Übungen (7)

1) a) Skizzieren Sie grob die Graphen der Funktionen $f_1, \ldots, f_6$ gegeben durch

$$f_1(x) = x^2\,, \quad f_2(x) = x^{1/2}\,, \quad f_3(x) = (\frac{1}{3})^x\,,$$
$$f_4(x) = 3^x\,, \quad f_5(x) = \log_3(x) \quad \text{und} \quad f_6(x) = 3^{-x}\,.$$

b) Welche Beziehungen bestehen zwischen den Graphen? Welche sind monoton steigend, welche fallend?

2) a) Definieren Sie $\log_a(x)$, den Logarithmus von x zur Basis a. Unter welchen Bedingungen an a und x ist er definiert?
b) Welche zweistelligen natürlichen Zahlen haben einen ganzzahligen Logarithmus zur Basis i) 2 ii) 3 iii) 4 iv) 5 und v) 10?
c) Welche zweistelligen natürlichen Zahlen sind Potenzen von a mit ganzzahligen Exponenten für $a = 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 10$?
d) Welche Werte haben die 10er-Logarithmen von 3-stelligen Zahlen? Welcher Zusammenhang besteht zwischen 10er-Logarithmen und Stellenzahl?

3) a) Formulieren Sie die Rechengesetze für Logarithmen.
b) Begründen Sie: $\log_a(\frac{1}{b}) = -\log_a(b)$ und $\log_a(\sqrt[n]{b}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(b)$.
c) Berechnen Sie:
i) $\log_2(\sqrt{8})$, ii) $\log_3(\sqrt[8]{9})$
iii) $\log_{10}(\sqrt[3]{10000})$, iv) $\log_2\big((\sqrt{2})^{-2}\big)$.

4) Zeigen Sie für $a, b > 1$: $\log_b\big(a^{\log_a(b)}\big) = 1$ und folgern Sie $\log_a(b) \cdot \log_b(a) = 1$.

5) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
a) $3^{x-1} = 81$, b) $(\sqrt{2}\,)^{x+1} = (\sqrt[8]{8}\,)^x$, c) $2^{(x^2)} = 4^x$, d) $(\frac{1}{3})^{-x+1} = 3^x$.

6) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
a) $\log_2(x) = 3$, b) $\log_3(x) = \frac{1}{7}$, c) $\log_x(0,25) = -1$, d) $\log_{25}(x) = \frac{1}{4}$.

7) Ein Gramm einer radioaktiven Substanz zerfällt so, dass nach der Zeit t (in Stunden) noch $0,8^t$ Gramm vorhanden sind. Wann sind nur noch 0,5 Gramm vorhanden?

8) Licht verliert beim Durchgang durch eine Glasscheibe 5% seiner Intensität. Wieviele Glasplatten hat es durchlaufen, wenn es nur noch 25% seiner ursprünglichen Helligkeit hat?

9) a) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner:
$\lg(4 \cdot 10^{12})$, $\lg(0,25 \cdot 10^{-12})$, $\lg(2)$, $\log_2(10)$, $\ln(10)$.
b) Lösen Sie mit Hilfe des Taschenrechners:
$-\lg(c) = 4,2$, $4,2 - \lg(c) = 14$, $\lg(4x) = -5$, $\log_3(x) = 3,5$.

Übungen (7) — Lösungen

1) b) Die Funktionen f_1 und f_2 sind Umkehrfunktionen voneinander, also sind ihre Graphen spiegelbildlich zueinander bzgl. der Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten. Dasselbe gilt für die Funktionen f_4 und f_5. f_3 und f_6 sind identische Funktionen, denn $f_3(x) = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x} = f_6(x)$. Schließlich sind die Graphen von f_4 und f_6 spiegelbildlich zueinander bzgl. der y-Achse, denn $f_6(x) = 3^{-x} = f_4(-x)$. Monoton steigend sind die Wurzelfunktion f_2, die Exponentialfunktion f_4 und ihre Umkehrfunktion f_5 (weil deren Basis jeweils 3, also größer als 1 ist); die Exponentialfunktion f_3 ist monoton fallend, weil die Basis kleiner als 1 ist. Die Funktion f_1 ist insgesamt weder monoton fallend noch steigend; betrachtet man jedoch Teilintervalle, so kann man genauer sagen: Über dem Intervall $]-\infty, 0]$ ist f_1 monoton fallend, über $[0, +\infty[$ monoton steigend.

2) a) Der *Logarithmus* $\log_a(x)$ von x zur Basis a ist der *Exponent,* mit dem man a potenzieren muss, um x zu erhalten:

$$\boxed{y = \log_a(x) \iff a^y = x.}$$

Er ist definiert für $a > 0$, $a \neq 1$ und beliebige $x > 0$. Der Definitionsbereich einer Logarithmusfunktion ist das Intervall $]0, +\infty[$ aller positiven Zahlen.
b) 16 , 32 , 64, b) 27 , 81, c) 16 , 64, d) 25 und d) 10.
c) ist dieselbe Frage wie b) nur in anderer Formulierung: 'Logarithmus' ist im Grunde ein anderes Wort für 'Exponent' (siehe a)).
d) Dreistellige Zahlen x liegen zwischen $10^2 = 100$ und $10^3 = 1000$: $10^2 \leq x < 10^3$. Für die Logarithmen zur Basis 10 bedeutet dies (wegen der Monotonie!) $\log_{10}(10^2) \leq \log_{10}(x) < \log_{10}(10^3) \iff 2 \leq \log_{10}(x) < 3$; der Logarithmus hat eine 2 vor dem Komma. Nimmt man also vom 10er-Logarithmus einer natürlichen Zahl den 'ganzen Anteil' (die Zahl vor dem Komma) und erhöht ihn um 1, so erhält man die Stellenzahl.

3) a) Da $\log_a$ die Umkehrung der Exponentialfunktion zur Basis a ist, erhält man aus den bekannten Potenzgesetzen $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ und $(a^x)^r = a^{rx}$ die Logarithmenregeln (für $1 \neq a > 0$, $b, c > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ beliebig)

$$\boxed{\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)\,, \quad \log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b).}$$

b) Nach dem zweiten in a) formulierten Rechengesetz gilt für $1 \neq a > 0$, $b > 0$:

$$\log_a(\frac{1}{b}) = \log_a(b^{-1}) = -\log_a(b) \quad \text{und} \quad \log_a(\sqrt[n]{b}\,) = \log_a(b^{1/n}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(b)\,.$$

c) i) $\log_2(\sqrt{8}) = \log_2(8^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2} \cdot \log_2(2^3) = \dfrac{1}{2} \cdot 3 = \dfrac{3}{2}$,
ii) $\log_3(\sqrt[8]{9}) = \frac{1}{8} \cdot \log_3(3^2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$,
iii) $\log_{10}(\sqrt[3]{10000}) = \frac{1}{3} \cdot \log_{10}(10^4) = \frac{4}{3}$,
iv) $\log_2\left((\sqrt{2})^{-2}\right) = -2 \cdot \log_2(2^{\frac{1}{2}}) = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

4) Es ist nach Definition des Logarithmus $a^{\log_a(b)} = b$, also

$$\log_b(a^{\log_a(b)}) = \log_b(b) = 1\,.$$

Andererseits kann man die linke Seite nach den Rechengesetzen für den Logarithmus berechnen und erhält

$$\log_b(a^{\log_a(b)}) = \log_a(b) \cdot \log_b(a)\,.$$

Beide Formeln zusammen ergeben die zweite der behaupteten Gleichungen.

5) a)
$$\begin{array}{lrcll} & 3^{x-1} &=& 81 = 3^4 & \mid \log_3(\ldots) \\ \iff & x-1 &=& 4 & \\ \iff & x &=& 5 & \end{array}$$
$\mathbb{L} = \{5\}$

b)
$$\begin{array}{lrcll} & (\sqrt{2}\,)^{x+1} &=& (\sqrt[8]{8}\,)^x & \mid \log_2(\ldots) \\ \iff & (x+1)\cdot\log_2(\sqrt{2}\,) &=& x\cdot\log_2(\sqrt[8]{8}) & \\ \iff & (x+1)\cdot\frac{1}{2} &=& x\cdot\frac{1}{8}\cdot\log_2(8) & \mid \cdot 8 \\ \iff & 4x+4 &=& 3x & \\ \iff & x &=& -4 & \end{array}$$
$\mathbb{L} = \{-4\}$

c)
$$\begin{array}{lrcll} & 2^{(x^2)} &=& 4^x = 2^{2x} & \mid \log_2(\ldots) \\ \iff & x^2 &=& x\log_2(4) = 2x & \\ \iff & x^2-2x &=& 0 & \\ \iff & x(x-2) &=& 0 & \\ \iff & x=0 \vee x=2 & & & \end{array}$$
$\mathbb{L} = \{0, 2\}$

d)
$$\begin{array}{lrcll} & (\frac{1}{3})^{-x+1} &=& 3^x & \mid \log_3(\ldots) \\ \iff & (-x+1)\cdot\log_3(\frac{1}{3}) &=& x & \\ \iff & (-x+1)\cdot(-1) &=& x & \\ \iff & x-1 &=& x & \mid +x \\ \iff & -1 &=& 0 & \end{array}$$
$\mathbb{L} = \emptyset = \{\}$

6) Man beachte die Definitionsbereiche: In a), b) und d) tritt die gesuchte Größe x jeweils als Argument einer Logarithmusfunktion auf; diese sind nur für positive Zahlen definiert, also gilt für diese drei Fälle $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} =]0;\infty[$:

a) $\log_2(x) = 3 \iff x = 2^3 = 8 \;:\quad \mathbb{L} = \{8\}\,,$

b) $\log_3(x) = \dfrac{1}{7} \iff x = 3^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{3} \;:\quad \mathbb{L} = \{\sqrt[7]{3}\}\,,$

d) $\log_{25}(x) = \dfrac{1}{4} \iff x = 25^{1/4} = 5^{1/2} = \sqrt{5} \;:\quad \mathbb{L} = \{\sqrt{5}\}\,.$

In c) tritt x als Basis einer Logarithmusfunktion auf, also ist hier der Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x \neq 1\}$:

$$\log_x(0,25) = -1 \iff 0,25 = x^{-1} \iff \frac{1}{4} = \frac{1}{x} \iff x = 4 \;:\quad \mathbb{L} = \{4\}\,.$$

7) Gesucht ist die Zeit t mit $0,8^t = 0,5$. Auch ohne Taschenrechner kann man eine gute Näherung wie folgt bestimmen: $0,8 = 8 \cdot 10^{-1}$, also $0,8^2 = 8^2 \cdot 10^{-2} = 0,64$, $0,8^3 = 8^3 \cdot 10^{-3} = 2^9 \cdot 10^{-3} = 512 \cdot 10^{-3} = 0,512$. Nach 3 Stunden ist also noch geringfügig mehr als die Hälfte vorhanden. Die gesuchte Halbwertzeit dürfte also etwas größer als 3 Stunden sein.
Lösung der Gleichung $0,8^t = 0,5$ mit Hilfe des dekadischen Logarithmus $\log_{10} = \lg$:

$$0,8^t = 0,5 \iff \lg(0,8^t) = \lg(0,5) \iff t \cdot \lg(0,8) = \lg(0,5) \iff t = \frac{\lg(0,5)}{\lg(0,8)}$$

Dieser Lösungswert für t ist mit dem Taschenrechner berechenbar:

$$t \approx \frac{-0,3010299995}{-0,096910013} \approx 3,1\,,$$

und bestätigt unsere obige Abschätzung.

8) Bei jedem Durchgang durch eine Glasplatte reduziert sich die Intensität I des Lichtes auf 95%, also wird pro Platte die Intensität mit dem Faktor $c = 0,95$ multipliziert. Die Intensität $I(n)$ nach dem Durchgang durch n Platten beträgt also $I(n) = 0,95^n$. Gesucht ist nun die Zahl n, für die die Intensität 0,25 ist.

$$0,25 = 0,95^x \iff \log(0,25) = \log(0,95^x) = x \cdot \log(0,95) \iff x = \frac{\log(0,25)}{\log(0,95)}$$

und der Taschenrechner liefert (mit $\log = \lg$)

$$x \approx \frac{-0,602059991}{-0,022276394} \approx 27,03$$

Bei 27 Platten ist also die Intensität noch größer als 25% und bei 28 bereits kleiner.

9) a) $\lg(4 \cdot 10^{12}) \approx 12,60206$, $\quad \lg(0,25 \cdot 10^{-12}) \approx -12,60206$.
(Beachten Sie, dass $0,25 \cdot 10^{-12}$ der Kehrwert von $4 \cdot 10^{12}$ ist!)
$\lg(2) \approx 0,30103$, $\log_2(10) = \lg(10)/\lg(2) = 1/\lg(2) \approx 3,32193$, $\ln(10) \approx 2,30259$.
b) $-\lg(c) = 4,2 \iff \lg(c) = -4,2 \iff c = 10^{-4,2} \approx 6,30957 \cdot 10^{-5}$,
$4,2 - \lg(c) = 14 \iff \lg(c) = -9,8 \iff c = 10^{-9,8} \approx 1,58489 \cdot 10^{-10}$,
$\lg(4x) = -5 \iff 4x = 10^{-5} \iff x = \frac{1}{4} \cdot 10^{-5} = 2,5 \cdot 10^{-6} = 0,0000025$,
$\log_3(x) = 3,5 \iff x = 3^{3,5} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 27\sqrt{3} \approx 46,76537$.