Übungen zu Exponential- und Logarithmusfunktionen

(Aus: Lambacher Schweizer, Lehrbuch Klasse 10, S. 83–85)

1 Zeichne die Graphen der Exponentialfunktionen. Bestimme am Graphen die Schrittweite für die Verdopplung bzw. die Halbierung der Funktionswerte.
a) $x \mapsto 0{,}5 \cdot 1{,}6^x$ b) $x \mapsto 3 \cdot 0{,}7^x$ c) $x \mapsto 0{,}25 \cdot 2{,}5^x$ d) $x \mapsto 4 \cdot 0{,}85^x$

2 Von welchen der Funktionen liegen die Graphen jeweils achsensymmetrisch zueinander bezüglich der y-Achse?
f_1: $x \mapsto 3^x$ f_2: $x \mapsto 0{,}2^x$ f_3: $x \mapsto 5^x$ f_4: $x \mapsto 6{,}25^x$
f_5: $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$ f_6: $x \mapsto \left(\frac{4}{25}\right)^x$ f_7: $x \mapsto 0{,}3^x$ f_8: $x \mapsto \left(3\frac{1}{3}\right)^x$

3 Bestimme zu jeder Funktion diejenige Funktion, deren Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse zum Graphen der ersten Funktion liegt. Gib dazu auch jeweils an, welche der Funktionen monoton wachsend, welche monoton fallend ist.
a) $x \mapsto 4^x$ b) $x \mapsto 0{,}7^x$ c) $x \mapsto 3{,}75^x$ d) $x \mapsto 2{,}7^x$
e) $x \mapsto \left(\frac{4}{5}\right)^x$ f) $x \mapsto \left(2\frac{2}{3}\right)^x$ g) $x \mapsto \left(\frac{17}{4}\right)^x$ h) $x \mapsto 0{,}1^x$

4 Wie kann man aus dem Graphen von $x \mapsto 2^x$ die Graphen erhalten von
a) $x \mapsto 2^{x+2}$, b) $x \mapsto 2^{x+1}$, c) $x \mapsto 2^x + 1$, d) $x \mapsto 2^{2x}$?

5 Zeichne den Graphen der Funktion. Zeichne den Graphen der Umkehrfunktion durch Spiegeln an der Geraden $y = x$. Gib die Funktionsvorschrift der Umkehrfunktion an.
a) $x \mapsto 4 \cdot 2^x$ b) $x \mapsto 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $x \mapsto 5 \cdot \lg(x)$ d) $x \mapsto 3 \cdot \log_4(x)$

6 Bestimme zu folgenden Funktionen jeweils die Umkehrfunktion.
a) $x \mapsto 5^x$ b) $x \mapsto 2 \cdot 3^x$ c) $x \mapsto 0{,}2 \cdot 4{,}5^x$ d) $x \mapsto 4 \cdot 2^{3x}$
e) $x \mapsto \log_{0,5}(x)$ f) $x \mapsto 3 \cdot \lg(x)$ g) $x \mapsto 4 \cdot \log_5(x)$ h) $x \mapsto 0{,}5 \cdot \lg(x^2)$

7 Löse die Exponentialgleichungen möglichst geschickt.
a) $3^x = \frac{1}{9}$ b) $5^x = 0{,}04$ c) $32^x = 8$ d) $8^x = 0{,}25$
e) $25^x = 0{,}2$ f) $16^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ g) $625^x = 125$ h) $243^x = \frac{1}{9}$
i) $0{,}5^x = 16$ k) $0{,}2^x = 125$ l) $0{,}25^x = 128$ m) $0{,}04^x = 125$

8 Bestimme y, a bzw. x.
a) $y = \log_7(49)$ b) $y = \log_5(0{,}008)$ c) $y = \log_{0,5}(8)$ d) $y = \log_{27}\left(\frac{1}{3}\right)$
e) $\log_a\left(\frac{1}{27}\right) = -3$ f) $\log_a\left(\frac{1}{9}\right) = -4$ g) $\log_{27}(x) = \frac{4}{3}$ h) $\log_{16}(x) = -\frac{5}{4}$

9 Gib die Lösungen der Exponentialgleichungen auf 2 Nachkommastellen genau an.
a) $2 \cdot 3^x = 0{,}8$ b) $5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{5}$ c) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^x = \sqrt{2}$ d) $4 + 3 \cdot 2^x = 6{,}9$
e) $3 \cdot 2^{x-4} = 7$ f) $2{,}8 \cdot 1{,}6^{1-x} = 3{,}2$ g) $4 \cdot 1{,}5^{2x-1} = 6{,}5$ h) $5 \cdot 2^{3x+2} = 11$
i) $\frac{4}{3} \cdot 3^{1-x} = 2$ k) $0{,}2 \cdot 0{,}3^{x+1} = 0{,}3$ l) $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{2x+1} = \sqrt{8}$ m) $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{3x+5} = 35$
n) $5^{x+1} = 8^{2x}$ o) $2{,}8^{3x} \cdot 1{,}5^x = 10$ p) $0{,}4 \cdot 3{,}2^x = 2^{3x-1}$ q) $3^{4x} \cdot 4^x = 5^{x+2}$

10 Löse durch eine geeignete Substitution.
a) $8^{x+2} - 8^{2x} = 240$ b) $6^{2+x} + 6^{2-x} = 78$ c) $96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} + 3 \cdot 2^{3x-2} = 15$

11 Bestimme die Lösungen.
a) $\lg(1-3x)=0{,}8$ b) $\lg(x^2-24)=3$ c) $\log_2(x-1)=2{,}5$ d) $\log_3(1-x)=-0{,}3$

12 Forme mit Hilfe der Logarithmenregeln um.
a) $\lg(2ux)$ b) $\lg(3x^2)$ c) $\log_2(5u^3)$ d) $\log_3(7u^2x^3)$
e) $\lg\left(\frac{ax}{b}\right)$ f) $\log_a\left(\frac{1}{x^2v}\right)$ g) $\log_a\left(\frac{1}{x^2a^3}\right)$ h) $\log_3\left(\frac{4}{9x^5}\right)$
i) $\lg[(x+y)^2]$ k) $\lg\left(\sqrt{1+a}\right)$ l) $\lg\left(\frac{1}{x\cdot\sqrt{1+x}}\right)$ m) $\log_a\left(\frac{1}{a\cdot\sqrt{1+a}}\right)$

13 Drücke durch einen einzigen Logarithmus aus.
a) $2\cdot\lg(x)+3\cdot\lg(y)-\lg(z)$ b) $\log_a(p)-\frac{1}{2}\cdot\log_a(q)+\frac{1}{4}\cdot\log_a(r)$
c) $3\cdot\log_a(b)+\frac{1}{2}\cdot\log_a(b+x)$ d) $-\lg(u)-2\cdot\lg(v)-\frac{1}{3}\cdot\lg(w)$
e) $2\cdot[\lg(x)-\lg(y)]$ f) $2\cdot\lg(a)-3\cdot[\lg(b)+\lg(a)]$

14 Löse die Gleichungen.
a) $\lg(x)+\lg(3)=\lg(1+x)$ b) $\lg(x)=2\cdot\lg(x)+\lg(1+x)$ c) $\log_2(x)+8=\log_2(7x-8)$

15 Vereinfache.
a) $10^{\lg(x+1)}$ b) $10^{2\cdot\lg(x)}$ c) $10^{-2\cdot\lg(x)}$ d) $10^{-\lg(\sqrt{x})}$ e) $10^{[\lg(x)]^2}$

16 Ein exponentielles Wachstum erfolgt täglich um 3 % (7 %; 40 %; 0,3 %; –11 %; –4 %). Berechne die Verdoppelungs- bzw. die Halbwertszeit.

Fig. 1

17 Berechne zu dem Angebot der Land-Sparkasse den jährlichen Wachstumsfaktor (Zinsfaktor) und daraus die durchschnittliche Zunahme des Kapitals.
Vergleiche mit der Angabe der Sparkasse.

18 Direktor Knauf betrachtet die Umsatzsteigerung seiner Firma von 1980 bis 1995. Er meint, 75 % in 15 Jahren ist ja nicht viel, gerade 5 % pro Jahr.
Nimm an, der Umsatz ist jedes Jahr um genau p % gestiegen. Berechne diese durchschnittliche Zunahme.

19 Die Entwicklung des Exports der Bundesrepublik Deutschland kann für den Zeitraum von 1960 bis 1970 durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden.
a) Wähle $x=0$ für das Jahr 1960. Bestimme die Termdarstellung der Exponentialfunktion. Benutze dazu die Werte von 1960 und 1970.
b) Prüfe, in wie weit die übrigen Angaben der Grafik zu dieser Funktion passen.

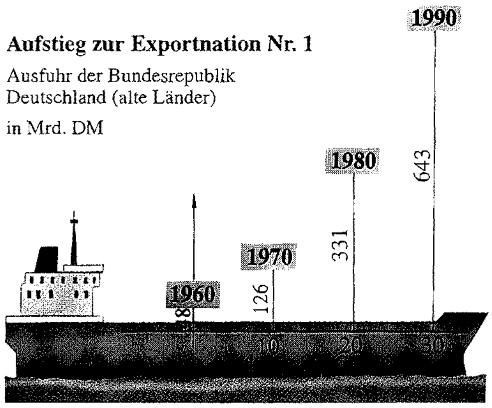

Fig. 2

20 Bei der Entladung eines Kondensators wird alle 5 Sekunden die Spannung gemessen.
Handelt es sich bei der Funktion $t \mapsto U$ um eine Exponentialfunktion? Wenn ja, gib ihre Termdarstellung an.

t (Zeit in s)	0	5	10	15	20
U (Spannung in V)	10	6,8	4,6	3,1	2,1

21 Eine unter Hochspannung stehende Ionisationskammer wird mit dem radioaktiven Edelgas Radon 220 gefüllt. Es wird die Stromstärke in Abhängigkeit von der Zeit gemessen.

t (Zeit in s)	0	20	40	60	80	100
I (Stromstärke in 10^{-11} A)	4	3,1	2,4	1,9	1,4	1,1

a) Trage die Messwerte in ein Koordinatensystem auf logarithmischem Papier ein.
b) Ermittle die Halbwertszeit.
c) Wie lautet die Termdarstellung der Funktion *Zeit* $\rightarrow$ *Stromstärke*?

22 Frische Milch ist ein guter Nährboden für Keime. 1 m*l* Milch enthielt eine halbe Stunde nach dem Melken 1300 Keime. Eine Stunde später waren es 7310 Keime.
a) Berechne die Anzahl der Keime unmittelbar nach dem Melken, wenn man exponentielles Wachstum der Keime annimmt.
b) Wie viel Keime enthielt 1 m*l* der Milch 1 Stunde nach dem Melken?

ASA	DIN
50	18
100	21
200	24
400	27
1000	31

23 Die Empfindlichkeit von Filmen wird sowohl in amerikanischen ASA-Werten als auch in deutschen DIN-Werten angegeben. Die Zuordnung ASA $\rightarrow$ DIN kann näherungsweise durch $\mathrm{DIN} = 1 + k \cdot \lg(\mathrm{ASA})$ beschrieben werden. Bestimme k.
Kontrolliere dein Ergebnis mit den übrigen Werten der Tabelle.

24 Der pH-Wert eines Stoffes ist der negative Zehnerlogarithmus der Wasserstoffionen-Konzentration (genauer: H_3O^+-Konzentration in mol/*l*). Ist z. B. der pH-Wert einer Seifenlösung 8,5, so beträgt die H^+-Konzentration $10^{-8,5}$ mol/*l*.
a) Welchen pH-Wert hat eine Lauge mit doppelt so hoher H^+-Konzentration?
b) Der Regen mit dem bisher höchsten Säuregehalt hatte den pH-Wert 2,4. Wie viel Mal größer als in reinem Wasser (pH-Wert 7) war die H^+-Konzentration?

25 Die Stärke von Erdbeben wird mit der sogenannten Richter-Skala gemessen. Dabei wird das Erdbeben mit einem schwachen, kaum wahrnehmbaren Beben verglichen. Ist das Beben k-mal so stark wie dieses, dann wird ihm die Stärke lg(k) zugeordnet.
a) Wie viel Mal stärker ist ein Erdbeben der Stärke 7 auf der Richter-Skala als ein Erdbeben der Stärke 6?
b) Das Erdbeben von 1906 in San Francisco, das große Teile der Stadt zerstörte, hatte eine Stärke von 8,3. Im Jahr 1978 ereignete sich auf der Schwäbischen Alb ein Beben der Stärke 5,8. Wie viel Mal stärker war das Beben in San Francisco?

26 Fig. 1 zeigt den Beginn einer Folge geometrischer Figuren. Das Konstruktionsprinzip ist bei jedem Schritt dasselbe:
Jede Strecke wird gedrittelt. Über dem mittleren Stück wird ein gleichseitiges Dreieck „aufgesetzt".
a) Offensichtlich wird die Länge des Streckenzuges von Schritt zu Schritt größer. Um welche Art von Wachstum handelt es sich?
b) Berechne die Länge des Streckenzuges nach 4 (40; 400; 100 000) Schritten.

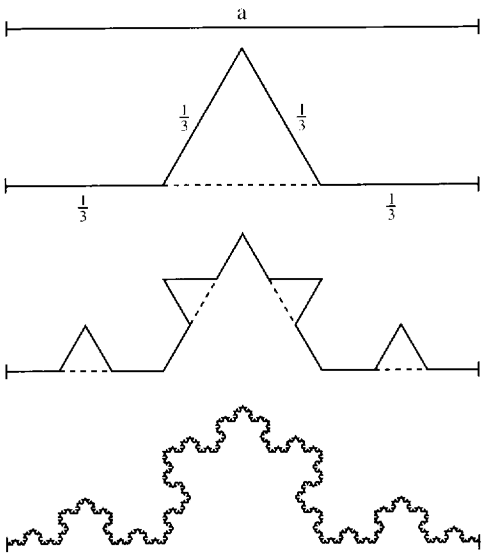

Fig. 1

Lambacher Schweitzer Band 10, S. 83–85 – Ergebnisse

Aufgabe 2:

Die Spiegelung eines Graphen an der y-Achse erreicht man, indem man im Funktionsterm x durch $-x$ ersetzt! Für Exponentialfunktionen bedeutet dies: $f(x) = a^x$ und $g(x) = a^{-x}$ haben Graphen, die bzgl. der y-Achse spiegelbildlich zueinander sind. Wegen $g(x) = a^{-x} = (\frac{1}{a})^x$ haben zwei Exponentialfunktionen spiegelbildche Graphen, wenn die *Basen Kehrwerte voneinander sind.*

Damit erhalten wir folgende Paare von Funktionen mit spiegelbildlichen Graphen:

1. $f_1(x) = 3^x$ und $f_5(x) = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$,
2. $f_(x) = 0{,}2^x = \frac{1}{5}^x = 5^{-x}$ und $f_3(x) = 5^x$,
3. $f_4(x) = 6{,}25^x = (\frac{25}{4})^x$ und $f_6(x) = (\frac{4}{25})^x$,
4. $f_7(x) = 0{,}3^x = (\frac{3}{10})^x$ und $f_8(x) = (\frac{10}{3})^x$.

Aufgabe 3:

Exponentialfunktionen sind monoton steigend, wenn die Basis $a > 1$ ist, und monoton fallend bei $a < 1$ ($a > 0$ in jedem Falle vorausgesetzt).

a) $f(x) = 4^x$ monoton wachsend, gespiegelter Graph: $g(x) = 4^{-x} = (\frac{1}{4})^x$ monoton fallend.

b) $f(x) = 0{,}7^x$ monoton fallend,
gespiegelter Graph: $g(x) = 0{,}7^{-x} = (\frac{7}{10})^{-x} = (\frac{10}{7})^x$ monoton steigend.

c) $f(x) = 3{,}75^x$ monoton steigend,
gespiegelter Graph: $g(x) = 3{,}75^{-x} = (\frac{15}{4})^{-x} = (\frac{4}{15})^x$ monoton fallend.

d) $f(x) = 2{,}7^x = (\frac{27}{10})^x$ monoton steigend,
gespiegelter Graph: $g(x) = (\frac{10}{27})^x$ monoton fallend.

e) $f(x) = (\frac{4}{5})^x$ monoton fallend,
gespiegelter Graph: $g(x) = (\frac{5}{4})^x$ monoton steigend.

f) $f(x) = (\frac{8}{3})^x$ monoton steigend,
gespiegelter Graph: $g(x) = (\frac{3}{8})^x$ monoton fallend.

g) $f(x) = (\frac{17}{4})^x$ monoton steigend,
gespiegelter Graph: $g(x) = (\frac{4}{17})^x$ monoton fallend.

h) $f(x) = 0{,}1^x$ monoton fallend,
gespiegelter Graph: $g(x) = 10^x$ monoton steigend.

Aufgabe 7:

a) $3^x = \frac{1}{9} = 3^{-2} \iff x = -2$.

b) $5^x = 0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 5^{-2} \iff x = -2$,

c) $32^x = 8 \iff 2^{5x} = 2^3 \iff 5x = 3 \iff x = \frac{3}{5}$,

d) $8^x = 0{,}25 \iff 2^{3x} = 2^{-2} \iff 3x = -2 \iff x = -\frac{2}{3}$,

e) $25^x = 0{,}2 \iff 5^{2x} = 5^{-1} \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}$,

f) $16^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff 2^{4x} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}} \iff 4x = -\frac{1}{2} \iff x = -\frac{1}{8}$,

g) $625^x = 125 \iff 5^{4x} = 5^3 \iff 4x = 3 \iff x = \frac{3}{4}$,

h) $243^x = \frac{1}{9} \iff 3^{5x} = 3^{-2} \iff 5x = -2 \iff x = -\frac{2}{5}$,

i) $0{,}5^x = 16 \iff 2^{-x} = 2^4 \iff -x = 4 \iff x = -4$,

k) $0{,}2^x = 125 \iff 5^{-x} = 5^3 \iff x = -3$,

l) $0{,}25^x = 128 \iff 2^{-2x} = 2^7 \iff x = -\frac{7}{2}$,

m) $0{,}04^x = 125 \iff (\frac{4}{100})^x = 5^3 \iff (\frac{1}{25})^x = 5^3 \iff 5^{-2x} = 5^3 \iff x = -\frac{3}{2}$.

Aufgabe 8:

a) $y = \log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$,
b) $y = \log_5 0{,}008 = \log_5(2^3 \cdot 10^{-3}) = \log_5 5^{-3} = -3$,
b) alternativ: $y = \log_5 0{,}008 \iff 5^y = \frac{8}{1000} = \frac{2^3}{10^3} = 5^{-3} \iff y = -3$,
c) $y = \log_{0,5} 8 \iff 0{,}5^y = 8 \iff 2^{-y} = 2^3 \iff y = -3$,
d) $y = \log_{27} \frac{1}{3} \iff 27^y = \frac{1}{3} \iff 3^{3y} = 3^{-1} \iff 3y = -1 \iff y = -\frac{1}{3}$,
e) $\log_a \frac{1}{27} = -3 \iff a^{-3} = \frac{1}{27} = 3^{-3} \iff a = 3$ (für $a > 0$, $a \neq 1$),
f) $\log_a \frac{1}{9} = -4 \iff a^{-4} = \frac{1}{9} = 3^{-2} \iff a = 3^{\frac{-2}{-4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$(für $a > 0$, $a \neq 1$),
g) $\log_{27} x = \frac{4}{3} \iff x = 27^{\frac{4}{3}} = (3^3)^{\frac{4}{3}} = 3^4 = 81$ (für $x > 0$),
h) $\log_{16} x = -\frac{5}{4} \iff x = 16^{-\frac{5}{4}} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$ (für $x > 0$).

Aufgabe 9:

Exponentialgleichungen löst man durch *Logarithmieren,* um die Unbekannte aus dem Exponenten 'herunterzuholen'.
In den folgenden Rechnungen bezeichnet log immer den Logarithmus zu *irgendeiner* Basis, innerhalb einer Rechnung aber immer *derselben* Basis. Zur Berechnungd er Näherungswerte benutzt man irgendeinen auf dem Taschenrechner verfügbaren Logarithmus, am naheliegendsten den *dekadische* Logarithmus $\log_{10} = \lg$.
a) $2 \cdot 3^x = 0{,}8 \iff 3^x = 0{,}4 \iff x \log 3 = \log 0{,}4 \iff x = \dfrac{\log 0{,}4}{\log 3} \approx -0{,}83$,
b) $5 \cdot (\dfrac{2}{3})^x = \dfrac{2}{5} \iff (\dfrac{2}{3})^x = \dfrac{2}{25} \iff x \log \dfrac{2}{3} = \log \dfrac{2}{25} \iff x = \dfrac{\log \frac{2}{25}}{\log \frac{2}{3}} \approx 6{,}23$,
c) $\dfrac{2}{3} \cdot (\dfrac{7}{5})^x = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \iff \log 2 - \log 3 + x \log \dfrac{7}{5} = \dfrac{1}{2} \log 2 \iff x \log \dfrac{7}{5} = \dfrac{1}{2} \log 2 - \log 2 + \log 3 = \log 3 - \dfrac{1}{2} \log 2 \iff x = \dfrac{\log 3 - \frac{1}{2} \log 2}{\log \frac{7}{5}} \approx 2{,}24$,
d) $4 + 3 \cdot 2^x = 6{,}9 \iff 2^x = \dfrac{2{,}9}{3} \iff x \log 2 = \log 2{,}9 - \log 3 \iff x = \dfrac{\log 2{,}9 - \log 3}{\log 2} \approx -0{,}05$
…n) $5^{x+1} = 8^{2x} \iff (x+1) \log 5 = 2x \log 8 \iff x(\log 5 - 2 \log 8) = -\log 5 \iff x = \dfrac{\log 5}{2 \log 8 - \log 5} \approx 0{,}63$,
o) $2{,}8^{3x} \cdot 1{,}5^x = 10 \iff 3x \log 2{,}8 + x \log 1{,}5 = \log 10 \iff x(3 \log 2{,}8 + \log 1{,}5) = \log 10 \iff x = \dfrac{\log 10}{3 \log 2{,}8 + \log 1{,}5} \approx 0{,}66$,
p) $0{,}4 \cdot 3{,}2^x = 2^{3x-1} \iff \log 0{,}4 + x \log 3{,}2 = (3x-1) \log 2 \iff x(\log 3{,}2 - 3 \log 2) = -\log 2 - \log 0{,}4 \iff x \log \dfrac{3{,}2}{2^3} = -\log(2 \cdot 0{,}4) \iff x = -\dfrac{\log 0{,}8}{\log 0{,}4} \approx -0{,}24$
q) $3^{4x} \cdot 4^x = 5^{x+2} \iff 4x \log 3 + x \log 4 = (x+2) \log 5 \iff x(4 \log 3 + \log 4 - \log 5) = 2 \log 5 \iff x = \dfrac{2 \log 5}{4 \log 3 + \log 4 - \log 5} \approx 0{,}77$.

Aufgabe 10:

a) Substituiere $z = 8^x$:

$$8^{x+2} - 8^{2x} = 240 \iff 8^2 \cdot z - z^2 = 240 \iff z^2 - 64z + 240 = 0$$
$$\iff z = 32 \pm \sqrt{32^2 - 240} = 32 \pm \sqrt{784} = 32 \pm 28 \iff 8^x = 60 \ \vee\ 8^x = 4$$
$$\iff x \log 8 = \log 60 \ \vee\ x \log 8 = \log 4 \iff x = \frac{\log 60}{\log 8} \approx 1{,}97 \ \vee\ x = \frac{\log 4}{\log 8} \approx 0{,}67$$

b) Substituiere $z = 6^x$:

$$6^{2+x} + 6^{2-x} = 78 \iff 6^2 \cdot z + \frac{6^2}{z} = 78 \iff 6^2 \cdot z^2 + 6^2 = 78z$$
$$\iff z^2 - \frac{13}{6}z + 1 = 0 \iff z = \frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{169}{144} - 1} = \frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{13}{12} \pm \frac{5}{12}$$
$$\iff 6^x = \frac{3}{2} \ \vee\ 6^x = \frac{2}{3} \iff x = \frac{\log \frac{3}{2}}{\log 6} \approx 0{,}23 \ \vee\ x = \frac{\log \frac{2}{3}}{\log 6} \approx -0{,}23$$

c) Substituiere $z = 2^{3x}$:

$$96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} + 3 \cdot 2^{3x-2} = 15 \iff 96 \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot z \cdot 2^{-2} = 15 \iff \frac{48}{z} + \frac{3}{4}z = 15$$
$$\iff 48 + \frac{3}{4}z^2 = 15z \iff z^2 - 20z + 64 = 0 \iff z = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6$$
$$\iff 2^{3x} = 16 = 2^4 \ \vee\ 2^{3x} = 4 = 2^2 \iff 3x = 4 \ \vee\ 3x = 2 \iff x = \frac{4}{3} \ \vee\ x = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 11:

lg ist eine abkürzende Schreibweise für den dekadischen Logarithmus $\log_{10}$. Aufgrund der Definition des Logarithmus als Exponent: $y = \log_a(x) \iff a^y = x$, erhält man folgende äquivalente Gleichungsumformungen und Lösungen:

a) $\lg(1 - 3x) = 0{,}8 \iff 1 - 3x = 10^{0{,}8} \iff x = \dfrac{1 - 10^{0{,}8}}{3} \approx -1{,}77$

b) $\lg(x^2 - 24) = 3 \iff x^2 - 24 = 10^3 = 1000 \iff x^2 = 1024 \iff x = \pm 32\,.$

c) $\log_2(x - 1) = 2{,}5 = \dfrac{5}{2} \iff x - 1 = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2} \iff x = 1 + 4\sqrt{2} \approx 6{,}66\,.$

d) $\log_3(1 - x) = -0{,}3 \iff 1 - x = 3^{-0{,}3} \iff x = 1 - 3^{-0{,}3} \approx 0{,}28$

Aufgabe 12:

Bei den folgenden Umformungen setzen wir voraus, dass alle Variablen nur positive Werte annehmen können!

a) $\lg(2ux) = \lg(2) + \lg(u) + \lg(x)$,
b) $\lg(3x^2) = \lg(3) + 2\lg(x)$,
c) $\log_2(5u^3) = \log_2(5) + 3\log_2(u)$,
d) $\log_3(7u^2x^3) = \log_3(7) + 2\log_3(u) + 3\log_3(x)$,
e) $\lg(\frac{ax}{b}) = \lg(a) + \lg(x) - \lg(b)$,
f) $\log_a(\frac{1}{x^2 v}) = -2\log_a(x) - \log_a(v)$,
g) $\log_a(\frac{1}{x^2 a^3}) = -2\log_a(x) - 3$,
h) $\log_3(\frac{4}{9x^5}) = \log_3(4) - 2 - 5\log_3(x)$,
i) $\lg[(x+y)^2] = 2\lg(x+y)$,
k) $\lg(\sqrt{1+a}) = \frac{1}{2}\lg(1+a)$,
l) $\lg(\frac{1}{x\sqrt{1+x}}) = -\lg(x) - \frac{1}{2}\lg(1+x)$,
m) $\log_a(\frac{1}{a\sqrt{1+a}}) = -1 - \frac{1}{2}\log_a(1+a)$.

Aufgabe 13:

a) $2\lg(x)+3\lg(y)-\lg(z)=\lg(\frac{x^2y^3}{z})$,

b) $\log_a(p)-\frac{1}{2}\log_a(q)+\frac{1}{4}\log_a(r)=\log_a(pr^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{2}})=\log_a(\frac{p\sqrt[4]{r}}{\sqrt{q}})$,

c) $3\log_a(b)+\frac{1}{2}\log_a(b+x)=\log_a(b^3\cdot\sqrt{b+x})$,

d) $-\lg(u)-2\lg(v)-\frac{1}{3}\lg(w)=\lg(\frac{1}{uv^2\sqrt[3]{w}})$,

e) $2[\lg(x)-\lg(y)]=2\lg(\frac{x}{y})=\lg(\frac{x^2}{y^2})$.

f) $2\lg(a)-3[\lg(b)+\lg(a)]=2\lg(a)-3\lg(b)-3\lg(a)=-\lg(a)-3\lg(b)=\lg(\frac{1}{ab^3})$.

Aufgabe 15:

Wir verwenden die grundlegende Beziehung $10^{\lg(x)}=x$.

a) $10^{\lg(x+1)}=x+1$,

b) $10^{2\lg(x)}=(10^{\lg(x)})^2=x^2$,

c) $10^{-2\lg(x)}=(10^{\lg(x)})^{-2}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$,

d) $10^{-\lg(\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x}}$,

e) $10^{[\lg(x)]^2}=10^{\lg(x)\cdot\lg(x)}=(10^{\lg(x)})^{\lg(x)}=x^{\lg(x)}$.

Aufgabe 17:

Sei p der Jahreszinssatz. Dann erhöht sich ein Kapital K in jedem Jahr auf $K+K\cdot p=K(1+p)$, wird also mit dem Faktor $1+p$ multipliziert. In 6 Jahren wird das Kapital also sechsmal mit diesem Faktor multipliziert, also insgesamt mit $(1+p)^6$.
Im vorliegenden Fall ist $K=1000$, p unbekannt, und $1500=K(1+p)^6=1000(1+p)^6$. Also:

$$1{,}5=(1+p)^6 \iff 1+p=\sqrt[6]{1{,}5} \iff p=\sqrt[6]{1{,}5}-1\approx 0{,}07=7\%\,.$$

Einen Wertzuwachs von 50% in 6 Jahren erhält man also bei einem jährlichen Zinssatz von 7%.

Aufgabe 18:

Sei p die jährliche Umsatzsteigerung. Sie wird als konstant unterstellt und im Aufgabentext als 'durchschnittliche Zunahme' bezeichnet. Bei einem Umsatzplus von 75% in 15 Jahren, also einem Anwachsen des Umsatzes auf das 1,75-fache innerhalb von 15 Jahren, gilt:

$$1{,}75=(1+p)^{15} \iff 1+p=\sqrt[15]{1{,}75} \iff p=\sqrt[15]{1{,}75}-1\approx 0{,}038=3{,}8\%\,.$$

Die durchschnittliche jährliche Umsatzsteigerung beträgt also nur 3,8%.