Übungen (4)

1) Es sei a eine reelle Zahl.
a) Unter welcher Bedingung an a ist $\sqrt{a}$ definiert? Wie lautet unter dieser Voraussetzung die Definition von $\sqrt{a}$?
b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $x^2 = a$ (über der Grundmenge $\mathbb{R}$)?. Geben Sie die Lösungsmenge an. (Beachten Sie alle Fälle.)

2) Zeigen Sie auf der Grundlage der Definition:
a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, b) $2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$, c) $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, d) $\frac{12}{\sqrt{24}} = \sqrt{6}$.

3) Berechnen Sie die folgenden Wurzelterme *exakt,* d. h. stellen Sie sie möglichst einfach dar, ohne Wurzelterme im Nenner und mit möglichst kleinen Radikanden.
a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12} =$ b) $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{75}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{2}} =$
c) $\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 - 3^2} =$ d) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} =$
e) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} =$ f) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 =$
g) $\left(\sqrt{8 + \sqrt{15}} + \sqrt{8 - \sqrt{15}}\right)^2 =$

4) Welche der nachfolgenden Gleichungen sind allgemeingültig (über ihrem Definitionsbereich)? Korrigieren Sie die falschen darunter.
a) $\sqrt{a^2} = a$, b) $(\sqrt{a})^2 = a$, c) $\sqrt{a^3} = a \cdot \sqrt{a}$, d) $\sqrt{a^6} = a^3$,
e) $\sqrt{a^4} = a^2$, f) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$, g) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

5) Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen (über der Grundmenge $\mathbb{R}$):
a) $x^2 + 6x + 7 = 0$, b) $x^2 - 8x + 9 = 0$,
c) $12x^2 - 4x - 1 = 0$, d) $4x^2 - 14x + 9 = 0$,
e) $2x^2 + x + 1 = 0$, f) $x^2 - 5\sqrt{3} \cdot x + 11 = 0$.

6) Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:
a) $\frac{4x - 3}{x - 1} - \frac{10}{x + 2} = \frac{5x}{x + 2}$, b) $\frac{x - 2}{x + 2} + \frac{x + 2}{x - 2} = 5$,
c) $\frac{4x - 3}{x - 1} - \frac{10}{x + 2} = \frac{6x}{x + 2}$, d) $\frac{3x + 2}{x - 2} = \frac{x + 2}{3x - 2}$.

7) Unter dem *Goldenen Schnitt* versteht man die Unterteilung einer Strecke in zwei Abschnitte, so dass der größere Abschnitt sich zur Gesamtlänge verhält wie der kleinere Abschnitt zum größeren. Bestimmen Sie das Verhältnis des goldenen Schnitts.

8) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte, die die Parabeln auf dem Skizzenblatt **Normalparabeln (2)** zu Übungen (1) miteinander haben.

8) Zunächst lesen wir aus den Skizzen die Scheitelpunkte ab und erhalten damit für die Parabeln die folgenden Gleichungen in Scheitelpunktsform (siehe die Lösungen zu Übung (1), Aufgabe 1 b)):

$\mathcal{P}_1$:	$y = x^2$	$\mathcal{P}_5$:	$y = -(x-5)^2$
$\mathcal{P}_2$:	$y = -x^2$	$\mathcal{P}_6$:	$y = (x-8)^2 - 3$
$\mathcal{P}_3$:	$y = (x-4)^2 - 2$	$\mathcal{P}_7$:	$y = -(x+6)^2 + 2$
$\mathcal{P}_4$:	$y = -x^2 + 4$	$\mathcal{P}_8$:	$y = (x+7)^2 + 1$

Um die Schnitt*stellen* (= x-Koordinaten der Schnitt*punkte*) dieser Parabeln miteinander zu bestimmen, muss man $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$ Gleichungen lösen. Die Schnittpunkte erhält man, indem man die gefundenen Schnittstellen in eine der beiden Parabelgleichungen einsetzt. Man erhält so die Tabelle auf der folgenden Seite, in der jeweils sämtliche Schnittpunkte eingetragen sind.

Schnittpunkte der Normalparabeln (2) von Übung (1):

Exakte Ergebnisse:

	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_5$	$\mathcal{P}_6$	$\mathcal{P}_7$	$\mathcal{P}_8$
$\mathcal{P}_1 \cap \ldots$	$(0,0)$	$(\frac{7}{4}, \frac{49}{16})$	$(\pm\sqrt{2}, 2)$	$--$	$(\frac{61}{16}, \frac{3721}{256})$	$--$	$(-\frac{25}{7}, \frac{625}{49})$
$\mathcal{P}_2 \cap \ldots$		$--$	$--$	$(\frac{5}{2}, -\frac{25}{4})$	$--$	$(-\frac{17}{6}, -\frac{289}{36})$	$--$
$\mathcal{P}_3 \cap \ldots$			$--$	$(\frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})$	$(\frac{47}{8}, \frac{97}{64})$	$--$	$(-\frac{18}{11}, \frac{3602}{121})$
$\mathcal{P}_4 \cap \ldots$				$(\frac{29}{10}, -\frac{441}{100})$	$--$	$(-\frac{19}{6}, -\frac{217}{36})$	$--$
$\mathcal{P}_5 \cap \ldots$					$--$	$(-\frac{9}{22}, -\frac{14161}{484})$	$--$
$\mathcal{P}_6 \cap \ldots$						$--$	$(\frac{11}{30}, \frac{49741}{900})$
$\mathcal{P}_7 \cap \ldots$							$(-6, 2); (-7, 1)$

Näherungswerte (zum Vergleich mit der Skizze):

	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_5$	$\mathcal{P}_6$	$\mathcal{P}_7$	$\mathcal{P}_8$
$\mathcal{P}_1 \cap \ldots$	$(0,0)$	$(1.75, 3.0625)$	$(\pm 1.414, 2)$	$--$	$(3.8125, 14.535)$	$--$	$(-3.57, 12.76)$
$\mathcal{P}_2 \cap \ldots$		$--$	$--$	$(2.5, -6.25)$	$--$	$(-2.83, -8.03)$	$--$
$\mathcal{P}_3 \cap \ldots$			$--$	$(5.366, -0.134); (3.634, -1.866)$	$(5.875, 1.516)$	$--$	$(-1.636, 29.77)$
$\mathcal{P}_4 \cap \ldots$				$(2.9, -4.41)$	$--$	$(-3.167, -6.03)$	$--$
$\mathcal{P}_5 \cap \ldots$					$--$	$(-0.41, -29.26)$	$--$
$\mathcal{P}_6 \cap \ldots$						$--$	$(0.367, 55.27)$
$\mathcal{P}_7 \cap \ldots$							$(-6, 2), (-7, 1)$