Übungen (5)

1) Für welche Zahlen c hat die quadratische Gleichung $x^2 + (c+1)x + c = 0$ nur eine Lösung? Bestimmen Sie diese dann.
2) Zeigen Sie, dass jeweils die angegebene Zahl Lösung der angegebenen Gleichung ist, und bestimmen Sie (mit möglichst geringem Rechenaufwand) sämtliche Lösungen.
   a) $+1$, $x^2 - 7x + 6 = 0$,
   b) -4, $x^2 - 2x - 24 = 0$,
   c) $+\frac{1}{2}$, $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$,
   d) $+1$, $2x^2 - x - 1 = 0$.
3) Zerlegen Sie die folgenden quadratischen Terme in Linearfaktoren:
   a) $x^2 - 5x - 14$, b) $x^2 + 4x + 8$,
   c) $x^2 + 4x + 2$, d) $2x^2 + x - 1$.
4) Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen:
   a) $\sqrt{5x-4} = 4x - 3$,
   b) $\sqrt{4x^2 + 4x} = 2x + 2$,
   c) $\sqrt{4x-3} + 5x = 4$,
   d) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{2x+2} = \sqrt{x+2}$.
5) Lösen Sie die Gleichungen
   a) $x^3 - 4x = 0$,
   b) $x^7 = 7x^5$,
   c) $(x-3)(x^2 - 4x - 5) = 0$,
   d) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$.
6) Mit einem Zaun von 150 m Länge soll ein rechteckiges Feld von 1400 m^2 Fläche eingezäunt werden. Wie sind die Maße des Feldes zu wählen?
7) Bei welchen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen übertrifft das Produkt ihre Summe um 55?
8) Vergrößert man die Kanten eines Würfels um 2 cm, so vergrößert sich der Rauminhalt um 152 cm^3. Welche Kantenlänge hatte der gegebene Würfel?
9) Eine zweiziffrige Zahl hat die Quersumme 5. Vertauscht man die Ziffern und multipliziert die neue Zahl mit der ursprünglichen, so ist das Produkt um 560 größer als die ursprüngliche Zahl. Um welche Zahl handelt es sich?
   [Tip zum Ansatz: Ist x die Einerziffer und y die Zehnerziffer, so ist die gesuchte Zahl $10y + x$.]

Übungen (5) — Lösungen

1) 1. Unter Verwendung der Diskriminante quadratischer Gleichungen schließt man wie folgt: Die Gleichung hat genau dann nur eine Lösung, wenn die Diskriminante $D = 0$ ist. Wir berechnen die Diskriminante

$$D = p^2 - 4q = (c+1)^2 - 4c = c^2 + 2c + 1 - 4c = c^2 - 2c + 1 = (c-1)^2 .$$

Also gilt $0 = D = (c-1)^2 \iff c = 1$. Nur für $c = 1$ hat die quadratische Gleichung genau eine Lösung. Die Gleichung lautet dann $x^2 + 2x + 1 = 0$, also $(x+1)^2 = 0$ und hat die einzige Lösung $x = -1$.
2. Alternativ kann man so vorgehen: Man löse die gegebene Gleichung mit dem *Parameter* c und untersuche dann, wann sich nur eine Lösung ergibt.

$$x^2 + (c+1)x + c = 0 \iff x = -\frac{c+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(c+1)^2}{4} - c} .$$

Es gibt also nur eine Lösung genau dann, wenn der Radikand $= 0$ ist:

$$0 = \frac{(c+1)^2}{4} - c \iff 0 = (c+1)^2 - 4c .$$

Man rechnet nun wie oben weiter.

2) Dass die angegebenen Werte tatsächlich jeweils Lösungen sind, überprüft man durch Einsetzen. Die zweite Lösung findet man mit dem Satz von Vieta: Ist x_1 eine Lösung von $x^2 + px + q = 0$, so gilt für die zweite $x_1 x_2 = q$ und $x_1 + x_2 = -p$. Aus jeder dieser Gleichungen kann man x_2 bestimmen.
a) Hier ist $x_1 \cdot x_2 = 6$, also bei $x_1 = 1$ folgt $x_2 = 6$: $\mathbb{L} = \{+1, +6\}$.
b) Hier ist $2 = x_1 + x_2 = -4 + x_2$, also wieder $x_2 = 6$.
c) Hier ergibt sich $1 = x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + x_2$, also $x_2 = \frac{1}{2}$. In diesem Falle fallen die beiden Lösungen zusammen: $\mathbb{L} = \{\frac{1}{2}\}$.
d) Vorsicht! Die Gleichung ist nicht normiert. Nach Normierung (Division durch den führenden Koeffizienten 2) ergibt sich $p = -\frac{1}{2}$, also $\frac{1}{2} = x_1 + x_2 = 1 + x_2$, d. h. $x_2 = -\frac{1}{2}$.
Die Überlegungen zu dieser Aufgabe zeigen, dass bei Kenntnis *einer* Lösung einer quadratischen Gleichung die zweite Lösung leicht mit dem Satz von Vieta zu bestimmen ist!

3) Wir bestimmen die Nullstellen der quadratischen Terme und entnehmen daraus eine Faktorisierung.
a) $x^2 - 5x - 14 = 0 \iff x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 14} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25+56}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{9}{2}$, also sind die beiden Nullstellen $+7$ und -2. Die Zerlegung folglich

$$x^2 - 5x - 14 = (x-7)(x+2) .$$

(Man überprüft durch Ausmultiplizieren leicht die Richtigkeit der gefundenen Faktorisierung.)
b) $x^2 + 4x + 8 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{4-8}$. Da der Radikand negativ ist, hat der

quadratische Term keine Nullstellen. Dann besitzt er auch keine Faktorisierung in Linearfaktoren.
c) $x^2+4x+2=0 \iff x=-2\pm\sqrt{4-2}=-2\pm\sqrt{2}$. Mit diesen beiden Nullstellen erhalten wir die Faktorisierung

$$x^2+4x+2=\big(x-(-2+\sqrt{2})\big)\cdot\big(x-(-2-\sqrt{2})\big)=(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})\,.$$

(Mit der dritten binomischen Regel überprüft man leicht die Richtigkeit der gefundenen Faktorisierung.)
d) $2x^2+x-1=0 \iff x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0 \iff x=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4}$. Mit den beiden Nullstellen $\frac{1}{2}$ und -1 erhält man eine Faktorisierung, zunächst aber nur *für den normierten Term:*

$$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=(x-\frac{1}{2})(x+1)\,.$$

Um für den Ausgangsterm eine Faktorisierung zu bekommen, muss nun noch mit 2 multiplizieren:

$$2x^2+x-1=2\cdot(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})=2\cdot(x-\frac{1}{2})(x+1)=(2x-1)(x+1)\,.$$

4) Später!
5) a) Dies ist zwar keine quadratische, sondern eine sog. *kubische* Gleichung, aber dennoch für Sie lösbar, wenn man zuvor *ausklammert*:

$$x^3-4x=0 \iff x(x^2-4)=0\,.$$

Dieses Ausklammern ist immer dann sinnvoll, wenn die rechte Seite der Gleichung 0 ist. (Andernfalls nicht!) Man kann dann nämlich weiterschließen: Ein Produkt ist dann und nur dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist; in diesem Fall also:

$$\begin{aligned} x(x^2-4)=0 &\iff x=0 \ \vee\ x^2-4=0 \\ &\iff x=0 \ \vee\ x^2=4 \iff x=0 \ \vee\ x=\pm 2\,. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L}=\{0,+2,-2\}$.
b) Dies ist eine Gleichung vom *Grade* 7. Wieder kann man durch Ausklammern die Gleichung in *zwei,* dafür aber *einfachere* Gleichungen aufspalten.

$$\begin{aligned} x^7=7x^5 &\iff x^7-7x^5=0 \iff x^5(x^2-7)=0 \\ &\iff x^5=0 \ \vee\ x^2-7=0 \iff x=0 \ \vee\ x=\pm\sqrt{7}\,. \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L}=\{0,-\sqrt{7},+\sqrt{7}\}$ im Falle b).

c) Hier ist die notwendige Faktorisierung bereits vorgegeben. (Nicht ausmultiplizieren!!)

$$(x-3)(x^2-4x-5)=0 \iff x-3=0 \ \vee\ x^2-4x-5=0$$
$$\iff x=3 \ \vee\ x=2\pm\sqrt{4+5}=2\pm 3\,.$$

Also $\mathbb{L}=\{-1,3,5\}$ im Fall c).

d) Auch diese Gleichung können Sie durch Faktorisieren lösen, wenn Sie erkennen, dass x^4-4x^2+4 ein vollständiges Binom ist: $x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2$. Damit folgt dann

$$x^4-4x^2+4=0 \iff (x^2-2)^2=0 \iff x^2-2=0 \iff x=\pm\sqrt{2}\,.$$

Also ist $\mathbb{L}=\{-\sqrt{2},+\sqrt{2}\}$.

6) Ist x eine der Seitenlängen des Rechtecks, so hat die andere Kante die Länge $75-x$ (da der Umfang 150 sein soll), und die Fläche ist dann $x(75-x)=1400$. Dies führt zu einer quadratischen Gleichung

$$75x-x^2=1400 \iff x^2-75x+1400=0 \iff x=\frac{75}{2}\pm\sqrt{(\frac{75}{2})^2-1400}$$
$$\iff x=\frac{75}{2}\pm\sqrt{\frac{5625-5600}{4}}=\frac{75}{2}\pm\frac{5}{2} \iff x=40 \ \vee\ x=35\,.$$

Es gibt zwei Lösungen: $x=40$ (mit anderer Seitenlänge $75-40=35$) und $x=35$ (mit der zweiten Seitenlänge $75-35=40$). Die gesuchten Maße des Feldes sind also 35 mal 40 Meter.

7) Die gesuchte Zahl heiße x. Dann muss gelten:

$$x(x+1)=x+(x+1)+55\,.$$

Dies führt zur Gleichung

$$x^2+x=2x+56 \iff x^2-x-56=0 \iff x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+56}$$
$$\iff x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{15}{2} \iff x=-7 \ \vee\ x=8\,.$$

Man erhält die beiden Lösungen 8 und -7. Damit gibt es für die gesuchten aufeinanderfolgenden Zahlen zwei Möglichkeiten, zum einen 8 und 9 und zum andern -7 und -6.

8) Sei x die gesuchte Kantenlänge des Würfels. Dann muss gelten

$$(x+2)^3=x^3+152\,.$$

Wir multiplizieren die linke Seite aus und erhalten $(x+2)^3=(x+2)(x^2+4x+4)=x^3+6x^2+12x+8$. Wir lösen nun die obige Gleichung:

$$x^3+6x^2+12x+8=x^3+152 \iff 6x^2+12x-144=0 \iff x^2+2x-24=0$$
$$\iff x=-1\pm\sqrt{1+24}=-1\pm 5 \iff x=4 \ \vee\ x=-6\,.$$

Die Gleichung hat die beiden Lösungen -6 und 4. Da die gesuchte Größe x die Kantenlänge eines Würfels sein soll, kommt nur $x = 4$ als Lösung für das Ausgangsproblem in Frage: Die Kantenlänge des gegebenen Würfels war 4.

9) Sei x die Einerziffer, y die Zehnerziffer der Zahl. Dann ist die Zahl $10y + x$. Es soll gelten $x + y = 5$ und

$$(10y + x)(10x + y) = 10y + x + 560\,.$$

Setzt man $y = 5-x$ in diese Gleichung ein, so erhält man die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned}
& (10 \cdot (5 - x) + x)(10x + 5 - x) = 10 \cdot (5 - x) + x + 560 \\
\iff & (50 - 9x)(9x + 5) = 50 - 9x + 560 \\
\iff & -81x^2 + 414x - 360 = 0 \iff x^2 - \frac{46}{9}x + \frac{40}{9} = 0 \\
\iff & x = \frac{23}{9} \pm \sqrt{\frac{529}{81} - \frac{40}{9}} = \frac{23}{9} \pm \sqrt{\frac{169}{81}} = \frac{23}{9} \pm \frac{13}{9}\,.
\end{aligned}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind also $\frac{10}{9}$ und 4. Da unsere gesuchte Größe x aber eine Ziffer sein soll, kommt als Lösung für das gestellte Problem nur $x = 4$ in Frage. Die zugehörige Zehnerziffer ist dann $y = 5 - x = 5 - 4 = 1$ und die gesuchte Zahl lautet 14.