei ist hier $a = \pm 1$; und zwar $a = +1$ bei nach *oben* und $a = -1$ bei nach *unten* geöffneten Normalparabeln.

Als Gleichungen für die 'Normalparabeln (2)' erhält man so:

1:	$y = x^2$	5:	$y = -(x-5)^2$
2:	$y = -x^2$	6:	$y = (x-8)^2 - 3$
3:	$y = (x-4)^2 - 2$	7:	$y = -(x+6)^2 + 2$
4:	$y = -x^2 + 4$	8:	$y = (x+7)^2 + 1$

2) Die Gleichungen a)–e) haben sämtlich die Form $y = \pm(x - x_S)^2 + y_S$, so dass die Lösungsmengen Normalparabeln sind. Der Scheitel ist dann durch $S = (x_S, y_S)$ gegeben und das Vorzeichen des Quadrats $(x - x_S)^2$ gibt die Öffnungsrichtung an. Damit ist dann die Lage der Normalparabeln eindeutig beschrieben:

a)	Scheitel $S = (0, 1)$,	nach oben geöffnet,
b)	Scheitel $S = (0, -4)$,	nach unten geöffnet,
c)	Scheitel $S = (-2, 0)$,	nach unten geöffnet,
d)	Scheitel $S = (2, 3)$,	nach oben geöffnet,
e)	Scheitel $S = (-1, 4)$,	nach oben geöffnet.

f) ist eine lineare Funktionsgleichung. Die Lösungsmenge also eine Gerade, und zwar mit dem y-Achsenabschnitt -4 und Anstieg 3.

Die Gleichungen g)–k) lassen sich durch einfache Äquivalenzumformungen in Scheitelpunktsform bringen, so dass die Lösungsmenge ebenfalls Normalparabeln sind:

g)	$\iff y = x^2 - 6$,	Scheitel $S = (0, -6)$,	nach oben geöffnet,
h)	$\iff y = -x^2 + 4$,	Scheitel $S = (0, 4)$,	nach unten geöffnet,
i)	$\iff y = (x+4)^2 - 1$,	Scheitel $S = (-4, -1)$,	nach oben geöffnet,
j)	$\iff y = -(x-2)^2 - 3$,	Scheitel $S = (2, -3)$,	nach unten geöffnet,

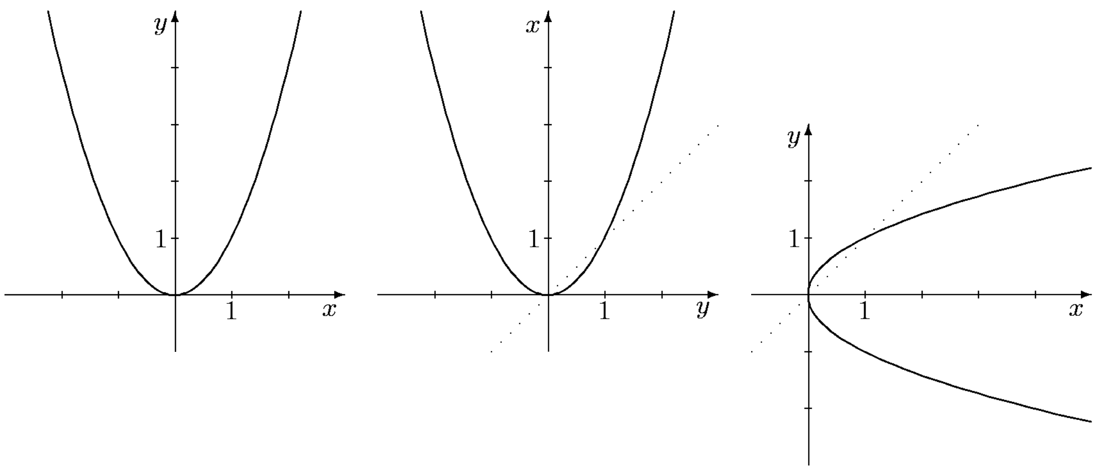
k) $\iff y = (x+2)^2 + 2$, Scheitel $S = (-2, 2)$, nach oben geöffnet.

l) Die gegebene Gleichung $y^2 = x$ ist zwar auch quadratisch, aber hier ist das y quadriert und nicht die Variable x. Daher hat die Gleichung zwei verschiedene Lösungen mit gleicher x-Koordinate: $(1, 1)$ und $(1, -1)$. Also kann sie nicht äquivalent zu einer Funktionsgleichung $y = f(x)$ sein und erst recht nicht in Scheitelpunktsform $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ umgeformt werden.

Dennoch kann man die Ähnlichkeit mit einer Scheitelpunktsgleichung benutzen, um die Lösungsmenge zu ermitteln. Vertauscht man in der gegebenen Gleichung $y^2 = x$ die Variablen x und y, so erhält man die bekannte Gleichung $x^2 = y$; deren Lösungsmenge ist die nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel im Koordinatenursprung (erste Skizze).

Welche geometrische Bedeutung hat nun die Vertauschung der beiden Variablen? Zunächst einmal bedeutet dies, dass man die Benennung der Koordinatenachsen ausgetauscht hat (zweite Skizze). Um danach wieder die vereinbarte Lage der Achsen zu erhalten, muss man das gesamte Bild an der (gestrichelt gezeichneten) Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten *spiegeln*! Dann nimmt die y-Achse die Lage der x-Achse ein und umgekehrt. Dies führt dann zur dritten Skizze. Die Lösungsmenge von $x = y^2$ ist also (im korrekt orientierten Koordinatensystem) eine nach rechts geöffnete Normalparabel mit der x-Achse als Symmetrieachse und dem Scheitelpunkt $S = (0, 0)$!

Graph von $y = x^2$ **Umbenannte Achsen** **Graph von $x = y^2$**



Die obigen Überlegungen gelten allgemein für beliebige Relationen.Vertauscht man in einer Relations(un)gleichung die Variablen x und y, so erhält man die sog. *Umkehrrelation.* Deren Graph entsteht aus dem ursprünglichen durch Spiegelung an der 45^0-Linie. Beachten Sie, dass der letzte Schritt nicht eine Drehung um 90^0 bedeutet, denn dabei würde dann die x-Achse zwar richtig liegen, aber die y-Achse würde *nach unten* weisen.

3) Bei dieser Aufgabe benutzt man die binomischen Formeln, um die gegebenen Gleichungen in Scheitelpunktsform umzuformen. Die Lösungsmengen sind also wiederum Normalparabeln, deren Scheitelpunkt und Öffnungsrichtung nachfolgend angegeben sind:

a) $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, Scheitel $S = (-1, 0)$, nach oben offen,
b) $y = -(x^2 + 4x + 4) = -(x+2)^2$, Scheitel $S = (-2, 0)$, nach unten offen,
c) $y = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, Scheitel $S = (3, 0)$, nach oben offen,

d) $\iff y = (x+2)^2 + 1,$ Scheitel $S = (-2, 1)$, nach oben offen,
e) $\iff y = (x-5)^2 - 3,$ Scheitel $S = (5, -3)$, nach oben offen,
f) $y + 2 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2$
$\iff y = -(x-1)^2 - 2,$ Scheitel $S = (1, -2)$, nach unten offen,
g) $\iff y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2,$ Scheitel $S = (1, 0)$, nach oben offen,
h) $\iff y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2,$ Scheitel $S = (2, 0)$, nach oben offen,
i) $\iff y + 4 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
$\iff y = (x-2)^2 - 4,$ Scheitel $S = (2, -4)$, nach oben offen,
j) $y = x^2 - 4x + 4 \; + \; 1 = (x-2)^2 + 1,$ Scheitel $S = (2, 1)$, nach oben offen.

Die Idee für den Ansatz bei i) ergibt sich aus dem Vergleich mit h), wo auf der rechten Seite derselbe Term steht. Dieser wurde durch Addition von 4 zu einem vollständigen Quadrat; also kann man bei i) dies ebenfalls durchführen, um zur gewünschten Scheitelpunktsform zu kommen. Ähnlich ging man bei j) vor, nur dass man statt 4 zu addieren die 5 in $4 + 1$ aufspaltete, um ein volles Quadrat zu erhalten.

4) Die meisten Terme lassen sich mittels quadratischer Ergänzung in Scheitelpunktsform überführen, so dass der Graph eine Parabel ist, deren Scheitel und Öffnungsrichtung ablesbar sind.
a) $f(x) = x^2 + 4x - 7 = x^2 + 4x + \; 2^2 - 4 \; - 7 = (x+2)^2 - 11$. Der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel $S = (-2, -11)$.
b) $f(x) = (x-4)^2 + 2x = x^2 - 8x + 16 + 2x = x^2 - 6x + 3^2 - 9 + 16 = (x-3)^2 + 7$; der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel $S = (3, 7)$.
c) $f(x) = -x^2 + 4x - 6 = -(x^2 - 4x) - 6 = -(x^2 - 4x + 2^2 - 4) - 6 = -((x-2)^2 - 4) - 6 = -(x-2)^2 + 4 - 6 = -(x-2)^2 - 2$. Der Graph ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (2, -2)$.
d) $f(x) = x^2 + 5x - 2 = x^2 + 5x + \; (\frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} \; - 2 = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{33}{4}$; der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S = (-\frac{5}{2}, -\frac{33}{4})$.
e) $f(x) = -(x^2 - 4x + 4) + 8x + 3 = -x^2 + 12x - 1 = -(x^2 - 12x + 6^2 - 36) - 1 = -((x-6)^2 - 36) - 1 = -(x-6)^2 + 35$; der Graph ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S = (6, 35)$.
f) $f(x) = (-x+2)^2 + 5 = (-(x-2))^2 + 5 = (x-2)^2 + 5$; der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel $S = (2, 5)$.
g) $f(x) = x^2 + 7x + (\frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} - 1 = (x + \frac{7}{2})^2 - \frac{53}{4}$; der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (-\frac{7}{2}, -\frac{53}{4})$.
h) $f(x) = -(x^2 + x) + 1 = -(x^2 + x + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) + 1 = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} + 1 = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$; der Graph ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel $S = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$.
i) $f(x) = x^2 + 4x + 4 - x^2 - 4 = 4x$; der Graph ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung mit dem Anstieg 4.
j) $f(x) = x^2 + 5(x+1) = x^2 + 5x + 5 = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 5 = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{5}{4}$. Der Graph ist also eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (-\frac{5}{2}, -\frac{5}{4})$.

5) a) $f(x) = (2(x-1))^2 - (x-1)^2 + 5 = 4(x-1)^2 - (x-1)^2 + 5 = 3(x-1)^2 + 5$. Also ist der Graph von f eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel $S = (1, 5)$; sie ist enger als die Normalparabel.
b) $f(x) = 2(x-1)^2 - 3(x-1) = 2(x^2 - 2x + 1) - 3x + 3 = 2x^2 - 4x + 2 - 3x + 3 = 2x^2 - 7x + 5$. Die Funktion ist also quadratisch, ihr Graph folglich eine Parabel, und zwar nach oben geöffnet und enger als die Normalparabel (Faktor vor x^2 ist 2, also positiv und betraglich größer als 1). Um die Lage der Parabel, also den Scheitelpunkt, zu bestimmen, überführen wir den quadratischen Term $f(x)$ in

Scheitelpunktsform:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 7x + 5 = 2(x^2 - \frac{7}{2}x) + 5 = 2(x^2 - \frac{7}{2}x + (\frac{7}{4})^2 - \frac{49}{16}) + 5 \\ &= 2(x - \frac{7}{4})^2 - \frac{49}{8} + \frac{40}{8} = 2(x - \frac{7}{4})^2 - \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Der Graph der Funktion f ist also eine nach oben geöffnete Parabel, enger als eine Normalparabel, mit dem Scheitelpunkt $S = (\frac{7}{4}, -\frac{9}{8})$.
c) Wieder liegt eine quadratische Funktion vor; der Graph ist eine Parabel, nach unten geöffnet und enger als die Normalparabel. Wir bestimmen nun noch den Scheitelpunkt: $f(x) = -3x^2 + 6x + 5 = -3(x^2 - 2x) + 5 = -3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 5 = -3(x - 1)^2 + 3 + 5 = -3(x - 1)^2 + 8$, der Scheitel ist $S = (1, 8)$.
d) $f(x) = 4x^3 + (2x^2 + 1)(1 - 2x) = 4x^3 + 2x^2 - 4x^3 + 1 - 2x = 2x^2 - 2x + 1$. Wieder ist die Funktion f quadratisch, ihr Graph eine nach oben geöffnete Parabel, die enger als eine Normalparabel ist. Scheitelpunktsbestimmung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 2x + 1 = 2(x^2 - x) + 1 = 2(x^2 - x + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) + 1 \\ &= 2((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) + 1 = 2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 1 = 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt liegt bei $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
e) Der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel, weiter als die Normalparabel. Wir berechnen den Scheitelpunkt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}x^2 + 2x - 7 = \frac{1}{4}(x^2 + 8x) - 7 = \frac{1}{4}(x^2 + 8x + 4^2 - 16) - 7 \\ &= \frac{1}{4}(x + 4)^2 - \frac{1}{4} \cdot 16 - 7 = \frac{1}{4}(x + 4)^2 - 11\,. \end{aligned}$$

Der Scheitel ist $S = (-4, -11)$.
f) $f(x) = \frac{1}{3}(x - 2)(3 - x) = \frac{1}{3}(3x - x^2 - 6 + 2x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x - 2$. Die Funktion ist also quadratisch und ihr Graph somit eine Parabel: Diese ist nach unten geöffnet und weiter als die Normalparabel. Wir bestimmen wie üblich den Scheitelpunkt:

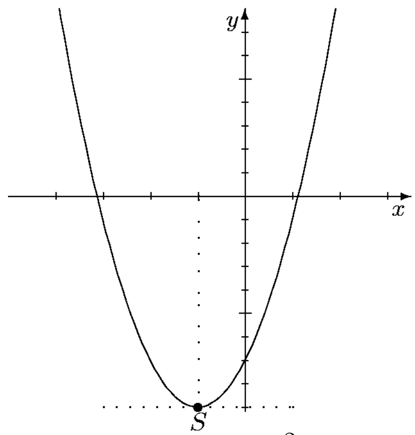
$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}(x^2 - 5x) - 2 = -\frac{1}{3}(x^2 - 5x + (\frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}) - 2 \\ &= -\frac{1}{3}(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{12} - \frac{24}{12} = -\frac{1}{3}(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{1}{12}\,. \end{aligned}$$

Der Scheitel ist folglich $S = (\frac{5}{2}, \frac{1}{12})$.

6) a) Eine Gleichung für die Symmetrieachse ist $x = 4$. Da der Scheitel oberhalb der x-Achse liegt und die Parabel nach unten geöffnet ist, trifft sie die x-Achse in zwei Punkten.
b) Die verschobene Parabel ist wieder eine nach unten geöffnete Normalparabel, jetzt allerdings mit dem Scheitelpunkt bei $(4 - 2, 2 - 3) = (2, -1)$. Eine Funktion f mit dieser Parabel als Graph ist also gegeben durch $f(x) = -(x - 2)^2 - 1$. (Scheitelpunktsform $a(x - x_S)^2 + y_S$ mit $x_S = 2$ und $y_S = -1$; der Faktor a ist in diesem Falle -1, da die Parabel eine *nach unten* geöffnete *Normal*parabel ist.) Diese

Parabel trifft die x-Achse nicht, da der Scheitel *unter* der x-Achse liegt ($y_S < 0$) und die Parabel nach *unten* geöffnet ist. Die Symmetrieachse hat als Gleichung $x = 2$.

7) *Geometrische* Argumentation: Der Graph der Funktion $f(x) = 2x^2 + 4x - 7$ ist eine nach oben geöffnete Parabel. Daher gibt es keinen größten Wert, den f annimmt, wohl aber einen kleinsten. Der kleinstmögliche Wert $f(x)$, den die Funktion annimmt, ist die y-Koordinate des Scheitelpunktes. (Unterhalb der durch den Scheitelpunkt verlaufenden Parallele zur x-Achse liegen keine Punkte des Graphen, also gibt es keine kleineren Funktionswerte von f.)



Wir bestimmen also den Scheitelpunkt des Graphen von f: $f(x) = 2(x^2 + 2x) - 7 = 2((x+1)^2 - 1) - 7 = 2(x+1)^2 - 9$. Damit ist der Scheitel $S = (-1, -9)$, der kleinste Wert von f also -9. Dieser Wert wird als Funktionswert $f(x)$ gerade an der Stelle $x = -1$ angenommen (-1 ist die x-Koordinate des Scheitelpunkts). (Probe: $f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 7 = 2 - 11 = -9$)

Ausgehend von der Scheitelpunktsform von $f(x)$ kann man auch rein *algebraisch* argumentieren: Es ist $f(x) = -9 + 2(x+1)^2$, die Werte von f erhält man also, indem man zu -9 das Doppelte eines Quadrats (!) hinzuaddiert: es wird also zu -9 eine nicht-negative Zahl hinzuaddiert. Damit sind alle Werte $f(x) \geq -9$, und der Wert -9 selbst wird angenommen, wenn $2(x+1)^2 = 0$ ist, also wenn $x + 1 = 0$, d. h. $x = -1$ ist.

8) Eine Parabel mit dem Scheitel $S = (2, -1)$ ist Graph einer Funktion f mit dem Term $f(x) = a(x-2)^2 - 1$ mit einem unbekannten $a \neq 0$. Als Graph dieser Funktion ist die Parabel gerade die Lösungsmenge der Gleichung $y = a(x-2)^2 - 1$. Es gilt nun a zu bestimmen. Da der Punkt $P = (3, 1)$ auf der Parabel liegen soll, muss er die obige Gleichung erfüllen, also muss gelten: $1 = a(3-2)^2 - 1 = a - 1$. Dies ergibt $a = 2$, und $y = 2(x-2)^2 - 1$ ist eine Gleichung mit den geforderten Eigenschaften. Da $a = 2$ ist, ist die Parabel nach oben geöffnet und enger als eine Normalparabel.