Damit ist die x-Koordinate der gesuchten Lösungspunkte *notwendig* $\frac{5}{4}$. Die y-Koordinate ergibt sich durch Einsetzen des gefundenen x-Wertes in eine der beiden nach y aufgelösten Gleichungen: $y = -\frac{5}{4} - 2 = -\frac{13}{4}$. Das Gleichungssystem hat also die eindeutige Lösung $(\frac{5}{4}, -\frac{13}{4})$:

$$\mathbb{L} = \{(\frac{5}{4}, -\frac{13}{4})\}.$$

Das hier skizzierte Verfahren nennt man *Gleichsetzungsverfahren.* Dieses ist geometrisch motiviert und immer durchführbar, wenn *beide* Gleichungen nach y auflösbar sind. Das ist jedoch nicht immer möglich (wann nicht?).

Dagegen ist das sog. *Einsetzungsverfahren* auf alle linearen Gleichungssysteme anwendbar. Es besteht in folgender kleinen Modifikation: Man löse nur *eine* der Gleichungen nach *irgendeiner* der Variablen auf (nicht unbedingt nach y) und setze den gefundenen Term für diese Variable in die andere Gleichung ein. Man fahre dann wie im Gleichsetzungsverfahren fort.

Beispiel: $3x + 4y + 5 = 0 \ \wedge \ x + 5y + 9 = 0$.
Löst man die zweite Gleichung nach x auf, so erhält man $x = -5y - 9$, und Einsetzen in die erste führt dann zu

$$3(-5y - 9) + 4y + 5 = 0 \iff -15y - 27 + 4y + 5 = 0 \iff 11y = -22 \iff y = -2\,.$$

Setzt man nun $y = -2$ in den für x gefundenen Term: $x = -5y - 9$ ein, so erhält man $x = -5(-2) - 9 = 1$. Die einzige Lösung ist $(1, -2)$.

Gegenüber einer Auflösung *beider* Gleichungen nach y hat dieses Verfahren doch einige rechentechnische Vorteile. (Lösen Sie zur Verdeutlichung einmal das Gleichungssystem nach dem oben skizzierten Gleichsetzungsverfahren.) Darüberhinaus lässt sich das Einsetzungsverfahren unmittelbar auf lineare Gleichungssyteme mit mehr als zwei Gleichungen und Variable anwenden.

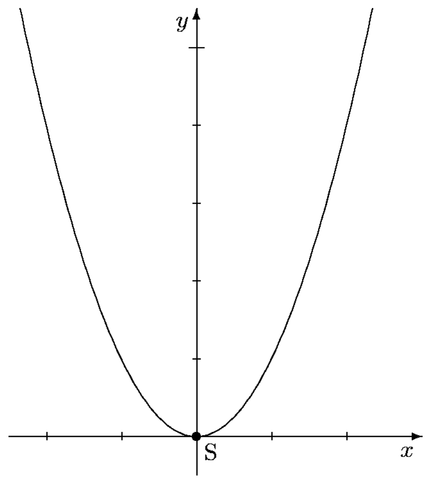
Neben den beiden hier genannten elementaren Lösungsverfahren gibt es noch das Gauß'sche Eliminationsverfahren, mit dem man Gleichungssysteme mit vielen Gleichungen und vielen Variablen systematisch und effektiv lösen kann. Dies werden wir bei späterer Gelegenheit behandeln.

6. Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen

Nach den linearen Funktionen (das sind gerade die mit einem Funktionsterm, in dem x höchstens in erster Potenz vorkommt) wollen wir nun Funktionen f studieren, in deren Term x^2 auftritt:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{Q}\,, \ a \neq 0\,.$$

Wir nennen eine solche Funktion *quadratisch.*



a. Normalparabeln. Die einfachste quadratische Funktion ist die mit dem Term

$$f(x) = x^2\,.$$

Ihren Graphen nennen wir eine *Normalparabel.* Auf der Basis einer kleinen Wertetabelle haben wir im Unterricht die nebenstehende Skizze angefertigt. Zunächst haben wir festgestellt, dass diese Normalparabel symmetrisch zur y-Achse ist. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\,.$$

Außerdem hat die Normalparabel einen ausgezeichneten Punkt, den Scheitelpunkt S: Hier treffen sich Parabel und Symmetrieachse.

Allgemein verstehen wir unter einer *Normalparabel* die obige Kurve *unabhängig* von ihrer Lage im Koordinatensystem. Der *Scheitelpunkt* ist allgemein definiert als der Schnittpunkt von Symmetrieachse und Parabel.

Nun kann man zwar beliebig viele Punkte des Funktionsgraphen berechnen, aber eben nicht alle. Wir müssen rechtfertigen, dass die Normalparabel zwischen den exakt berechneten Punkten tatsächlich den skizzierten Verlauf hat.

Wegen der Symmetrie genügt es die rechte Hälfte der Normalparabel, d. h. den Bereich $x \geq 0$ zu studieren. In diesem Bereich *steigt* der Graph von f an, denn bei wachsenden x-Werten wachsen auch die Quadrate. Aber Vorsicht! Diese scheinbar offensichtliche Tatsache gilt nicht immer: So ist $-3 < 2$, aber $(-3)^2 \not< 2^2$. Man kann jedoch zeigen, dass diese Aussage im Bereich $x \geq 0$ gültig ist:

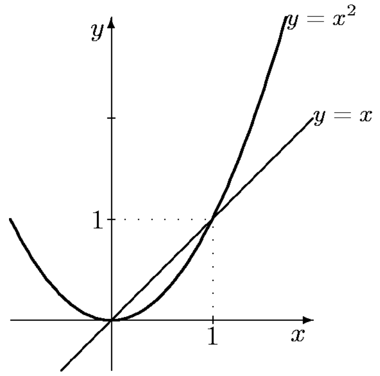
$$0 \leq x_1 < x_2 \implies x_1^2 < x_2^2 .$$

Beweis: Für $x_1 = 0$ ist diese Aussage unmittelbar klar. Da die Multiplikation mit *positiven* Zahlen eine Äquivalenzumformung für Ungleichungen ist, gilt für $x_1 > 0$:

$$\begin{array}{rrcll} & x_1 & < & x_2 & \mid \cdot x_1 (>0) \\ \iff & x_1 x_1 & < & x_2 x_1 & \\ \iff & x_1^2 & < & x_1 x_2 & \end{array} \quad \text{sowie} \quad \begin{array}{rrcll} & x_1 & < & x_2 & \mid \cdot x_2 (>0) \\ \iff & x_1 x_2 & < & x_2 x_2 & \\ \iff & x_1 x_2 & < & x_2^2 & \end{array}$$

Kombiniert man die letzten Ungleichungen, so erhält man $x_1^2 < x_2^2$.

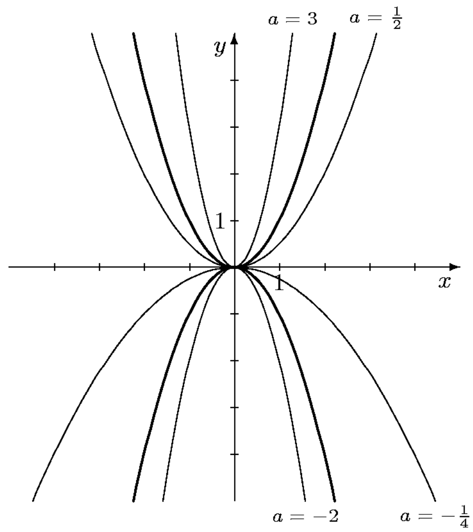
Schließlich wollen wir noch begründen, dass die Normalparabel tatsächlich die gezeichnete *Krümmung* aufweist und sich in der dargestellten Weise an die x-Achse anschmiegt (siehe nebenstehenden Ausschnitt). Wir zeigen, dass die Parabel im Bereich $0 < x < 1$ *unterhalb* und im Bereich $x > 1$ *oberhalb* der 45^0-Linie mit der Gleichung $y = x$ liegt. Dies bedeutet:



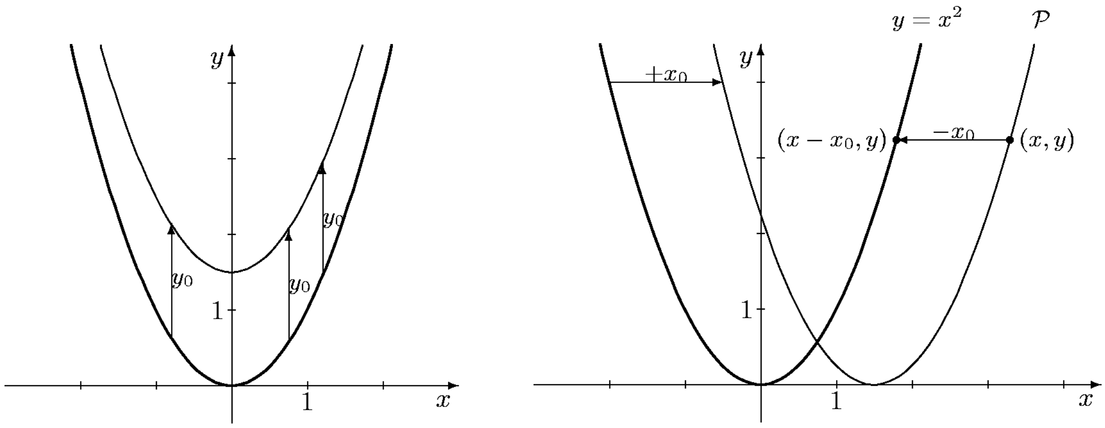
$$0 < x < 1 \implies x^2 < x , \quad \text{und} \quad 1 < x \implies x < x^2 .$$

Beide Aussagen erhält man, indem man die Ungleichungen $x \left\{ \begin{smallmatrix} < \\ > \end{smallmatrix} \right\} 1$ mit der positiven Zahl x multipliziert: $x \cdot x \left\{ \begin{smallmatrix} < \\ > \end{smallmatrix} \right\} x$.

Neben der bisher behandelten nach oben geöffneten Normalparabel mit dem Scheitel im Koordinatenursprung gibt es noch viele weitere damit verwandte Kurven. Betrachtet man etwa die quadratische Funktion $f(x) = -x^2$, so erhält man ebenfalls eine Normalparabel als Funktionsgraph, sogar mit unveränderter Symmetrieachse und Scheitelpunkt, jedoch mit der Öffnungsrichtung nach *unten.* (Siehe die dicker gezeichneten Normalparabeln in nebenstehender Skizze.) Betrachtet man allgemein $f(x) = ax^2$ mit $a \neq 0$, so erhält man die nebenstehenden Kurven, die aus der Normalparabel durch *Streckung* oder *Stauchung* in y-Richtung entstehen. Alle diese Kurven nennt man *Parabeln.* Ist $a > 1$, so sind die Parabeln *enger,* ist $0 < a < 1$, so sind sie *weiter* als Normalparabeln. Für negatives a ergeben sich entsprechende nach unten geöffnete Parabeln. Für $a = \pm 1$ erhält man die dicker gezeichneten Normalparabeln.



b. Verschiebungen und Spiegelungen. Wir wollen nun Gleichungen für Parabeln in anderen Lagen bestimmen. Verschiebt man die Ausgangsparabel mit der Gleichung $y = x^2$ um y_0 in y-Richtung, so erhält man für die neue Parabel unmittelbar die Gleichung $y = x^2 + y_0$ (siehe nachfolgende Skizze links). Für Verschiebungen in x-Richtung ist die neue Gleichung nicht so offensichtlich.



Wir verschieben nun die Ausgangsparabel mit der Gleichung $y = x^2$ um x_0 in x-Richtung (siehe Skizze rechts). Um eine Gleichung für die verschobene Parabel $\mathcal{P}$ zu finden, betrachten wir einen beliebigen Punkt (x, y) und untersuchen, unter welcher Bedingung er auf $\mathcal{P}$ liegt. Offensichtlich ist dies doch genau dann der Fall, wenn der Punkt $(x - x_0, y)$ auf der Ausgangsparabel liegt und also deren Gleichung erfüllt: $y = (x - x_0)^2$. Damit erhält man

$$(x, y) \in \mathcal{P} \iff y = (x - x_0)^2 ,$$

was nichts anderes heißt, als dass $y = (x - x_0)^2$ eine Gleichung für $\mathcal{P}$ ist. Wir halten fest:

> Verschiebt man einen Graphen um x_0 in x-Richtung, so erhält man eine Gleichung für den verschobenen Graphen, indem man in der Ausgangsgleichung die Variable x durch $x - x_0$ ersetzt.

Auffallend ist die Vorzeichenumkehr von x_0 zu $x - x_0$. Bei der Verschiebung in y-Richtung haben wir keine solche Änderung des Vorzeichens gesehen. Dies war jedoch nur scheinbar. Wenn man die im ersten Fall gefundene Gleichung $y = x^2 + y_0$ äquivalent umformt zu $y - y_0 = x^2$, sieht man, dass hier eine völlig analoge Regel gilt:

> Verschiebt man einen Graphen um y_0 in y-Richtung, so erhält man eine Gleichung für den verschobenen Graphen, indem man in der Ausgangsgleichung die Variable y durch $y - y_0$ ersetzt.

Diese letzte Formulierung hat auch den Vorteil, dass sie für jede Relations(un)gleichung gilt, während die erste Form nur für nach y aufgelöste Gleichungen anwendbar war.

Die obigen Ergebnisse sind Teil einer Reihe von Beziehungen zwischen algebraischen Operationen an Relations(un)gleichungen und der Auswirkung auf den Graphen, die wir in folgender

Tabelle zusammenstellen:

Algebraische Operation an der Relationsgleichung	Geometrische Operation an ihrem Graphen
Ersetze x durch $x - x_0$	Verschiebung in x-Richtung um x_0
Ersetze y durch $y - y_0$	Verschiebung in y-Richtung um y_0
Ersetze x durch $-x$	Spiegelung an der y-Achse
Ersetze y durch $-y$	Spiegelung an der x-Achse
Ersetze x *und* y durch $-x$ bzw. $-y$	Drehung um 180^0 um $(0, 0)$
Vertausche x und y	Spiegelung an der 45^0-Linie

Die beiden Aussagen zur Verschiebung haben wir oben behandelt. Die Aussagen zur Spiegelung an den Achsen sind unmittelbar einsichtig, und daraus ergibt sich die Aussage zur Spiegelung am Koordinatenursprung, weil zwei Achsenspiegelungen nacheinander gerade eine Drehung um 180^0 bewirken. Zur letzten Aussage siehe die Lösungen zu Übungen (3).

c. Scheitelpunktsform. Wir kombinieren nun die Ergebnisse aus a. und b. Startet man mit einer Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$, so hat diese den Scheitel im Koordinatenursprung $(0, 0)$ und a gibt Form und Öffnungsrichtung der Parabel an (siehe Abschnitt a.). Verschiebt man nun diese Parabel, so geben die Koordinaten des neuen Scheitelpunkts $S = (x_S, y_S)$ zugleich die Verschiebungen in den Achsenrichtungen an: $x_0 = x_S$, $y_0 = y_S$. Man erhält daher für die verschobene Parabel als Gleichung

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S \,,$$

Da dabei $S = (x_S, y_S)$ der Scheitel der Parabel ist, nennt man diese Form der Parabelgleichung die *Scheitelpunktsform.* Wir fassen zusammen:

Die Lösungsmenge einer Gleichung in Scheitelpunktsform

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S$$

- ist eine Parabel mit Symmetrieachse parallel zur y-Achse und
- mit dem Scheitelpunkt $S = (x_S, y_S)$.
- Das Vorzeichen von a bestimmt die Öffnungsrichtung:

$$\begin{aligned} a > 0 &\implies \text{nach oben geöffnete Parabel,} \\ a < 0 &\implies \text{nach unten geöffnete Parabel.} \end{aligned}$$

- Der Betrag von a legt die Gestalt fest:

$$\begin{aligned} |a| > 1 &\implies \textit{enger} \text{ als eine Normalparabel,} \\ |a| = 1 &\implies \text{Normalparabel,} \\ |a| < 1 &\implies \textit{weiter} \text{ als eine Normalparabel.} \end{aligned}$$

Da die obige Scheitelpunktsform eine Funktionsgleichung ist, kann man diese Resultate unmittelbar in der Sprache der Funktionen formulieren:

> Ist eine Funktion f gegeben durch einen Funktionsterm in Scheitelpunktsform
>
> $$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S\,,$$
>
> so ist der Graph von f eine *Parabel* mit der *Symmetrieachse* parallel zur y-Achse und dem *Scheitelpunkt* $S = (x_S, y_S)$. Die Form und Öffnungsrichtung der Parabel ist durch a festgelegt (siehe oben).

d. Quadratische Ergänzung. Wir wollen nun zeigen, dass sich *jeder* quadratische Funktionsterm $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ in Scheitelpunktsform umformen lässt. Die Grundidee ist die sog. *quadratische Ergänzung*. Durch Addition eines geeigneten Terms wird ein quadratischer Term zu einem vollständigen Quadrat ergänzt; damit sich der Term aber insgesamt in seinen Werten nicht ändert, muss man die Addition wieder rückgängig machen. In Formeln:

$$x^2 + px = x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 \ - \ (\frac{p}{2})^2 = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4}\,. \tag{1}$$

Für beliebige *normierte* quadratische Terme $x^2 + px + q$ erhält man so

$$x^2 + px + q = x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 \ - (\frac{p}{2})^2 + q = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q\,. \tag{2}$$

> Bei normierten Termen ist die quadratische Ergänzung *das Quadrat des halbierten Koeffizienten von x.*

Bei beliebigen (nicht normierten) quadratischen Termen $ax^2 + bx + c$ klammert man zunächst a teilweise aus:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) \ + \ c\,, \tag{3}$$

und ergänzt dann den Term in der Klammer $x^2 + \frac{b}{a}\,x$ wie oben in (1):

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x^2 + \frac{b}{a}x) \ + \ c = a\Big[x^2 + \frac{b}{a}\,x + (\frac{b}{2a})^2 \ - \ \frac{b^2}{4a^2}\Big] + c \\ &= a\Big[x^2 + \frac{b}{a}\,x + (\frac{b}{2a})^2\Big] - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c \\ ax^2 + bx + c &= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned} \tag{4}$$

Anmerkung: Keine dieser Formeln sollte man stur auswendig lernen. Es genügt, sich das Verfahren der quadratischen Ergänzung im normierten Fall (siehe (1)) sowie das Ausklammern des führenden Koeffizienten a im allgemeinen Fall (siehe (3)) zu merken.

Diese Überlegungen zeigen, dass sich *jeder* quadratische Funktionsterm $f(x) = ax^2 + bx + c$ in Scheitelpunktsform transformieren lässt und folglich eine Parabel als Graphen hat. Beachten Sie, dass dabei der sog. *führende Koeffizient* a im Funktionsterm identisch ist mit dem Faktor a

in der Scheitelpunktsform. Wir fassen zusammen:

- Unter einer *quadratischen* Funktion versteht man eine Funktion f, die durch einen Funktionsterm der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{Q},\ a \neq 0)$ definiert werden kann.
- Der Funktionsgraph einer quadratischen Funktion ist eine *Parabel* mit der Symmetrieachse parallel zur y-Achse.
- Der führende Koeffizient a gibt an, welche Öffnungsrichtung die Parabel hat:

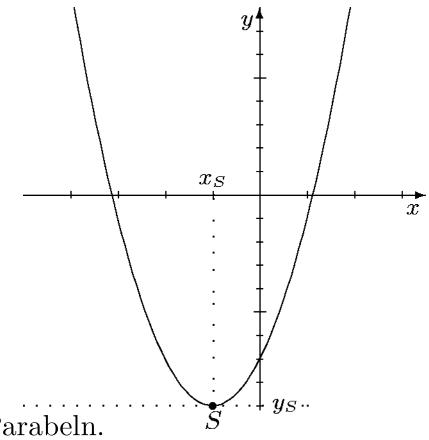
$$\begin{aligned} a > 0 &\implies \text{nach } \textit{oben} \text{ geöffnete Parabel,} \\ a < 0 &\implies \text{nach } \textit{unten} \text{ geöffnete Parabel,} \end{aligned}$$

  und ob sie weiter oder enger als eine Normalparabel ist:

$$\begin{aligned} |a| > 1 &\implies \textit{enger} \text{ als eine Normalparabel,} \\ |a| = 1 &\implies \text{Normalparabel,} \\ |a| < 1 &\implies \textit{weiter} \text{ als eine Normalparabel.} \end{aligned}$$

- Den *Scheitelpunkt* der Parabel ermittelt man, indem man den Funktionsterm mittels quadratischer Ergänzung in die Scheitelpunktsform überführt.

d. Maximal- und Minimalwerte. Aus der Tatsache, dass quadratische Funktionen Parabeln als Funktionsgraphen haben, kann man weitere interessante Informationen herleiten. Wir werden dies im nächsten Abschnitt an den *Nullstellen* quadratischer Funktionen sehen und wir wollen es hier an dem nicht minder wichtigen Thema der *Maximal-* und *Minimalwerte* solcher Funktionen deutlich machen.



Ist der Funktionsgraph einer quadratischen Funktion f eine nach *oben* geöffnete Parabel, so können die Funktionswerte von f (dies sind gerade die y-Koordinaten der Parabelpunkte) nach oben unbegrenzt wachsen. Nach unten jedoch sind sie begrenzt, da unterhalb des Scheitels keine Parabelpunkte liegen. Der kleinste Funktionswert, der vorkommt, ist die y-Koordinate des Scheitels $S = (x_S, y_S)$, also der Wert y_S; und dieser Wert wird als Funktionswert $y_S = f(x_S)$ an der *Stelle* x_S angenommen. Dies erkennt man unmittelbar an der nebenstehenden Skizze. Entsprechende Aussagen gelten für nach unten geöffnete Parabeln.

e. Quadratische Gleichungen. Unter einer *quadratischen* Gleichung verstehen wir im folgenden eine Gleichung in *einer* Variablen, die sich in der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{Q},\ a \neq 0)$$

darstellen lässt. Betrachtet man die linke Seite als einen Funktionsterm $f(x) = ax^2 + bx + c$, so sind die Lösungen der quadratischen Gleichungen gerade die *Nullstellen* der Funktion f, das sind die x-Werte, für die $f(x) = 0$ gilt. Geometrisch sind dies gerade die x-Koordinaten der Schnittpunkte (die Schnitt*stellen*) des Funktionsgraphen mit der x-Achse. Da die Funktionsgraphen quadratischer Funktionen Parabeln mit einer Symmetrieachse parallel zur y-Achse sind, treffen sie die x-Achse in keinem, einem oder genau zwei Punkten. Folglich gilt:

Quadratische Gleichungen haben keine, eine oder zwei Lösungen.

Welcher Fall vorliegt, hängt von der Öffnungsrichtung der Parabel und der Lage des Scheitelpunktes ab. Letztere ermittelt man mittels quadratischer Ergänzung. Diese kann man nun auch benutzen, um die Schnittstellen *explizit* zu bestimmen.
1. Beispiel:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 = 0 &\iff x^2 - x = 6 \\ &\iff x^2 - x + (\frac{1}{2})^2 = 6 + \frac{1}{4} \\ &\iff (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Ausgangsgleichung mittels quadratischer Ergänzung *äquivalent* in eine Gleichung der Form $z^2 = d$ überführt worden, wobei hier abkürzend $z = x - \frac{1}{2}$ und $d = \frac{25}{4}$ gesetzt ist. Ob diese Gleichung $z^2 = d$ eine Lösung hat, hängt nun davon ab, ob d eine *Quadratzahl* ist oder nicht. In diesem 1. Beispiel ist $d = \frac{25}{4} = (\frac{5}{2})^2$ eine Quadratzahl, und die Gleichung nimmt die Form $z^2 = c^2$ an mit $c = \frac{5}{2}$. Derartige Gleichungen haben wir in Abschnitt 3.f. (siehe S. 22) besprochen; es gilt nämlich

$$\boxed{z^2 = c^2 \iff z = \pm c}$$

wobei $z = \pm c$ eine abkürzende Schreibweise für $z = c \,\vee\, z = -c$ ist. Diese Beziehung zusammen mit der vorangehend benutzten quadratischen Ergänzung stellt die Grundlage für die Lösung quadratischer Gleichungen dar.

Wir wenden dies nun auf $z = x - \frac{1}{2}$ und $c = \frac{5}{2}$ an:

$$(x - \frac{1}{2})^2 = (\frac{5}{2})^2 \iff x - \frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2}\,.$$

Hier liegt der entscheidende Reduktionsschritt von *einer quadratischen* Gleichung zu *zwei linearen* Gleichungen! Die beiden linearen Gleichungen löst man nun mit den üblichen Methoden:

$$\begin{aligned} (x - \frac{1}{2})^2 = (\frac{5}{2})^2 &\iff x - \frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2} \iff x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\ &\iff x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \,\vee\, x = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -2\,. \end{aligned}$$

Insgesamt haben diese Äquivalenzumformungen gezeigt, dass die gestellte Beispielgleichung genau die beiden Lösungen 3 und -2 hat: $\mathbb{L} = \{-2\,, 3\}$.

2. Beispiel: Wir ändern nur ein Vorzeichen und untersuchen die Gleichung $x^2 - x + 6 = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 - x + 6 = 0 &\iff x^2 - x = -6 \\ &\iff x^2 - x + (\frac{1}{2})^2 = -6 + \frac{1}{4} \\ &\iff (x - \frac{1}{2})^2 = -\frac{23}{4}\,. \end{aligned}$$

In diesem Falle ist $d = -\frac{23}{4}$ sicher keine Quadratzahl (da negativ), also gibt es keine Zahl, deren Quadrat d ist. Dann kann es auch kein x geben mit $(x - \frac{1}{2})^2 = d$: Die gestellte Gleichung ist *unlösbar:* $\mathbb{L} = \emptyset$.

3. Beispiel: $9x^2 - 12x + 4 = 0$. Da quadratische Ergänzung einen *normierten* Term erfordert, wird man eine solche Gleichung zunächst *normieren,* indem man beide Seiten durch 9 dividiert.

Dann kann man wie oben quadratische Ergänzung[1)] anwenden:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 12x + 4 = 0 &\iff x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = 0 \\ &\iff x^2 - \frac{4}{3}x + (\frac{2}{3})^2 = -\frac{4}{9} + (\frac{2}{3})^2 \\ &\iff (x - \frac{2}{3})^2 = 0 \\ &\iff x - \frac{2}{3} = 0 \iff x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

In diesem Beispiel war $d = 0$ und wir erhalten nur eine Lösung: $\mathbb{L} = \{\frac{2}{3}\}$.

Man erkennt an diesen 3 Beispielen, wie die Lösungsanzahl vom Wert der in der Rechnung auftretenden Größe d abhängt:

Ist $\underline{d > 0}$ eine Quadratzahl, so erhält man *zwei* Lösungen,
ist $\underline{d < 0}$, so gibt es *keine* Lösung und
ist $\underline{d = 0}$, so existiert *genau eine* Lösung.

4. Beispiel: $x^2 - 2x - 1 = 0$. Versucht man diese Gleichung mit den obigen Mitteln zu lösen, so kommt man zu folgender Äquivalenz:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 2\,.$$

Es ist also $d = 2 > 0$, und um nun die Gleichung endgültig lösen zu können, muss man entscheiden, ob 2 eine Quadratzahl ist. Die Antwort auf diese Frage hängt nun aber vom zugrundeliegenden *Zahlbereich* ab. Wir werden uns daher im nächsten Abschnitt noch einmal mit dem Zahlbegriff auseinanderzusetzen haben.

VI. Quadratwurzeln und reelle Zahlen.

7. Reelle Zahlen als Vervollständigung der rationalen Zahlen

a. $\mathbb{Q}$ ist dicht, aber unvollständig. Bisher haben wir die Zahlbereiche $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen $(1, 2, 3, 4, \ldots)$, $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen $(\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots)$ und schließlich den bisher umfassendsten Zahlbereich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ kennengelernt.

Rationale Zahlen sind Brüche $\frac{a}{b}$, deren Zähler a eine ganze Zahl und deren Nenner b eine natürliche Zahl ist. Dabei ist die Zahl $\frac{a}{b}$ definiert als die Zahl, die mit b multipliziert a ergibt.

Man kann die rationalen Zahlen auf einem Zahlenstrahl geometrisch veranschaulichen. Davon haben wir (etwa bei der Darstellung von Funktionsgraphen) ausgiebig Gebrauch gemacht. Während die ganzen Zahlen als eine Folge einzelner, getrennter Punkte dargestellt werden, füllen die rationalen Zahlen den Zahlenstrahl dicht an:

Zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegt eine weitere rationale Zahl. Man sagt dafür kurz: $\mathbb{Q}$ liegt in sich selbst dicht.

Dennoch weist der Zahlenstrahl Lücken auf; $\mathbb{Q}$ ist *unvollständig*!

In $\mathbb{Q}$ gibt es keine Zahl, deren Quadrat 2 ist.

Beweis: Den Nachweis, dass es eine Zahl mit gewissen Eigenschaften *nicht* gibt, muss man meist *indirekt* führen: Man nimmt an, es gäbe eine derartige Zahl, und folgert daraus einen

---

[1)] Wer mit geübtem Auge unmittelbar erkennt, dass $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$ ein vollständiges Binom ist, kann die obige Rechnung natürlich entscheidend abkürzen und unmittelbar die Gleichung lösen: $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2 = 0 \iff 3x - 2 = 0 \iff 3x = 2 \iff x = \frac{2}{3}$.

Widerspruch zu den zugrundegelegten Gesetzmäßigkeiten (hier zu den Eigenschaften von $\mathbb{Q}$, wie wir sie früher zusammengestellt haben).

Wir nehmen also an, es gäbe doch eine rationale Zahl $c \in \mathbb{Q}$ mit $2 = c^2$. Wir können annehmen, dass $c > 0$ ist. Als rationale Zahl besitzt $c \in \mathbb{Q}$ eine Darstellung als Bruch: $c = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$. Damit gilt

$$2 = c^2 = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^2}{b^2}\,.$$

Multipliziert man beide Seiten mit b^2, so erhält man die folgende Gleichung zwischen *natürlichen* Zahlen:

$$2b^2 = a^2\,.$$

Wir betrachten nun die Primzerlegung beider Seiten, insbesondere die Teilbarkeit durch 2. Eine Quadratzahl a^2 enthält jeden Primfaktor von a ein zweites Mal, so dass die Häufigkeit eines Primfaktors in der Primzerlegung von a^2 eine *gerade* Zahl ist. Dasselbe gilt für die Quadratzahl b^2. Nun kommt aber in $2b^2$ *ein* Primfaktor 2 hinzu, so dass in $2b^2$ die gesamte Häufigkeit des Primfaktors 2 eine *ungerade* Zahl sein muss, während sie in a^2 eine *gerade* Zahl ist. Dann kann aber $2b^2$ nicht mit a^2 übereinstimmen. Es gibt also in $\mathbb{Q}$ keine Zahl, deren Quadrat 2 ist.

Anmerkung: Die Aussage des Satzes und sein Beweis übertragen sich wörtlich, wenn man überall 2 durch 3 oder 5 oder irgendeine *Primzahl* p ersetzt.

Wir fassen zusammen: Wie wir bisher gesehen haben, können wir im Bereich der rationalen Zahlen unbeschränkt addieren, subtrahieren, multiplizieren, und (außer durch 0) dividieren. All diese Rechenoperationen führten nicht aus dem Zahlbereich $\mathbb{Q}$ heraus. Eine Zahl, deren Quadrat 2 ist (eine sog. *Quadratwurzel aus 2*), gibt es jedoch nicht in $\mathbb{Q}$. Um eine solche Zahl zur Verfügung zu haben, müssen wir den Zahlbereich $\mathbb{Q}$ *erweitern*.

Um zu sehen, wie man diese Erweiterung bewerkstelligen könnte, und dass in $\mathbb{Q}$ noch viel mehr Zahlen 'fehlen', wollen wir eine andere, Ihnen schon vertraute Darstellung rationaler Zahlen besprechen, die Darstellung als *Dezimalzahl*.

b. Bruchzahlen als Dezimalzahlen. Dezimalzahlen bestehen aus einer Folge von *Ziffern*, d. h. Zahlzeichen zwischen 0 und 9, und evtl. einem Komma. Die Bedeutung einer solchen Dezimalzahl ist Ihnen vertraut: Die einzelnen Ziffern geben einen Zahlwert wieder, der von ihrer *Stellung* in der Dezimalzahl abhängt. Die einzelnen *Stellenwerte* sind beim Dezimalsystem Potenzen von 10. Vor dem Komma

$$10^0 = 1\,,\ 10^1 = 10\,,\ 10^2 = 100\,,\ 10^3 = 1000\,,\ 10^4 = 10000\,\ldots$$

und hinter dem Komma die entsprechenden Kehrwerte

$$\frac{1}{10}\,,\ \frac{1}{100}\,,\ \frac{1}{1000}\,,\ \ldots$$

So gilt etwa

$$2341,3462 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + 6 \cdot \frac{1}{1000} + 2 \cdot \frac{1}{10000}\,.$$

Man kann auch etwas einfacher wie folgt umformen:

$$2341,3462 = 23413462 : 10000 = \frac{23413462}{10000}\,.$$

An dieser Beschreibung erkennt man, dass eine derartige Dezimalzahl mit endlich vielen Ziffern (*abbrechende* Dezimalzahl genannt) nichts anderes darstellt als eine Bruchzahl mit einer 10-er-Potenz als Nenner. Kürzt man diese Brüche, so haben sie einen Nenner, der außer 2 und 5 keine anderen Primfaktoren hat. Schlagwortartig kann man sagen:

Abbrechende Dezimalzahlen = Bruchzahlen mit einer 10-er-Potenz als Nenner = gekürzte Bruchzahlen, deren Nenner keinen Primteiler $\neq 2$ und $\neq 5$ enthält.

Abbrechende Dezimalzahlen sind also *keine neuartigen Zahlen*, sondern *nur andere Darstellungen* für sehr spezielle rationale Zahlen.

Andere Brüche, etwa $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ oder $\frac{1}{7}$, kann man nicht in der oben beschriebenen Form als abbrechende Dezimalzahl darstellen. Dennoch kennen Sie dafür eine Dezimaldarstellung, eine sog. *periodische* Dezimalzahl:

$$\frac{2}{3} = 0{,}66666666666666666666666666666666666\ldots = 0{,}\overline{6}\,,$$
$$\frac{5}{6} = 0{,}83333333333333333333333333333333333\ldots = 0{,}8\overline{3}\,,$$
$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857142857142857142857\ldots = 0{,}\overline{142857}$$

Hier handelt es sich nicht mehr um Dezimalzahlen mit endlich vielen Ziffern (*abbrechende Dezimalzahlen*), sondern mit einer unendlich langen, sich aber ständig wiederholenden Ziffernfolge, (*periodische* Dezimalzahlen). Die überstrichene Ziffernfolge wird *Periode* genannt und ständig wiederholt, die Ziffern zwischen Komma und Periodenbeginn bilden die *Vorperiode.*

Zu dieser periodischen Dezimalzahl kommt man bei dem Versuch, die zur Bruchzahl $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ bzw. $\frac{1}{7}$ gehörige Divisionsaufgabe $2 : 3$, $5 : 6$ bzw. $1 : 7$ schriftlich durchzuführen. Es gilt nun der wichtige

Satz: Jede rationale Zahl ist als abbrechende oder periodische Dezimalzahl darstellbar.

Zur Begründung zeigen wir, dass eine schriftliche Division $a : b$ zweier natürlicher Zahlen a, b entweder nach endlich vielen Schritten 'aufgeht' (d. h. den Rest 0 und damit eine abbrechende Dezimalzahl liefert) oder periodisch wird.

Rechnen Sie zur Veranschaulichung der folgenden Argumentation ein Beispiel, etwa $6 : 13$. Es ergibt sich $6 : 13 = 0{,}\overline{461538}$. Wie erkennt man die hier angegebene Periode? Kommt man bei der schriftlichen Division von $6 : 13$ zu der zuletzt ermittelten 8, so entsteht der Rest 6. Von hier ab wiederholt sich die Rechnung, da man bereits vorher (ganz am Anfang) 6 durch 13 zu teilen hatte.

Dies muss bei jeder solchen Division geschehen! Um dies zu erkennen, betrachte man bei einer solchen schriftlichen Division die in der Rechnung auftretenden *Reste*. Egal wie groß der Nenner ist, durch den dividiert wird, in jedem Falle gibt es nur endlich viele mögliche Reste (die Zahlen von 0 bis zum Nenner, verringert um 1). Spätestens, wenn diese alle verbraucht sind, muss sich ein Rest und damit die Rechnung wiederholen, und das Ergebnis wird periodisch. Zugleich erkennen wir so, dass die Periodenlänge höchstens so groß ist wie der Nenner!

In der periodischen Dezimalzahldarstellung eines Bruches ist die Periodenlänge kleiner als der Nenner des Bruches.

Wir wollen nun zeigen, dass auch die Umkehrung des obigen Satzes gilt:

Satz: Jede abbrechende oder periodische Dezimalzahl stellt eine rationale Zahl dar.

Für abbrechende Dezimalzahlen ist dies klar (siehe das obige einleitende Beispiel). Wir wollen nun zeigen, dass auch jede periodische Dezimalzahl als Bruchzahl dargestellt werden kann. Dies ist etwas problematisch, weil wir noch nicht einwandfrei geklärt haben, was wir eigentlich unter einer Dezimalzahl mit unendlich vielen Ziffern verstehen wollen. Wir werden für unsere Argumentation aber nur solche Tatsachen über Dezimalzahlen benutzen, die aufgrund unseres Verständnisses dieses Stellenwertsystems zweifelsfrei sind. Z. B. müssen bei unserem Verständnis des Dezimalsystems die folgenden Gleichungen gelten:

$$0{,}\overline{12} = 0{,}12\overline{12}\,; \quad 0{,}12\overline{12}\ \cdot 100 = 12,\overline{12}\,; \quad 12,\overline{12} = 12 + 0{,}\overline{12} \quad \text{und} \quad 12,\overline{12} - 0{,}\overline{12} = 12\,.$$

Man beachte, dass wir nicht ohne weiteres mit solchen unendlich langen Dezimalzahlen *rechnen* können (siehe untenstehende Beispiele). Aber die obigen Gleichungen müssen in jedem Falle gelten, wenn unser Stellenwertsystem auch für unendlich lange Dezimalzahlen gelten soll.

Aus obigen Gleichungen ergibt sich aber (*die Gültigkeit der üblichen Rechenregeln vorausgesetzt*):

$$12 = 12,\overline{12} - 0{,}\overline{12} = 100 \cdot 0{,}12\overline{12} - 0{,}\overline{12} = 100 \cdot 0{,}\overline{12} - 0{,}\overline{12} = (100-1) \cdot 0{,}\overline{12} = 99 \cdot 0{,}\overline{12}\,.$$

Die Gleichung $12 = 99 \cdot 0{,}\overline{12}$ besagt nun, dass $0{,}\overline{12}$ eine Zahl ist, die mit 99 multipliziert 12 ergibt. Nach unserer Definition der Bruchzahlen heißt dies aber nichts anderes als

$$0{,}\overline{12} = \frac{12}{99}\,.$$

Nun erkennen Sie sicher, dass diese Überlegungen für jede periodische Dezimalzahl der Form $0,\overline{\ldots}$ anwendbar sind und zu einer Bruchzahl führen. Bei anderen periodischen Dezimalzahlen, bei denen die Periode nicht unmittelbar hinter dem Komma beginnt, verschiebt man durch Multiplikation mit einer Zehnerpotenz zunächst das Komma und spaltet dann die ganze Zahl vor dem Komma ab. Auf diese Weise kann man jede periodische Dezimalzahl als Bruchzahl darstellen.

c. Dezimalzahlen als Intervallschachtelungen. In den obigen Sätzen haben wir gesehen, dass die Bruchzahlen nur einen Teil aller denkbaren Dezimalzahlen darstellen, nämlich die abbrechenden oder periodischen. Darüberhinaus sind aber noch viele andere Dezimalzahlen, die weder abbrechend noch periodisch sind, vorstellbar. Etwa die folgende:

$$1,1\,01\,001\,0001\,00001\,000001\,0000001\,00000001\,000000001\ldots.$$

Dies soll eine Dezimalzahl mit unendlich vielen Ziffern darstellen, wobei das Bildungsgesetz der nachfolgenden Ziffern gut ablesbar ist: Immer länger werdende Blöcke von Nullen werden durch jeweils eine Eins getrennt. Wegen dieser immer größeren Blöcke von Nullen kann die Dezimalzahl nicht periodisch sein. *Sie kann also keine rationale Zahl darstellen!* Was aber stellt sie dar? Ist es überhaupt eine *Zahl*?

Ein wichtiger Aspekt von Zahlen ist, dass man mit ihnen Rechenoperationen ausführen kann. Kann man mit unendlich langen Dezimalzahlen *rechnen*? Bei abbrechenden Dezimalzahlen scheint man damit keine Schwierigkeiten zu haben. Addition, Subtraktion und Multiplikation abbrechender Dezimalzahlen liefert als Ergebnis wieder eine abbrechende Dezimalzahl. Aber schon bei der Division abbrechender Dezimalzahlen erhält man als Ergebnis oft eine Dezimalzahl mit unendlich vielen Ziffern. Wie man dann allerdings mit diesen weiterrechnen kann, ist bei genauerem Hinsehen überhaupt nicht klar. Wie etwa soll man

$$0{,}\overline{18} : 0{,}\overline{2} \quad \text{oder} \quad 0{,}\overline{18} \cdot 0{,}\overline{2}$$

berechnen? Die für abbrechende Dezimalzahlen benutzten schriftlichen Rechenverfahren versagen hier. (Einen Ausweg bietet der Rückgriff auf die Bruchzahlen: Man stellt die obigen periodischen Dezimalzahlen als Bruchzahlen dar, rechnet für diese das Ergebnis wie üblich aus und wandelt dann wieder in eine (abbrechende oder periodische) Dezimalzahl um. Führen Sie dies einmal zur Übung aus. Ergebnisse für obige Aufgaben: $0{,}\overline{81}$ und $0{,}\overline{04}$.) Für nicht-periodische Dezimalzahlen versagt dieser Weg.

Bevor wir also mit unendlich langen Dezimalzahlen rechnen, müssen wir zunächst genauer als bisher geschehen klären, welche Bedeutung denn eine solche Dezimalzahl hat. Dazu wenden wir uns wieder unserem Ausgangsproblem zu, der Suche nach einer Zahl c, deren Quadrat 2 ergibt. Wir wollen nun eine *Dezimalzahldarstellung* einer solchen Zahl c konstruieren. Wie wir oben bewiesen haben, kann c nicht zu $\mathbb{Q}$ gehören, *also kann die angestrebte Dezimalzahldarstellung für c weder abbrechen noch periodisch werden!*

Auf der Suche nach einer Zahl c mit $c^2 = 2$ beschränken wir uns auf positive Zahlen, denn ist $c^2 = 2$, so ist natürlich auch $(-c)^2 = 2$. Eine positive Zahl c mit $c^2 = 2$ muss aber zwischen 1 und 2 liegen, denn $1^2 = 1 < 2$ und $2^2 = 4 > 2$:

$$1 < c < 2\,, \quad \text{denn} \;\; 1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4\,.$$

Sucht man nun den Bereich zwischen 1 und 2 in Zehntelschritten ab, so findet man, dass für die gesuchte Zahl c gelten muss:

$$1,4 < c < 1,5\,, \quad \text{denn} \;\; 1,4^2 = 1,96 < 2 < 1,5^2 = 2,25\,.$$

Dieses Verfahren kann man nun weiter fortführen und die gesuchte Zahl c weiter einschränken:

$$\begin{array}{lcrll cr}
1 & < c < & 2 & \text{denn} & 1^2 = 1 & < 2 < & 4 = 2^2 \\
1,4 & < c < & 1,5 & \text{denn} & 1,4^2 = 1,96 & < 2 < & 2,25 = 1,5^2 \\
1,41 & < c < & 1,42 & \text{denn} & 1,41^2 = 1,9881 & < 2 < & 2,0164 = 1,42^2 \\
1,414 & < c < & 1,415 & \text{denn} & 1,414^2 = 1,999396 & < 2 < & 2,002225 = 1,415^2 \\
1,4142 & < c < & 1,4143 & \text{denn} & 1,4142^2 = 1,99996164 & < 2 < & 2,00024449 = 1,4143^2
\end{array}$$

Dieses Schema zeigt, dass man die gesuchte Zahl c beliebig eng zwischen zwei abbrechende Dezimalzahlen einschachteln kann. Die Grenzen der *einschachtelnden Intervalle* rücken immer enger aneinander heran; ihr Abstand ist in den oben angegebenen Fällen 1, 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10000, ... Dadurch stimmen die Dezimalzahlen der Grenzen in immer mehr Ziffern überein: 1 — $1,4$ — $1,41$ — $1,414$ usw. So entsteht eine unendlich lange Dezimalzahl, die die gesuchte Zahl c darstellt.

Wir erkennen hier nun die Bedeutung einer solchen unendlich langen Dezimalzahl:

> Eine Dezimalzahl mit unendlich vielen Ziffern beschreibt eine unendliche Folge von *beliebig eng werdenden, ineinander geschachtelten Intervallen* mit rationalen Eckpunkten.
> Die vorgegebene Dezimalzahl ist die *einzige* in *allen* Intervallen liegende Zahl.

Dies gilt auch für die früher schon behandelten periodischen Dezimalzahlen: $0{,}\overline{3}$ ist die Zahl, die zwischen

$$\begin{array}{lcr}
0{,}3 & \text{und} & 0{,}4\,, \\
0{,}33 & \text{und} & 0{,}34\,, \\
0{,}333 & \text{und} & 0{,}334\,, \\
0{,}3333 & \text{und} & 0{,}3334\,, \\
0{,}33333 & \text{und} & 0{,}33334\,, \\
 & \vdots &
\end{array}$$

liegt. Durch diese Intervallschachtelung ist $0{,}\overline{3}$ bestimmt. Aber die Bruchzahl 1/3 liegt auch zwischen all diesen Zahlen. Da es nur eine Zahl gibt, die in allen diesen Intervallen liegt, gilt — auch auf der Grundlage des jetzt präzisierten Verständnisses unendlich langer Dezimalzahlen:

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}\,.$$

Damit haben wir jeder beliebigen unendlich langen Dezimalzahl eine Bedeutung gegeben, die mit unserer bisherigen Deutung der periodischen Dezimalzahlen als Bruchzahlen übereinstimmt.

d. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Wir haben oben unser Verständnis von unendlich langen Dezimalzahlen präzisiert. Wir bilden nun die Menge $\mathbb{R}$ *aller* Dezimalzahlen:

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist eine Dezimalzahl}\}\,.$$

Diese umfasst die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, ist aber echt größer. Wir haben also unseren Zahlbereich $\mathbb{Q}$ erweitert zum Bereich der sog. *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$. Die reellen Zahlen, die nicht rational sind, nennt man *irrational.*

Wie bei unseren früheren Zahlbereichserweiterungen müssen wir auch hier zeigen, dass man in dem erweiterten Zahlbereich der reellen Zahlen (d. h. mit beliebigen Dezimalzahlen) *rechnen* kann (addieren, multiplizieren, ...), dass die reellen Zahlen angeordnet sind (durch die Ordnungsrelation $<$) *und dass dabei die bisherigen Rechengesetze*, wie wir sie für den angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen kennengelernt haben, *gültig bleiben*. Dies alles ist der Fall, und noch etwas mehr:

Satz:

a) Man kann den Bereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen anordnen (durch $<$), man kann darin unbeschränkt addieren, subtrahieren, multiplizieren und (durch Zahlen $\neq 0$) dividieren, und dabei bleiben alle grundlegenden Gesetzmäßigkeiten, wie wir sie früher für $\mathbb{Q}$ formuliert haben, auch für $\mathbb{R}$ gültig.

b) Anders als $\mathbb{Q}$ ist aber $\mathbb{R}$ nun auch noch *vollständig*, das soll heißen:
In jeder ineinandergeschachtelten, beliebig eng werdenden Folge von Intervallen reeller Zahlen gibt es genau eine reelle Zahl, die allen Intervallen angehört!

c) Jede reelle Zahl besitzt eine — und nur eine (!) — Darstellung als Dezimalzahl ohne Neunerperiode.

Dieser fundamentale Satz wird im Schulbereich nicht bewiesen, ist doch der Beweis auf der einen Seite formal recht aufwendig, andererseits aber inhaltlich nicht sehr tiefsinnig. Wir wollen hier nur einige kleinere Bemerkungen machen, um die Probleme anzudeuten.

Dass man auch für die reellen Zahlen (d. h. beliebige Dezimalzahlen) die $<$-Relation erklären kann, erscheint klar. Dezimalzahlen sind lexikographisch angeordnet: Die erste Stelle, an der sich zwei Dezimalzahlen unterscheiden, entscheidet darüber, welche Zahl die kleinere ist. Dies gilt jedoch nicht, wenn sog. *Neunerperioden* auftreten. Es gilt nämlich:

$$\boxed{0{,}\overline{9} = 1}$$

Verschiedene Begründungen für diese Tatsache haben wir als Poster im Klassenraum ausgehängt. Schließt man solche 'Neunerperioden' in Dezimalzahlen aus — und dies wollen wir ab sofort immer tun — erhält man für jede reelle Zahl nur eine Dezimaldarstellung, wie in c) formuliert.

Abschließend wollen wir beispielhaft andeuten, wie man für beliebige Dezimalzahlen die Grundrechenarten definiert. Gehen wir einmal von zwei reellen Zahlen aus, und zwar von $c = \sqrt{2}$, d. h. der positiven Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $c^2 = 2$, und von $d = \sqrt{3}$, d. h. der positiven Zahl $d \in \mathbb{R}$ mit $d^2 = 3$. Wir wollen nun $c + d$ erklären. Das Ergebnis soll wieder eine reelle Zahl sein, also als Dezimalzahl darstellbar sein.

Nun bedeutet eine Dezimaldarstellung für c und d eine Einschachtelung von c und d in immer enger werdende Intervalle.

$$\begin{array}{lcr@{\qquad}lcr}
1{,}414 & < c < & 1{,}415\,, & 1{,}732 & < d < & 1{,}733 \\
1{,}4142 & < c < & 1{,}4143\,, & 1{,}7320 & < d < & 1{,}7321 \\
1{,}41421 & < c < & 1{,}41422\,, & 1{,}73205 & < d < & 1{,}73206 \\
1{,}414213 & < c < & 1{,}414214\,, & 1{,}732050 & < d < & 1{,}732051 \\
 & \vdots & & & \vdots &
\end{array}$$

Um nun $c + d$ als reelle Zahl zu definieren, müssen wir eine beliebig eng werdende, ineinandergeschachtelte Folge von Intervallen angeben, in denen $c+d$ liegen muss. Dazu benutzen wir nun wieder die uns vertrauten Rechengesetze, die ja auch für $I\!R$ gültig bleiben sollen. Aus $1,414 < c$ und $1,732 < d$ folgt dann nämlich sofort $1,414 + 1,732 < c + d$, also $3,146 < c + d$. Benutzen wir alle oben notierten Abschätzungen, so erhalten wir

$$\begin{array}{rclcl}
1,414+1,732 & = 3,146 & < c+d < & 3,148 = & 1,415+1,733 \\
1,4142+1,7320 & = 3,1462 & < c+d < & 3,1464 = & 1,4143+1,7321 \\
1,41421+1,73205 & = 3,14626 & < c+d < & 3,14628 = & 1,41422+1,73206 \\
1,414213+1,732050 & = 3,146263 & < c+d < & 3,146265 = & 1,414214+1,732051 \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

Man erkennt zumindest im Prinzip, dass man so eine Einschachtelung von $c + d$ erhält. Dabei sind zwar die einzelnen Intervalle doppelt so breit wie zuvor die Intervalle für c, d, aber auch sie werden beliebig eng und stellen so eine neue Dezimalzahl dar.

Ähnlich geht man für die anderen Rechenoperationen vor. Führen Sie ähnliche Überlegungen für das Produkt durch, speziell einmal für die Berechnung von $c^2 = c \cdot c$ mit der in c. konstruierten Zahl c. Machen Sie sich klar, dass die Tabelle auf S. 47 gerade bedeutet: Die Zahl 2 erfüllt alle die Abschätzungen, die man für $c^2 = c \cdot c$ fordert. Damit liegen c^2 und die Zahl 2 in derselben Intervallschachtelung, stimmen also überein. Das bedeutet:

> Die in c. durch eine Intervallschachtelung konstruierte reelle Zahl $c \in I\!R$ hat tatsächlich die geforderte Eigenschaft $c^2 = 2$.

8. Quadratwurzeln

a. Definition. Nachdem man den Bereich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erweitert hat zum Bereich der reellen Zahlen $I\!R$, können wir nun systematisch Quadratwurzeln einführen. Wir haben am Ende unserer Überlegungen über die reellen Zahlen gesehen, dass es (anders als in $\mathbb{Q}$) in $I\!R$ eine positive Zahl gibt, deren Quadrat 2 ist. Diese nennen wir die *Quadratwurzel*, oder einfach die *Wurzel* aus 2.

Allgemein wollen wir unter einer (Quadrat)Wurzel aus x eine Zahl y verstehen, die ≥ 0 ist und deren Quadrat gerade x ergibt: $y \geq 0 \ \wedge \ y^2 = x$. Eine solche Zahl gibt es jedoch nicht immer. Wie Sie wissen, sind Quadratzahlen immer ≥ 0. Das heißt aber, dass es keine Zahl geben kann, deren Quadrat negativ ist. Dies bedeutet:

> Für negative Zahlen $x < 0$ gibt es *keine* Quadratwurzel aus x.

Für Zahlen $x \geq 0$ dagegen gibt es im Bereich der *reellen* Zahlen immer eine Zahl $y \geq 0$, deren Quadrat x ist. Für $x = 0$ wählt man $y = 0$ und für Zahlen $x > 0$ zeigt man (wie für $x = 2$), dass es eine Zahl $y > 0$ gibt, deren Quadrat $y^2 = x$ ist. Dies ist eine Folge der *Vollständigkeit* des reellen Zahlbereichs $I\!R$.

> **Definition:** Für $x \geq 0$ (!) definiert man $\sqrt{x}$ (die *(Quadrat-)Wurzel* aus x) als diejenige eindeutig bestimmte reelle Zahl, die ≥ 0 ist und deren Quadrat x ist.

Dies bedeutet: Es ist $\sqrt{x} \geq 0$ und $(\sqrt{x})^2 = x$, und keine andere Zahl hat diese beiden Eigenschaften. In Formeln:

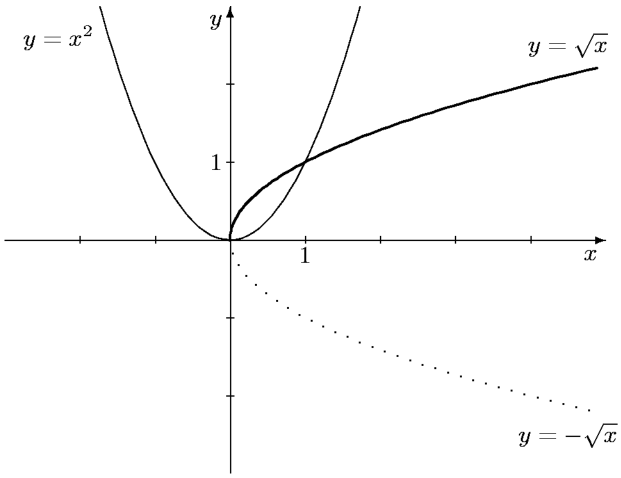
$$\boxed{\text{Für } x \geq 0 \text{ gilt:} \qquad y = \sqrt{x} \iff y \geq 0 \ \wedge \ y^2 = x.}$$

Die Zahl unter dem Wurzelzeichen heißt *Radikand* (radix (lt.) = Wurzel, radicandus = die zu ziehende Wurzel). Dadurch ist die *Wurzelfunktion* $\sqrt{}$ definiert. Ihr *Definitionsbereich* ist jedoch nicht ganz $\mathbb{R}$, sondern

$$\mathbb{D}(\sqrt{}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0\,,\infty[\,,$$

also das Intervall aller nicht-negativen reellen Zahlen.

Wegen $y = \sqrt{x} \iff y \geq 0 \wedge y^2 = x$ ist der Graph der Wurzelfunktion ein Teil des Graphen von $y^2 = x$, und zwar der oberhalb der x-Achse liegende Teil ($y \geq 0$!). Nun ist $y^2 = x$ die Umkehrrelation zu $y = x^2$, der Graph also durch Spiegelung an der 45^0-Linie aus der Normalparabel von $y = x^2$ zu gewinnen. Die nachfolgende Skizze zeigt die Normalparabel zu $y = x^2$ (durchgezogene Linie) und deren Spiegelbild an der 45^0-Linie. Der obere dick gezeichnete Teil der gespiegelten Parabel ist der Graph der Wurzelfunktion $\sqrt{}$! Der gestrichelte untere Teil ist der Graph von $y = -\sqrt{x}$.



b. Gesetzmäßigkeiten. Für das Rechnen mit Wurzeltermen gelten die folgenden Gesetzmäßigkeiten:

(1) Für $a \geq 0$: $\quad (\sqrt{a})^2 = a\,,$

(2) Für alle $a \in \mathbb{R}$: $\quad \sqrt{a^2} = |a|\,,$

(3) Für $a, b \geq 0$: $\quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\,,$

(4) Für $a \geq 0, b > 0$: $\quad \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,.$

Die angegebenen Voraussetzungen kann man zusammenfassend auch so formulieren:

> Die obigen Formeln gelten, sofern *alle* darin auftretenden Terme *definiert* sind.

Begründungen: Für $a \geq 0$ ist $\sqrt{a}$ definitionsgemäß eine Zahl, deren Quadrat a ist: $(\sqrt{a})^2 = a$.
Zu (2) bemerken wir zunächst, dass $\sqrt{a^2}$ *immer* definiert ist, da $a^2 \geq 0$ ist.

> **Warnung:** Es gilt nicht allgemein $\sqrt{a^2} = a$, denn a kann negativ sein, während Quadratwurzeln nie negativ sind!

Wenn $a \geq 0$ ist, dann gilt $\sqrt{a^2} = a$; ist aber $a < 0$, so gilt $\sqrt{a^2} = -a$, denn dann ist $-a > 0$ und $(-a)^2 = a^2$; $-a$ erfüllt also die Forderungen an die Quadratwurzel $\sqrt{a^2}$. Mithin gilt

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0, \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Die rechte Seite ist wörtlich die Definition des Absolutbetrages.
ad (3): Da Wurzeln nie negativ sind, ist auch das Produkt $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$. Außerdem gilt

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b\,.$$

Damit hat die $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ alle Eigenschaften, durch die $\sqrt{a \cdot b}$ definiert ist, also gilt (3).
Begründen Sie zur Übung die analoge Formel (4).

Warnung: Es gibt keine Gesetzmäßigkeiten, die die Wurzel mit der Addition verbinden! Insbesondere sind $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ sowie $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ **grob falsch.**

Neben den Termumformungen sind die folgenden Äquivalenzumformungen für das Quadrieren und Wurzelziehen wichtig:

$$\text{(5)} \quad \text{Für } a,b \geq 0: \quad a = b \iff a^2 = b^2\,,$$

$$\text{(6)} \quad \text{Für } a,b \geq 0: \quad a = b \iff \sqrt{a} = \sqrt{b}\,,$$

$$\text{(7)} \quad \text{Für } a,b \geq 0: \quad a \leq b \iff a^2 \leq b^2\,,$$

$$\text{(8)} \quad \text{Für } a,b \geq 0: \quad a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}\,.$$

(6) und (8) kann man zusammenfassen als:

Das Wurzelziehen ist für Gleichungen und Ungleichungen eine Äquivalenzumformung, sofern die *Radikanden nicht negativ* sind, d. h. sofern das Wurzelziehen *möglich* ist!

Ebenso besagen (5) und (7):

Das Quadrieren ist für Gleichungen und Ungleichungen eine Äquivalenzumformung, aber nur, wenn die *zu quadrierenden Terme* ≥ 0 *sind!*

ad (5): Aus $a = b$ folgt selbstverständlich $a^2 = b^2$ (für beliebige a, b). Um die umgekehrte Folgerung $a^2 = b^2 \implies a = b$ zu beweisen, benutzt man die Wurzel: Aus $a^2 = b^2$ folgt natürlich $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$, also nach (2) $|a| = |b|$. Hieraus folgt aber nur dann $a = b$, wenn a, b gleiches Vorzeichen haben, was wegen $a, b \geq 0$ der Fall ist. Genauso beweist man (6).

Für (7) '$\Rightarrow$' schließen wir so: Aus $a \leq b$ folgt durch Multiplikation mit a ($\geq 0!$) $a^2 \leq ab$ und durch Multiplikation mit b ($\geq 0!$) $ab \leq b^2$, zusammen also $a^2 \leq ab \leq b^2$. Für die Umkehrung (7), '$\Leftarrow$' setzen wir $a^2 \leq b^2$ voraus. Wäre nun nicht $a \leq b$, so müsste $b < a$ sein, also nach den bereits bewiesenen Teilen $b^2 < a^2$, im Widerspruch zur Voraussetzung. (8) ergibt sich schließlich unmittelbar durch Anwendung von (7) auf $\sqrt{a}, \sqrt{b} \geq 0$:

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \underset{(7)}{\iff} (\sqrt{a})^2 \leq (\sqrt{b})^2 \iff a \leq b\,.$$

Geometrisch bedeutet (8), dass der Graph der Wurzelfunktion ständig ansteigt, man sagt: Die Wurzelfunktion ist *monoton wachsend*. Ebenso besagt (7), dass der Graph der Quadratfunktion *monoton wächst,* aber *nur im Bereich* $[0, \infty[$. (Vergleichen Sie mit den Skizzen der Funktionsgraphen!)

c. Quadratische Gleichungen. Grundlage der Lösung von quadratischen Gleichungen war die Tatsache $x^2 = c^2 \iff x = c \;\vee\; x = -c$. Nun sind im Bereich $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen sämtliche nicht-negativen Zahlen Quadratzahlen, so dass für $d \geq 0$ gilt:

$$x^2 = d \iff x^2 = (\sqrt{d})^2 \iff x = \pm\sqrt{d}\,.$$

Für $d < 0$ hingegen hat die Gleichung $x^2 = d$ auch in $\mathbb{R}$ *keine* Lösung.

Kombiniert man diese Tatsache mit der quadratischen Ergänzung, so kommt man zu der folgenden Lösungformel für normierte quadratische Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\boxed{x^2 + px + q = 0} \\
\Longleftrightarrow\ & x^2 + px = -q \\
\Longleftrightarrow\ & x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q \\
\Longleftrightarrow\ & (x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q\,.
\end{aligned}$$

Ist nun $(\frac{p}{2})^2 - q < 0$, so gibt es keine Lösung; ist hingegen $(\frac{p}{2})^2 - q \geq 0$, so kann man folgendermaßen weiter schließen:

$$\begin{aligned}
& (x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q\,. \\
\Longleftrightarrow\ & x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \\
\Longleftrightarrow\ & \boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}}
\end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

> Die normierte quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat die Lösungen $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ falls der Radikand ≥ 0 ist, andernfalls hat sie *keine* Lösungen.

Beachten Sie: Ist der Radikand 0, so fallen die genannten Lösungen zusammen und die Gleichung hat nur die *eine* Lösung $-\frac{p}{2}$.

Man sieht, die Anzahl der Lösungen hängt ab vom Vorzeichen des Radikanden $(\frac{p}{2})^2 - q = \frac{p^2}{4} - q = \frac{p^2 - 4q}{4}$. Den Zähler $\boxed{D = p^2 - 4q}$ nennt man die *Diskriminante* des quadratischen Polynomterms $x^2 + px + q$. Deren Vorzeichen entscheidet (discriminare (lt.) = unterscheiden) über die Anzahl der Lösungen:

$$\boxed{x^2 + px + q = 0 \text{ hat } \begin{cases} \text{2 Lösungen,} & \text{falls } D > 0, \text{ d. h. } p^2 > 4q \text{ ist,} \\ \text{1 Lösung,} & \text{falls } D = 0, \text{ d. h. } p^2 = 4q \text{ ist,} \\ \text{keine Lösung,} & \text{falls } D < 0, \text{ d. h. } p^2 < 4q \text{ ist.} \end{cases}}$$

d. Satz von Vieta und Faktorisierung quadratischer Terme. Wir gehen von einer lösbaren normierten quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ und ihren oben bestimmten Lösungen $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ aus. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 x_2 = q\,.$$

Aus diesen Formeln (dem sog. Satz von *Vieta)* ergibt sich dann

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + px + q\,,$$

also eine Faktorisierung des quadratischen Terms $x^2 + px + q$.

Da umgekehrt eine Faktorisierung $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$ die Nullstellen x_1, x_2 von x^2+px+q liefert, gilt insgesamt:

Für einen normierten quadratischen Term x^2+px+q und reelle Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:
(A) x_1, x_2 sind sämtliche Nullstellen von x^2+px+q.
(B) $x_1x_2=q$ und $x_1+x_2=-p$.
(C) Es gilt folgende Zerlegung in Linearfaktoren $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$.

Will man also einen quadratischen Term faktorisieren, so bestimme man die Nullstellen:
- Gibt es Nullstellen, so hat man eine Faktorisierung wie oben angegeben;
- gibt es keine Nullstellen, so gibt es auch keine Faktorisierung.

e. Wurzelgleichungen. Unter *Wurzelgleichungen* versteht man Gleichungen, bei denen die Unbekannte unter einer Wurzel vorkommt. Wie bei Bruchgleichungen beachte man auch hier, dass solche Gleichungen nicht überall definiert sind, sondern nur dort, wo alle Radikanden nicht-negativ sind. Der erste Schritt ist also auch hier die Bestimmung des Definitionsbereiches.

Will man dann solche Gleichungen lösen, so versucht man die Wurzel durch Quadrieren zu 'beseitigen'. Da aber Quadrieren nicht immer eine Äquivalenzumformung ist, argumentiert man wie in folgendem Beispiel:

$$\begin{aligned} x=\sqrt{4x+5} &\implies x^2=4x+5 \iff x^2-4x-5=0 \\ &\iff x=2\pm\sqrt{4+5}=2\pm 3 \iff x=-1 \ \vee\ x=5\,. \end{aligned}$$

Da die erste Umformung (Quadrieren) keine Äquivalenzumformung ist, besagen die obigen Überlegungen: *Wenn* x die gestellte Gleichung erfüllt, dann kommen für x *nur* die beiden Zahlen $x=-1$ bzw. $x=5$ in Frage: -1 und $+5$ sind die *einzigen Kandidaten* für Lösungen; ob diese bzw. welche dieser Zahlen tatsächlich Lösungen sind, muss man dann noch durch Einsetzen überprüfen. Setzt man in diesem Falle -1 ein, so erhält man $-1=\sqrt{4(-1)+5}=\sqrt{1}=1$, eine *falsche* Aussage: -1 ist *keine* Lösung. (Man erkennt auch deutlich den Grund: Beim Quadrieren im ersten Schritt wurde diese *falsche* Gleichung $-1=1$ zu der *wahren* Gleichung $(-1)^2=1^2$.) Beim Einsetzen von $+5$ ergibt sich eine wahre Aussage, so dass $+5$ die einzige Lösung ist: $\mathbb{L}=\{+5\}$.

Wird beim Gleichungsumformen das Quadrieren benutzt, so muss man am Ende unbedingt überprüfen, welche der gefundenen *möglichen* Lösungen auch *tatsächlich* Lösungen sind.

Um in einer Wurzelgleichung durch Quadrieren die Wurzel zu 'beseitigen', muss man sie zuvor auf einer Gleichungsseite isolieren und dann quadrieren:

$$\sqrt{7x^2-4x}+3x=1 \iff \sqrt{7x^2-4x}=1-3x \implies 7x^2-4x=1-6x+9x^2$$

Die entstandene quadratische Gleichung löst man mit den üblichen Methoden. Man stellt in diesem Falle fest, dass sie *keine* Lösung hat. Damit ist auch die Ausgangsgleichung unlösbar.

Kommen mehrere Wurzelterme vor, so muss man evtl. mehrfach quadrieren. In folgendem Beispiel führt ein erstes Quadrieren zu

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-7}+\sqrt{5x+1}=4 &\implies (\sqrt{3x-7}+\sqrt{5x+1})^2=16 \\ &\iff (3x-7)+2\sqrt{(3x-7)(5x+1)}+(5x+1)=16\,. \end{aligned}$$

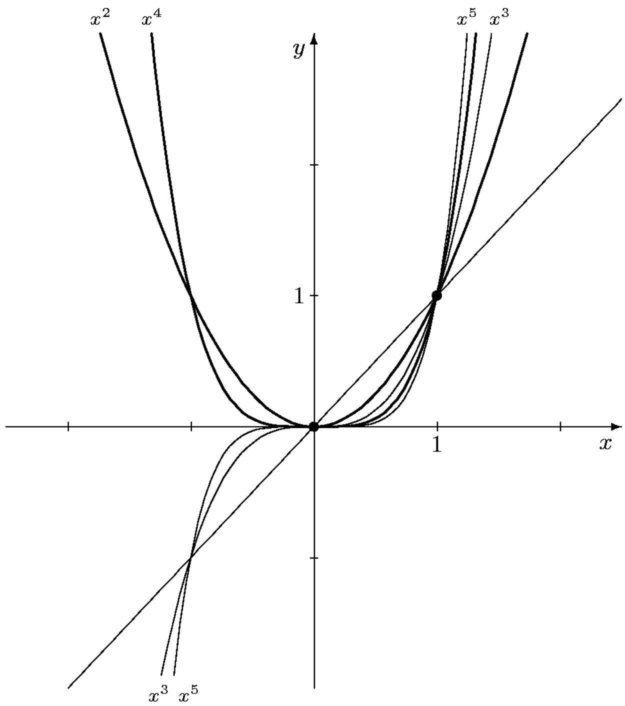
Es kommt also immer noch eine Wurzel vor; aber eben nur noch eine, so dass erneutes Quadrieren zum Ziel führt:

$$\begin{aligned} &(3x-7)+2\sqrt{(3x-7)(5x+1)}+(5x+1)=16 \\ \iff\ &2\sqrt{(3x-7)(5x+1)}=-8x+22 \\ \implies\ &4(3x-7)(5x+1)=(-8x+22)^2 \end{aligned}$$

Dies ist nun wieder eine quadratische Gleichung, die man wie üblich löst. Am Ende muss man jedoch überprüfen, ob die gefundenen Werte tatsächlich Lösungen der Ausgangsgleichung sind. In diesem Falle hat die quadratische Gleichung die beiden Lösungen $28 \pm 4\sqrt{41}$. Nur $28 - 4\sqrt{41}$ ist tatsächlich Lösung der ursprünglichen Wurzelgleichung; dies zu überprüfen dürfte für Sie aber nur mit Hilfe von Näherungswerten und dem Taschenrechner möglich sein.

Stattdessen ist es hier lohnender, bei beiden Quadrierungsoperationen genauer zu untersuchen, ob nicht evtl. doch Äquivalenzumformungen vorliegen. So ist die erste Quadrierung tatsächlich eine Äquivalenz, da beide Seiten der quadrierten Gleichung nicht-negativ sind (die linke Seite ist eine Summe von Wurzeln, die rechte Seite $= 4$). Bei der zweiten Quadrierung hängt es davon ab, ob $-8x+22 \geq 0$ ist. Dies kann man für die gefundenen Werte $28\pm4\sqrt{41}$ überprüfen. Der Rechenaufwand ist geringer als beim Einsetzen in die Ausgangsgleichung, da hier nur eine *Abschätzung* statt einer *Gleichheit* zu überprüfen ist: $x = 28 - 4\sqrt{41} \leq 28 - 4 \cdot 6{,}5 \leq 2$, also $-8x + 22 \geq -16 + 22 = 6 \geq 0$. Für $28 + 4\sqrt{41} \geq 52$ ist $-8x + 22$ eben nicht ≥ 0. Daraus ergibt sich dann, dass dies auch keine Lösung der Ausgangsgleichung sein kann.

9. Potenzfunktionen und höhere Wurzeln a. Potenzfunktionen. Unter den *Potenzfunktionen* verstehen wir die Funktionen, die einer Zahl x eine bestimmte *Potenz* x^n zuordnen, wobei hier zunächst n eine natürliche Zahl sei. Ein Funktionsterm dafür ist also $f(x) = x^n$. Bei den Potenzfunktionen ist somit die *Basis variabel,* der *Exponent* n hingegen eine feste Zahl. Die nachfolgende Skizze zeigt die Graphen der ersten fünf Potenzfunktionen. Die Potenzfunktionen mit *geradem* Exponenten haben ähnliche Graphen wie die Normalparabel von $f(x) = x^2$. Ihre Graphen sind mit dickerer Strichstärke gezeichnet, während die Potenzfunktionen mit ungeradem Exponenten in der Skizze mit dünnerer Strichstärke dargestellt sind.



Wir wollen nun die fundamentalen Eigenschaften der Potenzfunktionen zusammenstellen. Man prägt sich diese Eigenschaften am besten an Hand der obigen Skizze ein.

<table>
<tr><th colspan="2">Die Graphen der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ...</th></tr>
<tr><td>... mit geradem Exponenten n ...</td><td>... mit ungeradem Exponenten n ...</td></tr>
<tr><td colspan="2">1) ... verlaufen durch die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2) ... sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und im Bereich $x \geq 0$ monoton wachsend.</td></tr>
<tr><td>3) ... sind achsensymmetrisch.</td><td>... sind punktsymmetrisch.</td></tr>
<tr><td>4) ... nehmen keine negativen y-Werte an,
... nehmen jeden positiven y-Wert zweimal an.</td><td>... nehmen jeden y-Wert genau einmal an.</td></tr>
</table>

Neben diesen Eigenschaften, die die einzelnen Potenzfunktionen betreffen, sieht man an obiger Skizze deutlich noch eine weitere wichtige Beziehung der verschiedenen Potenzfunktionen *zueinander*. Während die Potenzen x^n bei fester Basis $x > 1$ mit zunehmendem Exponenten n auch zunehmen, ist dies bei Basen $0 < x < 1$ genau umgekehrt: Bei größerem Exponenten n werden die Potenzen x^n kleiner. In Formeln:

5) Im Bereich $x > 1$ gilt:	$n < m \implies x^n < x^m$.
im Bereich $0 < x < 1$ gilt:	$n < m \implies x^n > x^m$.

Begründungen:
1) $0^n = 0$ und $1^n = 1$ für $n \in \mathbb{N}$.
2) bedeutet in Formeln: $0 \leq x_1 < x_2 \implies x_1^n < x_2^n$. Man beweist dies genauso, wie wir die entsprechende Aussage für $n = 2$ bereits bewiesen haben: $0 \leq a < b \implies a^2 \leq ab < b^2 \implies a^3 \leq a^2 b < b^3 \implies \ldots$.
3) Allgemein gilt für eine beliebige Funktion f:

$$\text{(Der Graph von) } f \text{ ist } \textit{achsensymmetrisch} \iff f(-x) = f(x)\,.$$
$$\text{(Der Graph von) } f \text{ ist } \textit{punktsymmetrisch} \iff f(-x) = -f(x)\,.$$

Für die Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit *geradem* n gilt offensichtlich $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$, während bei *ungeradem* n $f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$ gilt. Damit ist 3) gezeigt.
4) Gemäß 2) haben die Potenzfunktionen im Bereich $x > 0$ an verschiedenen Stellen auch verschiedene Werte. In diesem Bereich kann also kein y-Wert zweimal angenommen werden. Dass jeder positive y-Wert auch tatsächlich angenommen wird, liegt wiederum an der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Zusammenfassend kann man sagen, dass die Potenzfunktionen im Bereich $x > 0$ jeden positiven y-Wert genau einmal annehmen. Zusammen mit den Symmetrieaussagen 3) erhält man dann 4).
5) Ist $n < m$, so ist $x^m = x^n \cdot x^{m-n}$. Man erhält also x^m aus x^n durch Multiplikation mit der Potenz x^{m-n} von x. Ist $x > 1$, so ist diese Potenz $x^{m-n} > 1$, also $x^m > x^n$; ist hingegen $0 < x < 1$, so ist $x^{m-n} < 1$ und daher $x^m < x^n$.

b. Wurzelfunktionen. Die höheren *Wurzelfunktionen* sind die Umkehrungen der Potenzfunktionen. Die *n-te Wurzel* $\sqrt[n]{x}$ soll definiert werden als eine Zahl, deren n-te Potenz x ist: $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

1. Gerader Exponent:

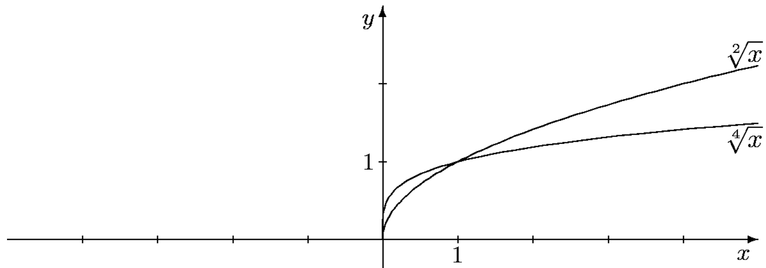
Für *gerades* n geht man genauso vor wie bei den Quadratwurzeln. (Diese bilden ja den Spezialfall $n = 2$.) Gemäß Eigenschaft 4) wissen wir, dass nur die Zahlen $x \geq 0$ n-te Potenzen sind, und dass es für $x > 0$ jeweils *zwei* Zahlen gibt, deren n-te Potenz x ist. Wie bei den Quadratwurzeln bezeichnet man nun die *nicht-negative* darunter als die n-te Wurzel und definiert:

$$\boxed{\text{Für } \underline{\text{gerades}}\ n \text{ und } \underline{x \geq 0}: \quad y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x \ \wedge\ y \geq 0.}$$

Für diese höheren Wurzeln $\sqrt[n]{x}$ gelten bei *geradem* n dieselben Gesetzmäßigkeiten, wie wir sie für die Quadratwurzeln zusammengestellt hatten. Übertragen Sie die Regeln (1) – (8) aus 8.b. sinngemäß auf n-te Wurzeln bei geradem n.

Die Graphen der höheren Wurzelfunktionen entstehen aus den in 9.a. skizzierten Graphen der Potenzfunktionen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I./III. Quadranten. Wie bei der Quadratwurzel wird auch hier vom Graphen der Umkehrrelation der Teil unterhalb der x-Achse (d. h. $y < 0$) ausgeschlossen und gehört nicht zum Graphen der Wurzelfunktion. Man erhält so den nachstehend skizzierten typischen Verlauf für Wurzelfunktionen mit geradem Exponenten.

Wurzelfunktionen $\sqrt[n]{x}$ bei <u>geradem</u> n:



Die Graphen zeigen deutlich, dass bei *geradem* n die n-te Wurzel $\sqrt[n]{x}$ nur für $x \geq 0$ definiert ist, und der Wurzelwert immer ≥ 0 ist.

2. Ungerader Exponent:

Für *ungerades* n ist die Situation wesentlich einfacher, denn gemäß Eigenschaft 4) gibt es in diesem Fall zu *jedem* x genau *eine* solche Zahl, so dass man die n-te Wurzel wie folgt definieren kann:

$$\boxed{\text{Für } \underline{\text{ungerades}}\ n \text{ und } \underline{\text{beliebiges}}\ x: \quad y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x.}$$

Da hier keinerlei Einschränkungen bzgl. der Vorzeichen des Radikanden x oder des Wurzelwertes y nötig sind, erhält man die den Regeln (1) – (8) aus 8.b. entsprechenden Eigenschaften *ohne* irgendwelche *Einschränkungen.* Sie lauten jetzt:

Für <u>ungerades</u> n:

(1) $(\sqrt[n]{a})^n = a\,,$ (2) $\sqrt[n]{a^n} = a\,,$

(3) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\,,$ (4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ für $b \neq 0\,,$

(5) $a = b \iff a^n = b^n\,,$ (6) $a = b \iff \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}\,,$

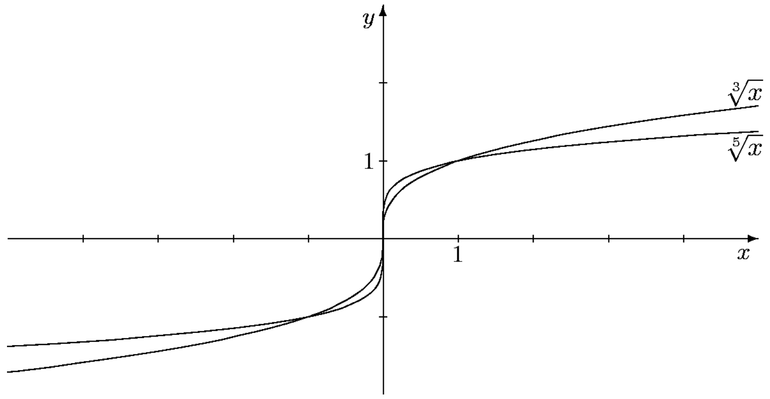
(7) $a \leq b \iff a^n \leq b^n\,,$ (8) $a \leq b \iff \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}\,.$

Insbesondere die Regeln (5) – (8) besagen:

Für *ungerades* n sind die Potenzierung mit n sowie die Bildung der n-ten Wurzel *uneingeschränkt* Äquivalenzumformungen.

Die Skizzen der Wurzelfunktionen erhält man wieder durch Spiegelung der Graphen der Potenzfunktionen an der Winkelhalbierenden des I./III. Quadranten, nur dass bei *ungeradem n* der Graph der Umkehrrelation schon ein Funktionsgraph ist. Es braucht also kein Teil ausgeschlossen zu werden. Die folgende Skizze zeigt den typischen Verlauf der Graphen der Wurzelfunktionen bei *ungeradem* Exponenten. Beachten Sie, dass diese Wurzelfunktionen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

Wurzelfunktionen $\sqrt[n]{x}$ bei <u>ungeradem</u> n:



c. Potenzen mit rationalen Exponenten. Aufgrund der Erweiterung des Zahlbereichs zu den reellen Zahlen und der darauf basierenden Existenz von Wurzeln kann man nun den Potenzbegriff erneut erweitern, und zwar zu Potenzen mit rationalen Zahlen als Exponenten. Den Ansatz zur Definition entnimmt man der Regel $(a^n)^m = a^{nm}$. Soll diese fundamentale Gesetzmäßigkeit auch für gebrochene Exponenten gültig bleiben, so muss z. B. gelten:

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a\,,$$

m. a. W. $a^{\frac{1}{n}}$ muss eine Zahl sein, deren n-te Potenz a ist. Man definiert daher $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ bzw. allgemein

$$\boxed{\text{Für } a > 0 \text{ und } r = \tfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}\text{:} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.}$$

Da m negativ sein kann, muss man zunächst $a \neq 0$ voraussetzen. Die Beschränkung auf positive Basen $a > 0$ ist dann nötig, da für *gerades* n und $a < 0$ keine n-te Wurzel von a existiert. Hier könnte man zwar wie bei den Wurzeln verschiedene Definitionsbereiche unterscheiden. Dies beseitigt aber die Probleme nicht, weil nur für positive Basen $a > 0$ die fundamentalen Potenzgesetze gültig bleiben. So ist etwa die bekannte Formel $(a^r)^s = a^{rs}$ nicht für beliebige a richtig, denn mit $r = 2$ und $s = \frac{1}{2}$ erhält man z. B. $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{2\cdot\frac{1}{2}} = a^1 = a$. Dies bedeutet $\sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a$. Diese Formel ist zwar für *alle* a definiert, aber, wie wir bereits wissen, nur für $a > 0$ richtig (siehe 9.b. (2) $\sqrt{a^2} = |a|$).

Man muss sich also bei Potenzen mit *gebrochenen* Exponenten auf *positive* Basen beschränken.

Unter dieser Voraussetzung gelten dann die bekannten fundamentalen Potenzgesetze auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten:

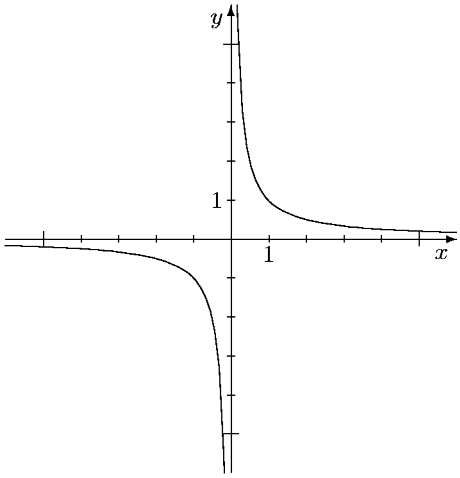
$$\boxed{\text{Für } a, b > 0 \text{ und } r, s \in \mathbb{Q}\text{: } a^r a^s = a^{r+s}\,,\ \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}\,,\ (ab)^r = a^r b^r\,,\ (\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}\,,\ (a^r)^s = a^{rs}.}$$

Diese Gesetzmäßigkeiten beinhalten alle Regeln über den Umgang mit Wurzeltermen (bei positiven Radikanden). Das folgende Beispiel zeigt, wie sich dadurch die Berechnung von Wurzeltermen auf *Bruchrechnung* im Exponenten reduziert:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3-2}{6}} = 3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3}\,.$$

Man beachte, dass bei negativen Radikanden und ungeradem Wurzelexponenten zunächst negative Vorzeichen *vor* die Wurzel 'gezogen' werden müssen mit Hilfe der Regel $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ (für ungerades (!) n). Erst dann können gebrochene Exponenten eingeführt werden. Dies muss man auch bei Benutzung des *Taschenrechners* beachten. Dieser stellt keine Wurzelfunktionen (außer der Quadratwurzel und evtl. der dritten Wurzel) zur Verfügung. Mit dem Taschenrechner berechnet man höhere Wurzelwerte über Potenzen mit gebrochenen Exponenten. Die entsprechende Taste trägt meist die Bezeichnung $\boxed{x^{1/y}}$. Benutzt man diese, um etwa $\sqrt[3]{-7} = (-7)^{1/3}$ zu berechnen, so erhält man eine Fehlermeldung 'Error'. Man muss also die Vorzeichen selbst bestimmen und mit dem Taschenrechner $7^{1/3} \approx 1{,}912931183$ ermitteln[1].
Hat der Taschenrechner jedoch eine Taste $\boxed{\sqrt[3]{x}}$, so kann man $\sqrt[3]{-7} \approx -1{,}912931183$ direkt berechnen.

Schlussbemerkung: Wir haben in diesem Abschnitt 9. die Graphen der Potenzfunktionen mit *negativem* Exponenten nicht näher untersucht, da sie doch einige Besonderheiten haben. Ursache dafür ist die Definitionslücke an der Stelle 0. Die nebenstehende Skizze von $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ zeigt dies deutlich: Wegen der Definitionslücke bei 0 besteht der Graph aus *zwei* Kurvenstücken. Außerdem werden die Beträge der Funktionswerte in der Nähe der Lücke 0 beliebig groß: 0 ist ein sog. *Pol.* Die Untersuchung solcher Funktionen kann eines der Themen im 3./4. Semester sein.



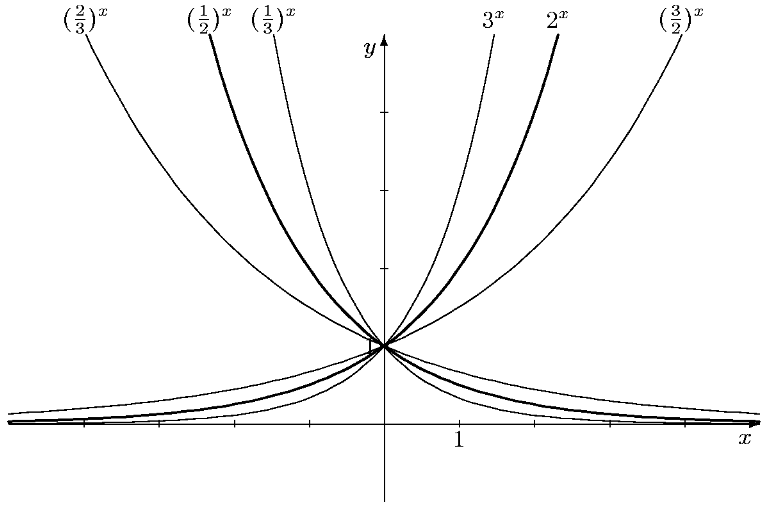
[1] Bei Taschenrechnern neuerer Bauart wird Ihnen diese Überlegung scheinbar abgenommen und auch $(-7)^{\frac{1}{3}} = -1{,}912931183$ berechnet, aber bei $(-7)^{\frac{2}{3}}$ erhält man dann doch eine Fehlermeldung, obwohl diese Zahl konsequenterweise das Quadrat der vorangehenden sein müsste. Es kommt aber noch schlimmer: Der Taschenrechner liefert nun für die Berechnung von $\left((-7)^2\right)^{\frac{1}{6}}$ und $(-7)^{2\cdot\frac{1}{6}} = (-7)^{\frac{1}{3}}$ *unterschiedliche* Ergebnisse. Die fundamentale Potenzregel $a^{rs} = (a^r)^s$ ist eben für negative Basen nicht allgemein gültig. Aus diesem Grunde sind und bleiben in der Mathematik Potenzen mit gebrochenen Exponenten nur für positive Basen definiert!

VII. Transzendente Funktionen

10. Exponential- und Logarithmusfunktionen a. Exponentialfunktionen. Wie der Name schon andeutet, haben auch die Exponentialfunktionen etwas mit Potenzen zu tun. Während jedoch bei den in Abschnitt 9. untersuchten Potenzfunktionen die Exponenten fest und die Basen variabel waren, sind jetzt bei den Exponentialfunktionen die Basen fest und die *Exponenten variabel.* Unter den *Exponentialfunktionen* versteht man also die folgenden Funktionen $\exp_a$:

$$\boxed{\text{Exponentialfunktion zur Basis } a > 0\text{:} \quad \exp_a(x) = a^x\,.}$$

Die folgende Skizze zeigt den typischen Verlauf einiger Exponentialfunktionen.



Die nachstehend zusammengestellten fundamentalen Eigenschaften der Exponentialfunktionen prägt man sich am besten an Hand der obigen Skizze ein.

Die Graphen der Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ ($a > 0$) …	
…mit Basis $a < 1$ …	…mit Basis $a > 1$ …
1) …haben an der Stelle 0 den Wert 1.	
2) …sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und nehmen nur positive Werte an.	
3) …sind monoton *fallend.*	…sind monoton *wachsend.*
4) …nehmen jeden positiven y-Wert genau einmal an.	
5) Die Graphen für a und $\frac{1}{a}$ sind spiegelbildlich zueinander bzgl. der y-Achse.	

Wegen $\exp_1(x) = 1^x = 1$ ist die Funktion $\exp_1$ *konstant* mit dem Wert 1. Diese Funktion stellt sozusagen den Übergang dar von den monoton fallenden Exponentialfunktionen $\exp_a$ mit $a < 1$ zu den monoton wachsenden mit $a > 1$. Der Fall $a = 1$ nimmt eine Sonderstellung ein und wird daher im Folgenden nicht weiter betrachtet.

Begründungen: 1) Wegen $a^0 = 1$ verlaufen alle Graphen durch den Punkt $(0\,,1)$.
2) Wie wir im vorangehenden Abschnitt 9.c. gesehen haben, sind für $a > 0$ die Potenzen a^r mit beliebigem *rationalem* Exponenten r definiert und positiv. Diese Definition kann man nun

in einem weiteren Schritt auf beliebige *reelle* Exponenten x ausdehnen. Der Ansatz zur Definition ergibt sich aus dem Monotonieverhalten der Potenzen in Abhängigkeit vom (rationalen) Exponenten:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Für } a>1 \text{ gilt:} & r<s \iff a^r<a^s, \\ \text{Für } a<1 \text{ gilt:} & r<s \iff a^r>a^s. \end{array}} \qquad (*)$$

Für natürliche Zahlen als Exponenten haben wir diese Eigenschaften schon in 9.a. 5) bewiesen. Wir wollen sie nun für beliebige *rationale* Exponenten beweisen: Sind $r, s \in \mathbb{Q}$ und ist $s - r = \frac{m}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$, so gilt für $a > 1$:

$$a^r < a^s \iff 1 < \frac{a^s}{a^r} = a^{s-r} \iff 1 < a^{\frac{m}{n}} \iff 1^n < a^m$$
$$\iff 1 < a^m \iff 0 < m \iff 0 < \frac{m}{n} = s - r \iff r < s\,.$$

Man beachte dabei, dass alle auftretenden Terme nur positive Werte haben, so dass die Division durch a^r und das Potenzieren mit n Äquivalenzumformungen sind. Die Äquivalenz $a^m > 1 \iff m > 0$ gilt offenbar für $a > 1$ (siehe auch 9.a. 5)). Für $a < 1$ ändert sich diese Äquivalenz zu $a^m < 1 \iff m > 0$, so dass sich dann die zweite Aussage von $(*)$ ergibt.

Der Grundgedanke für die Definition von a^x mit *reellem* x ist nun, dass die obigen Monotonieaussagen $(*)$ auch für reelle Exponenten gültig bleiben sollen. Dies hat zur Folge: Liegt eine reelle Zahl x zwischen zwei rationalen Zahlen r, s, etwa $r < x < s$, so muss a^x zwischen a^r und a^s liegen. Für $a > 1$ bedeutet dies:

$$r < x < s \implies a^r < a^x < a^s\,. \qquad (**)$$

Da reelle Zahlen x durch *Intervallschachtelungen* rationaler Zahlen definiert sind, d. h. durch rationale Zahlen r, s beliebig eng eingeschachtelt werden können, benutzt man diese Beziehung $(**)$ zur Einschachtelung von a^x. (Dass die a^r, a^s tatsächlich eine Intervallschachtelung bilden, wollen wir hier nicht beweisen.) Für $a < 1$ geht man entsprechend vor.
Die so definierten Potenzen a^x müssen gemäß $(**)$ positiv sein, da bereits a^r für $r \in \mathbb{Q}$ positiv ist.
3) Die eben skizzierte Ausweitung des Potenzbegriffs auf *reelle* Exponenten ist gerade so definiert, dass die obigen Monotonieaussagen $(*)$ für beliebige *reelle* Exponenten r, s gültig bleiben. Es gilt also 3).
So wie sich die Monotonieeigenschaften $(*)$ von rationalen auf beliebige reelle Exponenten übertragen, bleiben auch die algebraischen Gesetzmäßigkeiten allgemein gültig, also:

$$\boxed{\text{Für } a, b > 0 \text{ und } r, s \in \mathbb{R}\text{: } a^r a^s = a^{r+s}\,,\ \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}\,,\ (ab)^r = a^r b^r\,,\ (\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}\,,\ (a^r)^s = a^{rs}.}$$

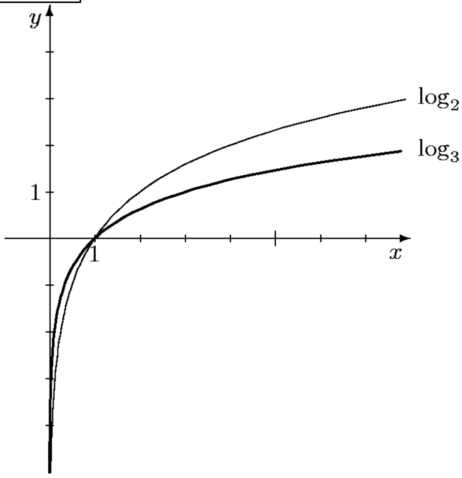
4) Aufgrund der Monotonie kann kein Wert zweimal angenommen werden. Dass jeder positive y-Wert auch tatsächlich als Funktionswert a^x vorkommt, beruht wieder auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen.
5) Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$\exp_{1/a}(x) = (\frac{1}{a})^x = a^{-x} = \exp_a(-x)\,.$$

Aufgrund dieser Beziehung braucht man nur die Exponentialfunktionen mit $a > 1$ zu studieren; die mit $a < 1$ erhält man durch Spiegelung an der y-Achse.

b. Logarithmusfunktionen. Die *Logarithmusfunktionen* sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen. Der *Logarithmus* einer Zahl x *zur Basis* a ist der Exponent y, mit dem man a potenzieren muss, um x zu erhalten: $a^y = x$. Etwas verkürzt kann man sagen: *Logarithmus* ist ein anderes Wort für *Exponent.* Aufgrund der Eigenschaften der Exponentialfunktionen (siehe 4)) gibt es (für $a \neq 1$) zu jedem positiven x genau eine derartige Zahl $y \in \mathbb{R}$. Man bezeichnet sie mit $\log_a(x)$ und definiert für $a \neq 1$:

$$\boxed{\text{Für } x > 0: \quad y = \log_a(x) \iff x = a^y.}$$



Durch Spiegelung der Graphen der Exponentialfunktionen an der Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten erhält man die Graphen der Logarithmusfunktionen. Wie oben schon erwähnt, wollen wir uns auf $a > 1$ beschränken. Dann erhalten wir die nebenstehend skizzierten typischen Graphen von Logarithmusfunktionen $\log_a$ zu Basen $a > 1$. Wieder sollte man sich an Hand dieser Skizzen einige fundamentale Eigenschaften der Logarithmusfunktionen einprägen:

Die Logarithmusfunktionen $\log_a$ $(a > 1)$ ...
1) ... haben an der Stelle 1 den Wert 0.
2) ... sind nur für $x > 0$ definiert.
3) ... sind monoton *wachsend* und nehmen jede reelle Zahl als Wert an.

Wir wollen nun noch die algebraischen Eigenschaften der Logarithmusfunktionen zusammenstellen. Sie ergeben sich aus den Gesetzmäßigkeiten für die Exponentialfunktionen. Für $a > 1$ gilt:

$$
\begin{array}{lrll}
(1) & a^{\log_a(x)} = x\,, & & \log_a(a^y) = y\,, \\
(2) & \log_a(1) = 0\,, & \text{denn} & a^0 = 1\,, \\
(3a) & \log_a(x_1 x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)\,, & \text{denn} & a^{y_1} a^{y_2} = a^{y_1+y_2}\,, \\
(3b) & \log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)\,, & \text{denn} & \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1-y_2}\,, \\
(4) & \log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)\,, & \text{denn} & (a^y)^r = a^{r\cdot y}\,, \\
(5) & x_1 = x_2 \iff \log_a(x_1) = \log_a(x_2)\,, & \text{denn} & a^{y_1} = a^{y_2} \iff y_1 = y_2\,, \\
(6) & x_1 < x_2 \iff \log_a(x_1) < \log_a(x_2)\,, & \text{denn} & a^{y_1} < a^{y_2} \iff y_1 < y_2\,,
\end{array}
$$

Diese Gesetzmäßigkeiten sind allgemeingültig, das bedeutet, sie sind wahr, sofern alle beteiligten Terme definiert sind. Dies bedeutet bei den obigen Bezeichnungen, dass die x-Werte positiv sein müssen, während r und die y-Werte beliebige reelle Zahlen sind. Alle Eigenschaften ergeben sich aufgrund der Definition $y = \log_a(x) \iff a^y = x$ wie angegeben aus den entsprechenden Eigenschaften für die Exponentialfunktion. Um sich die neuartigen Regeln für den Logarithmus einzuprägen, beachte man die charakteristischen Eigenschaften für die Logarithmus- und Exponentialfunktionen:

Die Logarithmusfunktionen überführen die *Multiplikation* in die *Addition.* Die Exponentialfunktionen überführen die *Addition* in die *Multiplikation.*

c. Exponentialgleichungen. Darunter versteht man Gleichungen, bei denen die Unbekannte im Exponenten auftritt. Solche Gleichungen kann man oft durch *Logarithmieren* lösen, denn aufgrund der oben formulierten Eigenschaften (5) und (6) gilt:

Die Anwendung irgendeiner Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ $(a > 1)$ auf beide Seiten einer (Un)Gleichung ist eine Äquivalenzumformung. Die Anwendung irgendeiner Logarithmusfunktionen $\log_a$ $(a > 1)$ auf beide Seiten einer (Un)gleichung ist – sofern sie definiert ist – eine Äquivalenzumformung.

Beispiel: Man löse die Gleichung $3^{x^2-4} = 9^x$.
Da beide Seiten positiv sind, kann man logarithmieren. Dabei kann man jede beliebige Logarithmusfunktion benutzen! Wir bezeichnen sie einfach mit log.

$$\begin{aligned} 3^{x^2-3} = 9^x &\iff \log(3^{x^2-3}) = \log(9^x) = \log(3^{2x}) \\ &\iff (x^2-3)\cdot\log(3) = 2x\cdot\log(3) \qquad | \quad :\log(3)\neq 0 \\ &\iff x^2-3 = 2x \iff x^2-2x-3=0 \iff x=-1 \ \vee \ x=3\,. \end{aligned}$$

Man braucht also $\log(3)$ nicht zu kennen, man muss nur wissen, dass $\log(3)\neq 0$ ist. Dies ist aber der Fall wegen $\log(3)\neq\log(1)=0$ (siehe Skizze der Logarithmusfunktionen).

Die Tatsache, dass man Exponentialgleichungen mit Hilfe jeder beliebigen Logarithmusfunktion lösen kann, hat auch zur Folge, dass man Logarithmen zu verschiedenen Basen ineinander umrechnen kann: Definitionsgemäß gilt $y=\log_a(x) \iff a^y = x$. Löst man nun die Exponentialgleichung $a^y=x$ nach der Unbekannten y auf, so erhält man für jede Logarithmusfunktion log:

$$y=\log_a(x) \iff a^y = x \iff \log(x) = \log(a^y) = y\cdot\log(a) \iff y = \frac{\log(x)}{\log(a)}\,.$$

Mit anderen Worten: $\log_a(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$ für *jede* Logarithmusfunktion log. Die Kenntnis *einer* Logarithmusfunktion log genügt also, um *alle* Logarithmusfunktionen berechnen zu können. Zusammen mit der *zugehörigen* Exponentialfunktion exp (Umkehrfunktion von log) beherrscht man auch *alle* Exponentialfunktionen, denn es gilt: $a^x = \big(\exp(\log(a))\big)^x = \exp(x\log(a))$. Fazit:

> Die Kenntnis *eines zusammengehörigen* Paars exp, log von Exponential- und Logarithmusfunktionen genügt, um *alle* Exponential- und Logarithmusfunktionen berechnen zu können:
> $$a^x = \exp_a(x) = \exp(x\cdot\log(a))\,,\quad \log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

Diese Tatsache ist wichtig, will man mit dem Taschenrechner bestimmte Logarithmen berechnen. Der Taschenrechner stellt nämlich nur zwei Logarithmen zur Verfügung, und zwar den sog. *dekadischen* Logarithmus $\log_{10}$ zur Basis 10 (Taste häufig $\boxed{\text{lg}}$ oder $\boxed{\text{log}}$) und den etwas geheimnisvollen *natürlichen* Logarithmus (Taste $\boxed{\text{ln}}$ oder $\boxed{\text{log}}$). (Dessen besondere Bedeutung kann erst im Rahmen der Differential- und Integralrechnung erläutert werden. Im Rahmen der Algebra ist er alles andere als 'natürlich'. Seine Basis ist definitionsgemäß die sog. *Euler'sche Zahl* $e\approx 2,718281828$. Sie ist entgegen dem ersten Anschein nicht periodisch; sie ist irrational.)
Beispiel für die Benutzung des Taschenrechners:
Frage: Ein Kapital wird jährlich mit 5% verzinst. Wann hat es sich verdoppelt?
Antwort: Mit jedem Jahr wächst das Kapital auf das 1,05-fache, in n Jahren also auf das $1,05^n$-fache. Man muss daher die Gleichung $2=1,05^n$ lösen:

$$2=1,05^n \iff \log(2) = \log(1,05^n) = n\cdot\log(1,05) \iff n = \frac{\log(2)}{\log(1,05)}\,.$$

Dabei ist log *irgendein* Logarithmus. Benutzt man den dekadischen Logarithmus $\log_{10}$, so erhält man mit dem Taschenrechner $n\approx\dfrac{0,3010299956}{0,02118929906}\approx 14,20669908$: Nach 15 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt. (Bei Benutzung des natürlichen Logarithmus ln ergibt sich bei unterschiedlichen Zwischenergebnissen dasselbe Endergebnis:
$n\approx\dfrac{0,6931471805}{0,04879016416}\approx 14,20669908$.)

d. Bedeutung. Das Kapitel soll abgeschlossen werden mit zwei kurzen Bemerkungen zur Bedeutung von Exponential- und Logarithmusfunktionen.
Logarithmische Skalen: Diese treten in den Naturwissenschaften auf, wenn gewisse Phänomene sich 'multiplikativ' verhalten. Mit Hilfe des Logarithmus werden sie dann in vertrautere

Größenordnungen transformiert und 'additiv' gemacht.
a) In der *Chemie* definiert man den sog. p_{H}-Wert als das Negative des dekadischen Logarithmus $\lg c(\mathrm{H_3O^+}) = \lg(c(\mathrm{H_3O^+}))$ der Hydronium-Ionen-Konzentration einer verdünnten wässrigen Lösung:

$$p_{\mathrm{H}} = -\lg c(\mathrm{H_3O^+})\,.$$

Die Bedeutung ergibt sich aus dem Massenwirkungsgesetz, demzufolge das *Produkt* der Ionenkonzentrationen $c(\mathrm{H_3O^+}) \cdot c(\mathrm{OH^-}) = k_{\mathrm{W}} = 10^{-14}$ konstant ist. Logarithmiert man diese Beziehung und wechselt das Vorzeichen, so erhält man eine konstante *Summe* $p_{\mathrm{H}} + p_{\mathrm{OH}} = 14$ (wenn man entsprechend $p_{\mathrm{OH}} = \lg c(\mathrm{OH^-})$ definiert). Mit Hilfe des Logarithmus hat man die Multiplikation in die einfacher handhabbare Addition transformiert. Es ist aber einige Vorsicht bzw. Übung im Umgang mit logarithmischen Skalen nötig. So bedeutet wegen

$$c(\mathrm{H_3O^+}) = 10^{-p_{\mathrm{H}}}$$

eine Erhöhung des p_{H}-Wertes um $+1$ eine Reduktion der Ionen-Konzentration auf $\frac{1}{10}$, d. h. um 90%!
b) Auch in der *Physik* kommen logarithmische Skalen vor, z. B. das *Dezibel* dB. Dabei handelt es sich um das Zehnfache des dekadischen Logarithmus von *Verhältnissen* zweier Schalleistungen L_1, L_2:

$$y = 10 \cdot \lg(\frac{L_1}{L_2})\,, \quad \text{bzw.} \quad \frac{L_1}{L_2} = 10^{y/10}\,.$$

Ein Wert von $y = 0$ ergibt dann $L_1 = L_2$, die Bezugsgröße. Dies kann etwa der Wert für die Hörschwelle sein. Im Verhältnis dazu liegt die Schmerzgrenze bei der 10^{13}-fachen Leistung. Für die logarithmische Skala bedeutet dies ein Anwachsen von $y = 0$ auf $y = 130$. Bei einer Erhöhung von y um 10 wächst das Leistungsverhältnis auf das 10-fache; eine weitere Erhöhung von y um 10 bedeutet eine erneute Verzehnfachung, insgesamt also bedeutet $y = 20$ ein Anwachsen des Verhältnisses auf das 100-fache!
Bei Rundfunkanlagen werden heute Lautstärkeangaben ebenfalls in Dezibel gemacht. Dabei ist etwa die Maximalleistung die Bezugsgröße ($y = 0$) und die Absenkung der Lautstärke wird dann logarithmisch in Dezibel angegeben: y wird dabei negativ. Wichtig ist, dass unser *subjektives* Hörempfinden proportional zu dieser logarithmischen Skala ist.

Halbwerts- und Verdopplungszeiten: Eine wichtige Eigenschaft der Exponentialfunktionen ist die Existenz und Konstanz der sog. *Verdopplungs-* bzw. *Halbwertszeit.* (Man spricht von Zeit, da bei den Anwendungen die Variable x oft die Zeit darstellt.) Wir betrachten einmal eine wachsende Exponentialfunktion $f(t) = a^t$ $(a > 1)$. Dann gibt es eine Zahl $T_2 > 0$ mit $a^{T_2} = 2$ (nämlich $T_2 = \log_a(2)$). Für diese gilt dann:

$$f(t + T_2) = a^{t+T_2} = a^t \cdot a^{T_2} = a^t \cdot 2 = 2 \cdot f(t)\,.$$

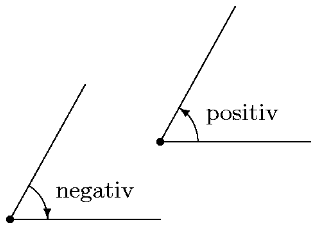
Dies bedeutet: *Erhöht man t um den Wert T_2, so verdoppelt sich der Funktionswert von f; und dies gilt für jeden Zeitpunkt t! Man nennt diesen von t unabhängigen Wert T_2 die Verdopplungszeit.*
Entsprechend hat man für abnehmende Exponentialfunktionen $f(t) = a^t$ mit $a < 1$ die Existenz eines $T_{\frac{1}{2}} > 0$ mit $a^{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$. Für dieses gilt dann:

$$f(t + T_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot f(t)\,.$$

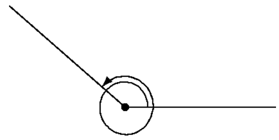
$T_{\frac{1}{2}}$ ist die sog. *Halbwertszeit;* sie gibt an, nach welcher Zeit sich ein Funktionswert halbiert hat.
Entscheidend ist dabei, dass Verdopplungs- und Halbwertszeit konstant, d. h. unabhängig von t sind. In der Natur kommen viele Vorgänge vor, bei denen es konstante Verdopplungszeiten oder konstante Halbwertszeiten gibt (Vermehrung von Bakterien, radioaktiver Zerfall).

Die Existenz solcher Zeiten weist darauf hin, dass die zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden können. Warum dies so ist und warum die Exponentialfunktionen so universelle Bedeutung haben, kann man aber erst mit Hilfe der Differentialrechnung (3./4. Semester) erklären. Man kann dann nämlich zeigen, dass die Exponentialfunktionen die einzigen Funktionen sind, bei denen die *Änderung* der Funktionswerte *proportional* zum *Funktionswert* selbst ist.

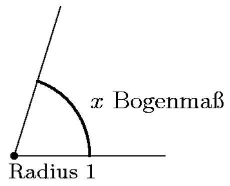
11. Die trigonometrischen Funktionen a. Orientierte Winkel. In der Mathematik und vielen Anwendungen ist es nützlich, Winkel mit einer *Orientierung* zu versehen: Man legt fest, welches der erste und welches der zweite Schenkel des Winkels ist. Dadurch erhält der Winkel eine *Drehrichtung*, die man durch einen Pfeil am Winkelbogen kennzeichnet. Bei den Winkelmaßen berücksichtigt man die Orientierung, indem man Winkel mit Drehrichtung *entgegen dem Uhrzeigersinn* als *positiv* und solche mit Drehrichtung *entsprechend dem Uhrzeigersinn* als *negativ* festlegt.



Durch diesen Zusammenhang zwischen Winkeln und Drehungen erhält man eine Ausweitung des Winkelmaßes über 360^0 hinaus: Eine Erhöhung um 360^0 Grad bedeutet dabei eine zusätzliche volle Umdrehung. Ein Winkelmaß von 500^0 beschreibt also eine volle Umdrehung und zusätzlich eine Drehung um weitere 140^0 (beides im positiven Drehsinn.) Geometrisch lassen sich solche Winkel jedoch nur sehr bedingt veranschaulichen (siehe rechts). Es ist aber aus vielerlei Gründen sinnvoll, die Skala der Winkelmaße in positiver und negativer Richtung unbegrenzt auszudehnen.



b. Das Bogenmaß, die Kreiszahl. Eine andere Möglichkeit, die Größe eines Winkels zu beschreiben, ist das sog. *Bogenmaß*. Für Winkel mit positivem Drehsinn legt man dabei die Länge des Bogens, der den Winkel bestimmt, dem Winkelmaß zugrunde. Nun ist diese Bogenlänge aber nicht nur vom Winkel, sondern auch vom Radius des Bogens abhängig. Um ein Winkelmaß zu erhalten, fixiert man den Radius 1. Damit erhält man die folgende Definition des Bogenmaßes:



Das Bogenmaß eines Winkels mit positivem Drehsinn ist die Maßzahl der Länge des den Winkel bestimmenden Kreisbogens mit dem Radius 1.

Bei negativem Drehsinn wählt man das Negative der genannten Maßzahl als Bogenmaß. Man beachte, dass das Bogenmaß entsprechend dieser Definition eine reelle Zahl (ohne irgendwelche (Längen-)Einheiten) darstellt. Um nun Winkel- und Bogenmaß miteinander in Beziehung setzen zu können, benötigt man lediglich das Bogenmaß des gestreckten Winkels. Dies ist die *Kreiszahl* π:

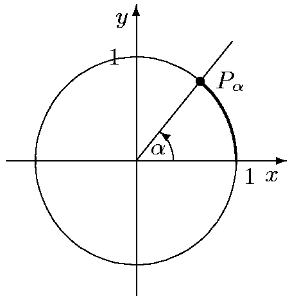
Die Kreiszahl π ist definiert als die Maßzahl der Länge eines Halbkreisbogens vom Radius 1. Sie ist damit das Bogenmaß des Winkels 180^0.

Man erhält daraus die folgende Umrechnung vom Winkelmaß α in das zugehörige Bogenmaß $x = \mathrm{arc}(\alpha)$:

$$\boxed{x = \mathrm{arc}(\alpha) = \frac{\alpha}{180^0} \cdot \pi \,, \quad \alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180^0}$$

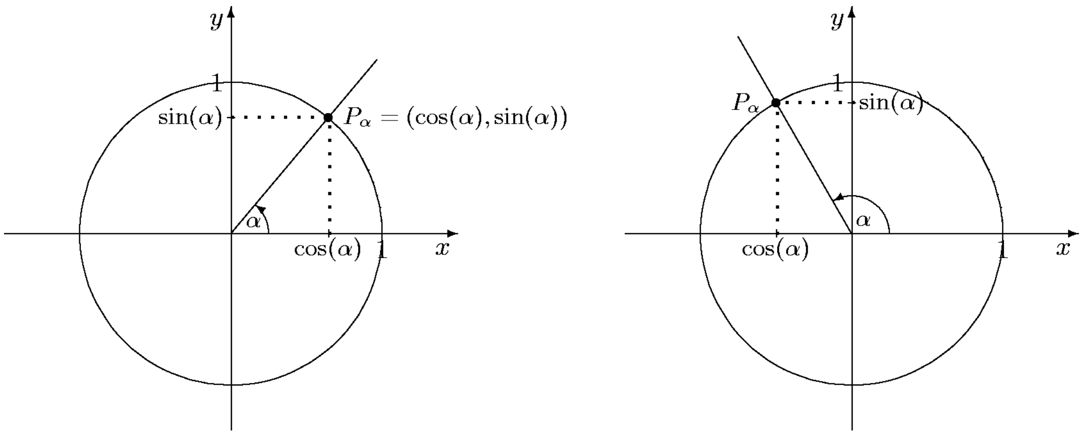
Dabei steht ‘arc’ für arcus (lat., Bogen).

c. Winkel im Koordinatensystem, Sinus und Cosinus. Bisher haben wir Winkel im Anschauungsraum koordinatenfrei betrachtet. Wir wollen nun Winkel in einem *Koordinatensystem* studieren und sie so einer exakten Berechnung zugänglich machen. Wir gehen aus von der letzten Beschreibung durch das Bogenmaß, derzufolge ein Winkel durch einen bestimmten Bogen auf dem Einheitskreis bestimmt ist. Wir orientieren den Winkel im Koordinatensystem nun so, dass sein *erster Schenkel* die *positive x-Achse* ist. Der zweite Schenkel ist dann irgendein vom Koordinatenursprung ausgehender Strahl, der den Einheitskreis in einem Punkt P trifft. Jeder orientierte Winkel α bestimmt so einen Punkt auf dem Einheitskreis, den wir in Abhängigkeit vom Winkel α mit P_α bezeichnen wollen.



Wir wollen nun die Koordinaten dieses Punktes P_α in Abhängigkeit von α studieren. Zunächst erhalten diese Koordinaten einen Namen: Die y-Koordinate ist der Sinus $\sin(\alpha)$ des Winkels, die x-Koordinate der Cosinus $\cos(\alpha)$ von α.

$$P_\alpha = \big(\cos(\alpha)|\sin(\alpha)\big)\,, \begin{cases} \cos(\alpha) & \text{der Cosinus des Winkels } \alpha, \\ \sin(\alpha) & \text{der Sinus des Winkels } \alpha. \end{cases}$$



Auf diese Weise sind die *trigonometrischen Funktionen* sin und cos für beliebige Winkelmaße definiert.

d. Eigenschaften von Sinus und Cosinus. Aus der obigen Definition der beiden trigonometrischen Funktionen können wir relativ leicht eine Reihe wichtiger Eigenschaften ablesen. Da der Punkt P_α auf dem Einheitskreis liegt, hat er vom Koordinatenursprung den Abstand 1. Berechnet man diesen Abstand mit dem Satz des Pythagoras (siehe Skizze), so erhält man für alle α:

(1) $$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

Insbesondere können Sinus- und Cosinuswerte nur zwischen -1 und $+1$ liegen:

(2) $$\boxed{-1 \le \sin(\alpha) \le +1\,, \qquad -1 \le \cos(\alpha) \le +1}$$

Erhöht man den Winkel um 360^0, so ergibt sich derselbe Punkt auf dem Einheitskreis: $P_{\alpha+360^0} = P_\alpha$. Also gilt:

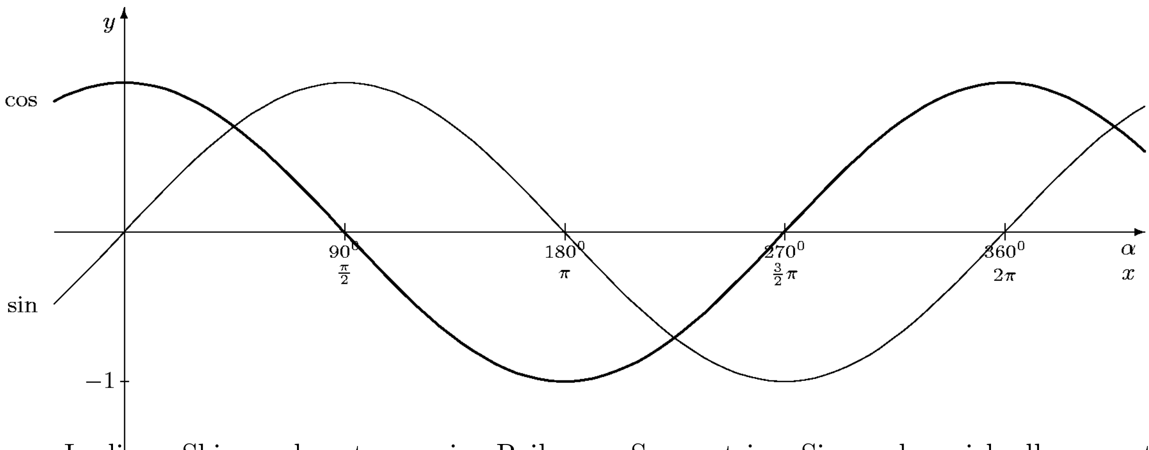
(3) $$\boxed{\text{sin und cos haben die Periode } 360^0 : \begin{cases} \sin(\alpha + 360^0) = \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha + 360^0) = \cos(\alpha) \end{cases}}$$

Für spezielle Winkelwerte kann man Sinus- und Cosinuswerte exakt ablesen, in den Zwischenbereichen verlaufen sin und cos monoton. Verfolgt man den Punkt P_α auf dem Einheitskreis für Winkel von 0^0 bis 360^0, so erhält man folgende Tabelle. Dabei steht $\nearrow$ für monoton wachsend und $\searrow$ für monoton fallend.

(4)

α	0^0	$\rightarrow$	90^0	$\rightarrow$	180^0	$\rightarrow$	270^0	$\rightarrow$	360^0
$\cos(\alpha)$	$+1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$
$\sin(\alpha)$	0	$\nearrow$	$+1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Mit Hilfe einer genauen Zeichnung des Einheitskreises kann man etwa den folgenden Verlauf der Graphen der beiden trigonometrischen Funktionen ermitteln:



In dieser Skizze erkennt man eine Reihe von Symmetrien. Sie ergeben sich alle aus entsprechenden Symmetrien am Einheitskreis.

(5) $$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)\,, \qquad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)}$$

Für die Funktionsgraphen von sin und cos bedeutet diese Beziehung: Der Graph von cos ist achsensymmetrisch (zur y-Achse); der Graph des Sinus ist punktsymmetrisch (zum Koordinatenursprung).

(6) $$\boxed{\cos(180^0 - \alpha) = -\cos(\alpha)\,, \qquad \sin(180^0 - \alpha) = \sin(\alpha)}$$

Für den Graphen des sin bedeutet die zweite Gleichung eine Achsensymmetrie bzgl. der Parallelen zur y-Achse mit dem x-Wert 90^0. Entsprechend ist der Graph des Cosinus punktsymmetrisch bzgl. des Punktes auf der x-Achse mit dem x-Wert 90^0.

(7) $$\boxed{\cos(\alpha \pm 180^0) = -\cos(\alpha)\,, \qquad \sin(\alpha \pm 180^0) = -\sin(\alpha)}$$

Für die beiden Graphen bedeutet dies: Verschiebt man sie um 180^0 nach rechts oder links, so erhält man denselben Graphen, nur an der x-Achse gespiegelt.

(8) $$\boxed{\cos(\alpha + 90^0) = -\sin(\alpha)\,, \qquad \sin(\alpha + 90^0) = \cos(\alpha)}$$

Für die Graphen bedeutet dies: Verschiebt man den Graphen von sin um 90^0 nach links, so erhält man den Graphen des cos, und verschiebt man den Graphen des cos um 90^0 nach links, so erhält man den Graphen des sin, gespiegelt an der x-Achse.

(9) $$\boxed{\cos(90^0 - \alpha) = \sin(\alpha)\,, \qquad \sin(90^0 - \alpha) = \cos(\alpha)}$$

Für die Graphen bedeutet diese Relation: Spiegelt man die Graphen an der Parallelen zur y-Achse durch den x-Wert 45^0, so geht der Graph von Sinus in den Graphen des Cosinus über, und umgekehrt der Graph des Cosinus in den des Sinus.

Anmerkungen:

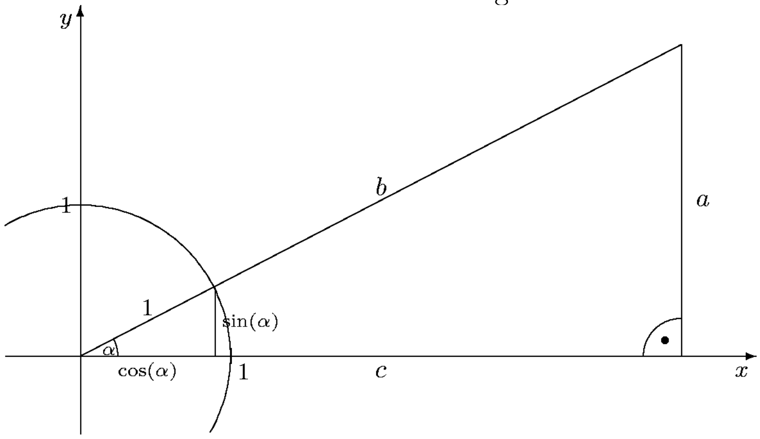
1. Prägen Sie sich den Verlauf der Graphen von Sinus und Cosinus gründlich ein! Alle bislang genannten Regeln (ausgenommen der Satz des Pythagoras (1)) **sind aus dem Verlauf der Graphen ablesbar!**

2. Alle Regeln (5) – (9) (sowie zwei weitere nicht explizit genannte) sind aus zwei fundamentalen Regeln herleitbar, nämlich aus (5) und (8):

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos(-\alpha) = \cos(\alpha), & \sin(\alpha + 90^0) = \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha), & \cos(\alpha + 90^0) = -\sin(\alpha). \end{array}}$$

3. Formulieren Sie alle Relationen mit dem Bogenmaß als Winkelmaß.

e. Rechtwinklige Dreiecke. Aufgrund des Strahlensatzes kann man mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen *rechtwinklige* Dreiecke rechnerisch erschließen. Fixiert man in einem rechtwinkligen Dreieck einen der beiden nicht-rechten Winkel, so unterscheidet man zwischen der *Ankathete,* die an dem Winkel anliegt, und der *Gegenkathete,* die dem betrachteten Winkel gegenüberliegt. In dem skizzierten Dreieck etwa ist c die Länge der Ankathete des Winkels α



und a die Länge der Gegenkathete von α. Legt man nun das Dreieck wie skizziert in ein Koordinatensystem und zeichnet den Einheitskreis, so erhält man ein neues rechtwinkliges Dreieck mit denselben Winkeln und der Hypotenusenlänge 1. Dessen Katheten haben definitionsgemäß die Längen $\cos(\alpha)$ (für die Ankathete) und $\sin(\alpha)$ (für die Gegenkathete). Da die Dreiecke gleiche Winkel haben, sind sie ähnlich und die Seitenverhältnisse stimmen überein. Man erhält so für beliebige *rechtwinklige* Dreiecke

$$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{c}{b} = \frac{\cos(\alpha)}{1} = \cos(\alpha)\,, \quad \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{1} = \sin(\alpha)\,.$$

Neben den Längenverhältnissen der beiden Katheten zur Hypotenuse ist noch das Längenverhältnis der Katheten untereinander eine bei konkreten Rechnungen nützliche Größe; dies ist der *Tangens*. In einem *rechtwinkligen* Dreieck gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\,.$$

Man benutzt nun diese letzte Beschreibung des Tangens durch Sinus und Cosinus zur allgemeinen

Definition: Für beliebige Winkel α setzt man

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \text{falls } \cos(\alpha) \neq 0\,.$$

Für die Winkel α mit $\cos(\alpha) = 0$ ist der Tangens *nicht definiert*! Es sind dies die Winkel $\alpha = \pm 90^0 + k \cdot 360^0$ ($k \in \mathbb{Z}$) bzw. $\alpha = 90^0 + k \cdot 180^0$ ($k \in \mathbb{Z}$).

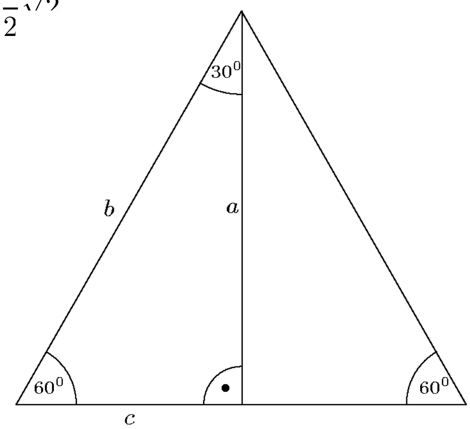
Übung: Leiten Sie aus den besprochenen Eigenschaften von Sinus und Cosinus entsprechende Eigenschaften des Tangens her. Zeigen Sie insbesondere, dass die Tangensfunktion punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs ist und die Periode 180^0 (!) hat.

f. Spezielle Winkel. Für einige spezielle Winkel kennt man die Sinus- und Cosinuswerte *exakt.* Es sind dies neben den Vielfachen von 90^0 die Winkel 30^0, 45^0 und 60^0. Wegen $\sin(45^0) = \sin(90^0 - 45^0) = \cos(45^0)$ folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$1 = \cos^2(45^0) + \sin^2(45^0) = 2\cos^2(45^0) \quad bzw. \quad \cos^2(45^0) = \frac{1}{2}\,.$$

Da $\cos(45^0)$ positiv ist, folgt

$$\sin(45^0) = \cos(45^0) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$



Für den Winkel 60^0 benutzt man folgende Überlegung: Verdoppelt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Winkeln 60^0 und 30^0, so erhält man ein Dreieck, in dem alle Winkel 60^0 betragen. Dieses ist dann gleichseitig, also gilt mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Skizze $b = 2c$. Daraus folgt

$$\cos(60^0) = \sin(30^0) = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}\,.$$

Hieraus ergibt sich dann mit dem Satz des Pythagoras

$$1 = \cos^2(30^0) + \sin^2(30^0) = \cos^2(30^0) + \frac{1}{4}\,, \text{ also } \sin(60^0) = \cos(30^0) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

Man fasst diese speziellen Werte in folgender Tabelle zusammen:

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$

g. Berechnung von Sinus- und Cosinuswerten. Bislang haben wir die trigonometrischen Funktionen nur definiert und grundlegende Eigenschaften zusammengestellt. Wir sind aber, von wenigen speziellen Winkeln abgesehen, nicht in der Lage, Sinus- oder Cosinuswerte zu berechnen. Durch die obigen Relationen zwischen Sinus- und Cosinuswerten kann man jedoch die Berechnung zurückführen auf Winkel zwischen 0^0 und 45^0. Mittels der Periodizität (3) reduziert man zunächst auf Winkel zwischen 0^0 und 360^0, dann mittels (7) auf Winkel unter 180^0, mittels (8) auf Winkel unter 90^0 und schließlich mittels (9) auf Winkel unter 45^0. Beispiel[1]:

$$\begin{aligned}\sin(5360^0) &= \sin(14 \cdot 360^0 + 320^0)\\ &\underset{(3)}{=} \sin(320^0) \underset{(7)}{=} -\sin(140^0) \underset{(8)}{=} -\cos(50^0) \underset{(9)}{=} -\sin(40^0)\end{aligned}$$

[1] Solche Rechnungen kann man oft auch abkürzen. Es sollte hier jedoch exemplarisch gezeigt werden, dass und mit welchen Regeln man in *jedem* Falle den Winkel unter 45^0 reduzieren kann.

Im Bereich zwischen 0^0 und 90^0 sind Sinus- und Cosinuswerte nicht negativ, so dass man aufgrund des Satzes des Pythagoras $\sin(\alpha)$ durch $\cos(\alpha)$ und umgekehrt berechnen kann:

$$0^0 \leq \alpha \leq 90^0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}\,, \\ \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}\,. \end{cases}$$

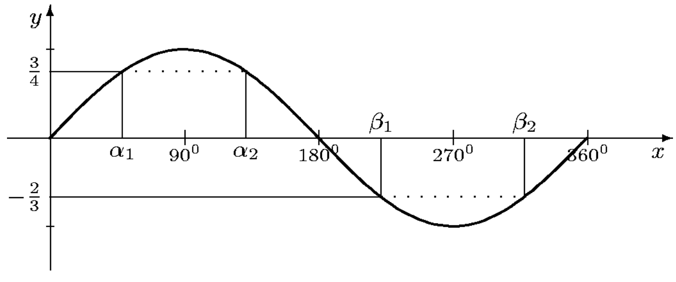
Die nun verbleibende Berechnung der Werte einer der beiden trigonometrischen Funktionen im Bereich bis 45^0 ist aber nur möglich auf der Basis weiterentwickelter *mathematischer Theorien*, deren Grundgerüst Sie erst im Rahmen des Mathematik-Unterrichts des 3. und 4. Semesters (in der Differential- und Integralrechnung) kennenlernen werden. Um diese Theorien anwenden zu können, muss man die trigonometrischen Funktionen noch weiter genau analysieren. Man benötigt dazu die *Additionstheoreme* (diese wären hier bei etwas mehr Zeit durchaus herleitbar), und die *Anstiegsformel* für die Sinus-Funktion an der Stelle 0. Für letztere und die sich daraus ergebenden fundamentalen *Ableitungsregeln* ist es wesentlich, die trigonometrischen Funktionen als Funktionen des *Bogenmaßes* zu studieren!

All dies wollen – und können – wir hier in der Einführungsphase nicht weiter verfolgen. Wir werden stattdessen die Ergebnisse dieser mathematischen Arbeit in Form der *Taschenrechner* verwenden. Sie liefern für jeden Winkelwert α die zugehörigen Sinus- und Cosinuswerte $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$. Man beachte jedoch, dass diese Werte im allgemeinen nur *Näherungswerte* darstellen, da die trigonometrischen Funktionen in der Regel irrationale, ja sogar transzendente (= nicht algebraische) Werte besitzen. Die oben erwähnten mathematischen Theorien ermöglichen jedoch die Berechnung dieser Werte *mit jeder gewünschten Genauigkeit*. Die Taschenrechner sind so programmiert, dass der (unvermeidliche) Fehler geringer als die Anzeigegenauigkeit ist.

Zur Praxis der Taschenrechner:
Der Taschenrechner verfügt über die trigonometrischen Funktionen sin, cos und tan sowohl als Funktionen im Gradmaß als auch im Bogenmaß. Man muss vor Beginn der Rechnung wählen, welches Winkelmaß man zugrundelegt. In der Anzeige findet man den Hinweis DEG (Degree, Gradmaß) oder RAD (Bogenmaß) sowie GRA (Neugrad-Einteilung, wird nicht benötigt.) Üblicherweise befindet sich ein Taschenrechner nach dem Einschalten im Modus DEG. Die Umschaltung erfolgt je nach Rechner mit der Taste DRG oder der Taste Mode.
Eine Kontrolle des Modus hat man, wenn man $\sin(90^0)$ berechnet. Das Ergebnis sollte im Modus DEG $+1$ sein. Entsprechend sollte im Modus RAD bei Berechnung von $\sin(\pi/2)$ das Ergebnis $+1$ sein. Im falschen Modus ergeben sich völlig andere Werte!

Bei korrekt eingestelltem Modus sollte die Berechnung von Sinus- und Cosinuswerten mit dem Taschenrechner kein Problem darstellen. Die problemlose Anwendung des Taschenrechners könnte nun den Eindruck erwecken, dass man die obigen Überlegungen nicht benötigt. Dies ist aber nicht der Fall. Spätestens wenn man aus bekannten Sinus-/Cosinuswerten auf die zugehörigen Winkel schließen muss, ist ein gutes Verständnis der Zusammenhänge unbedingt nötig. Dies ist das Thema des nächsten Abschnitts.

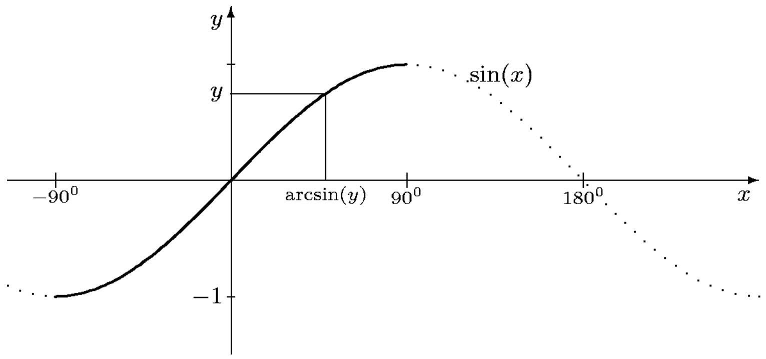
h. Die Umkehrfunktionen. In vielen Anwendungsbeispielen stößt man auf Probleme der folgenden Art: Welcher Winkel α hat einen bestimmten Sinuswert, etwa $\sin(\alpha) = \frac{3}{4}$? Nun zeigt der obligatorische Blick auf die Funktionsgraphen, dass es viele derartige Winkel gibt. Selbst innerhalb des Bereiches $0^0 \leq \alpha < 360^0$ gibt es zwei derartige Winkel, einen ersten α_1 im Bereich



zwischen 0^0 und 90^0 und einen zweiten α_2 im Bereich von 90^0 bis 180^0. Genauso verhält es sich mit negativen Sinuswerten, etwa $\sin(\beta) = -\frac{2}{3}$. Hier erhält man wieder zwei Winkel, nämlich $180^0 \leq \beta_1 \leq 270^0$ und $270^0 \leq \beta_2 \leq 360^0$.

Nun kann man zur Berechnung dieser Winkel wieder den Taschenrechner[1)] zu Hilfe nehmen, aber dieser liefert nur *einen* der beiden Winkel. Kennt man diesen, so kann man mit den Symmetrien der Sinusfunktion den anderen bestimmen. Aber welchen liefert der Taschenrechner? Im einen Falle ist es α_1, im anderen keiner der beiden β-Winkel. Warum dies so ist, wollen wir nun untersuchen.

Um zu gegebenem Sinuswert *eindeutig* einen zugehörigen Winkel festzulegen, muss man den zulässigen Winkelbereich einengen, und zwar so, dass es dort nur *einen* Winkel mit vorgegebenem Sinuswert gibt. Dies erreicht man, indem man ein monotones Kurvenstück der Sinuskurve wählt,

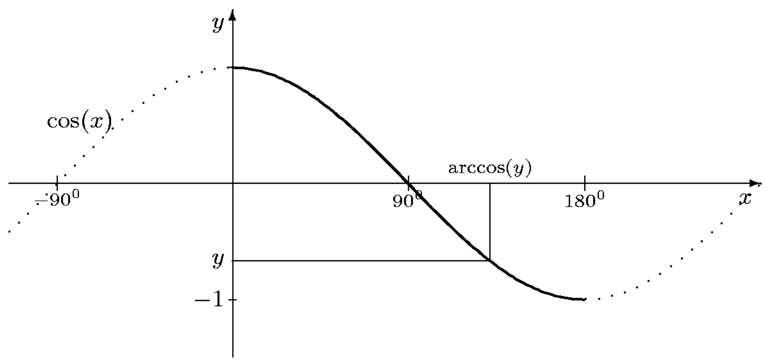


welches alle möglichen Werte von -1 bis $+1$ abdeckt. Man hat dazu den Bereich von -90^0 bis $+90^0$ ausgewählt (siehe Skizze). Der entsprechende Teil des Graphen ist durchgezogen, der Rest nur gestrichelt gezeichnet. Man erhält so:

Zu jeder reellen Zahl $-1 \leq y \leq 1$ gibt es genau einen Winkel α im Bereich $-90^0 \leq \alpha \leq 90^0$ mit der Eigenschaft $\sin(\alpha) = y$. Für diesen Winkel führt man die Bezeichnung $\alpha = \arcsin(y)$ (lesen Sie: 'Arkus-Sinus von y') ein. Dadurch ist die Umkehrfunktion arcsin *des Sinus definiert.*

Genauso geht man beim Cosinus vor, nur muss man hier einen anderen Winkelbereich wählen, in dem cos monoton ist. Hier wählt man den Bereich von 0^0 bis 180^0 und erhält so die *Umkehrfunktion* arccos des Cosinus:

Zu jeder Zahl $-1 \leq y \leq 1$ gibt es genau einen Winkel $\alpha = \arccos(y)$ im Bereich $0^0 \leq \alpha \leq 180^0$ mit $\cos(\alpha) = y$.



Beachten Sie die unterschiedlichen Wertebereiche von arcsin und arccos! Sie sind bestimmt durch die verschiedenen Monotoniebereiche von Sinus bzw. Cosinus.

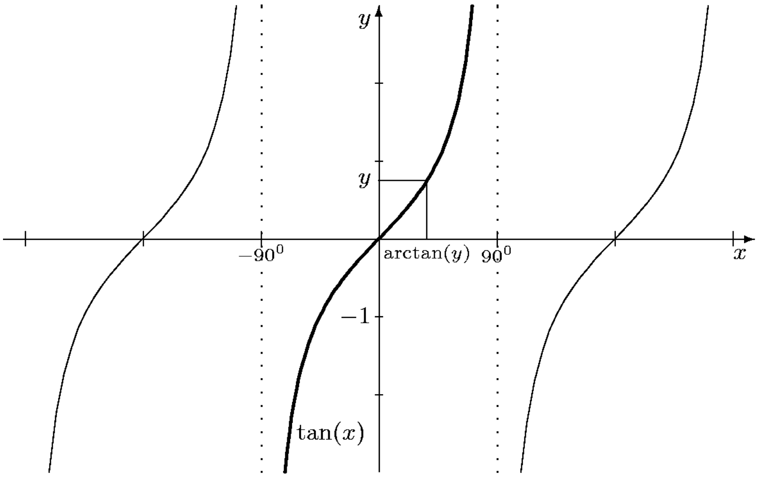
Auch der Tangens besitzt eine Umkehrfunktion, und zwar im Bereich $-90^0 < \alpha < +90^0$, da die Tangensfunktion in diesem ganzen Bereich monoton wächst. Dieser Bereich umfasst eine

---

1) Man benutzt dazu die `Shift`- oder `INV`-Taste gefolgt von der Taste `sin`. Das angezeigte Ergebnis ist einer der gesuchten Winkel, im Grad- oder Bogenmaß, je nach eingestelltem Modus.

volle Periodenlänge, die beim Tangens ja nur 180^0 beträgt. Man erhält so die *Umkehrfunktion* arctan des Tangens:

Zu jeder reellen Zahl $y \in \mathbb{R}$ *gibt es genau einen Winkel* $\alpha = \arctan(y)$ *im Bereich* $-90^0 < \arctan(y) < +90^0$ *mit* $\tan(\alpha) = y$.



i. Sinus- und Cosinussatz. Man kann die trigonometrischen Funktionen nicht nur zur rechnerischen Erfassung rechtwinkliger, sondern auch für *beliebige* Dreiecke nutzen. Der Grundgedanke ist dabei immer, in einem beliebigen Dreieck eine *Höhe* einzufügen und dadurch rechtwinklige Teildreiecke zu erhalten, die man dann mittels der trigonometrischen Funktionen berechnet. Bei diesem Vorgehen erhält man nun zwei grundlegende Resultate für allgemeine Dreiecke, den *Sinussatz* und den *Cosinussatz.*

Sinussatz: *In einem beliebigen Dreieck gilt (mit den in a. festgelegten Bezeichnungen):*

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c},$$

bzw. als mehrgliedrige Proportion geschrieben:

$$\sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma) = a : b : c\,.$$

Die Seitenlängen stehen in demselben Verhältnis wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel.

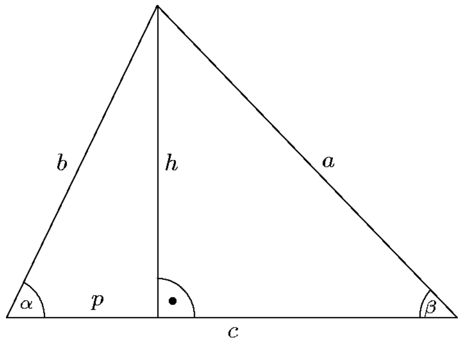
Wie schon gesagt, beruht der *Beweis* auf der Einfügung einer Höhe und der Untersuchung der entstehenden rechtwinkligen Dreiecke (siehe die untenstehende linke Skizze). Betrachten wir einmal die Höhe durch C mit der Länge h. Dann erhält man in den beiden rechtwinkligen Teildreiecken die Beziehungen

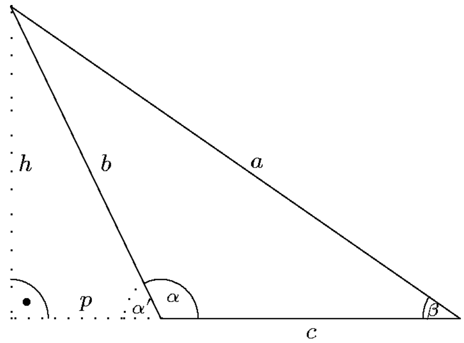
$$\sin(\alpha) = \frac{h}{b} \quad \text{und} \quad \sin(\beta) = \frac{h}{a}\,.$$

Setzt man die Sinuswerte zueinander ins Verhältnis, so kürzt sich die Länge h der Höhe heraus, und es folgt

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b}, \quad \text{bzw. äquivalent dazu} \quad \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}\,.$$

Genauso erhält man die anderen Proportionen. Diese Argumentation ist gültig für *spitze* Winkel, d. h. für $\alpha, \beta \leq 90^0$.





Ist jedoch einer der Winkel *stumpf,* so liegt die Höhe außerhalb des Dreiecks (siehe die rechte Skizze). In diesem Falle ist $h/b = \sin(\alpha')$. Dass der Sinussatz jedoch unverändert gültig bleibt, liegt an der Tatsache (siehe Regel (6))

$$\sin(\alpha') = \sin(180^0 - \alpha) = \sin(\alpha)$$

Cosinussatz: *In einem beliebigen Dreieck gilt (mit den in a. festgelegten Bezeichungen):*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)\,, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)\,, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)\,. \end{aligned}$$

Die drei Formeln stellen ein und dieselbe Relation (nur mit unterschiedlichen Bezeichnungen) dar. Man erkennt die Verwandtschaft des Cosinussatz mit dem Satz des Pythagoras. Ist etwa in der dritten Formel $\gamma = 90^0$, so ist $\cos(\gamma) = 0$ und der Term $2ab\cos(\gamma)$ verschwindet: Man erhält also den Satz des Pythagoras als Spezialfall des Cosinussatzes für den Fall, dass einer der Winkel ein rechter ist. Der Term $2ab\cos(\gamma)$ gibt die notwendige Korrektur der Pythagorasformel für beliebige Dreiecke an.

Beweis des Cosinussatzes: Wieder zerteilen wir das Dreieck mittels einer Höhe. Neben den angegebenen Größen benötigen wir zusätzlich noch den sog. Höhenabschnitt p von A (siehe die obenstehenden Skizzen). Wir unterscheiden die beiden Fälle:

Spitzer Winkel α:
Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$\begin{aligned} b^2 &= p^2 + h^2 \text{ und } a^2 = (c-p)^2 + h^2\,, \text{also} \\ a^2 - b^2 &= c^2 - 2cp + p^2 - p^2 = c^2 - 2cp\,. \end{aligned}$$

Wegen $p/b = \cos(\alpha)$, also $p = b\cos(\alpha)$ erhalten wir daraus die erste Formel des Cosinussatzes:

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2bc\cos(\alpha)\,.$$

Stumpfer Winkel α:
Nach dem Satz des Pythagoras gilt hier

$$\begin{aligned} b^2 &= p^2 + h^2 \text{ und } a^2 = (c+p)^2 + h^2\,, \text{also} \\ a^2 - b^2 &= c^2 + 2cp + p^2 - p^2 = c^2 + 2cp\,. \end{aligned}$$

In diesem Falle gilt aber $p/b = \cos(\alpha')$. Wegen $\cos(\alpha') = \cos(180^0 - \alpha) = -\cos(\alpha)$ erhalten wir nun $p = -b\cos(\alpha)$. Aufgrund der zweifachen Vorzeichenänderung ergibt sich erneut die erste behauptete Gleichung:

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2bc\cos(\alpha)\,.$$

j. Dreiecksberechnungen. Abschließend soll das typische Vorgehen bei der Berechnung von Dreiecken mit Hilfe von Sinus- und Cosinussatz skizziert werden. Wir unterscheiden verschiedene Fälle, je nachdem welche Daten des Dreiecks bekannt sind.

1. Drei Seiten:
In diesem Falle kann man mit dem Cosinussatz den Cosinus jedes Winkels berechnen, etwa

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\,.$$

1a. Liegt nun der Wert $(b^2+c^2-a^2)/2bc$ nicht zwischen -1 und $+1$, so kann er kein Cosinuswert sein. In diesem Falle gibt es kein Dreieck mit den angegebenen Seitenlängen! (Dieser Fall tritt genau dann auf, wenn von den 3 Seiten zwei zusammen *kürzer* sind als die dritte.)
1b. Liegt der Wert $(b^2+c^2-a^2)/2bc$ zwischen -1 und $+1$, so kann man mit der Arkuscosinusfunktion aus dem Cosinuswert den Winkel selbst berechnen:

$$\alpha = \arccos(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}) .$$

Man beachte dabei, dass Dreieckswinkel unterhalb von 180^0 liegen, so dass der gesuchte Winkel durch den arccos gegeben ist (siehe S. 70).

2. Zwei Seiten und der *eingeschlossene* Winkel:
In diesem Falle berechnet man mit dem Cosinussatz die dritte Seite und geht dann wie unter 1. vor. Es liegt dann der Fall 1b. vor und man erhält genau eine Lösung.

3. Zwei Seiten und ein *gegenüberliegender* Winkel:
In diesem Falle berechnet man mit dem Sinussatz den Sinuswert des zweiten gegenüberliegenden Winkels. Sind etwa α, c und a bekannt, so berechnet man

$$\sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a} .$$

Hierbei ist die rechte Seite positiv, aber nicht notwendig ≤ 1.
3a. Ist $\sin(\alpha)\cdot c/a > 1$, so kann dieser Wert kein Sinuswert sein: Ein Dreieck mit den angegebenen Daten existiert *nicht*!
3b. Ist $\sin(\alpha) \cdot c/a = 1$, so ist $\sin(\gamma) = 1$, also $\gamma = 90^0$.
3c. Ist hingegen $0 \leq \sin(\alpha) \cdot c/a < 1$, so taucht ein weiteres Problem auf: Im Bereich unter 180^0 gibt es *zwei* Winkel, die diesen Sinuswert haben (siehe S. 69). Durch Anwendung des Arkussinus erhält man nur einen davon, nämlich $\gamma_1 < 90^0$. Daneben hat aber noch der Winkel $\gamma_2 = 180^0 - \gamma_1$ denselben Sinuswert. Ob auch dieser zweite Winkel möglich ist, erkennt man erst, wenn man mit dem Winkelsummensatz den dritten Winkel berechnet: $\beta = 180^0 - \alpha - \gamma_2 = \gamma_1 - \alpha$. Ist dieser negativ, so kommt γ_2 nicht in Frage; ist hingegen $\beta > 0^0$, so erhält man mit γ_2 eine *zweite* (!) Lösung des gestellten Problems. Dies tritt auf, wenn $\gamma_1 > \alpha$ ist, d. h. $c > a$ ist. Im anderen Falle $a \geq c$ gibt es genau eine Lösung: Das gestellte Problem hat im Fall 3. *genau eine* Lösung, wenn der vorgegebene Winkel der längeren der beiden gegebenen Seiten gegenüberliegt.

4. Eine Seite und zwei Winkel:
Sind die beiden Winkel zusammen größer als 180^0, so kann es nach dem Winkelsummensatz kein derartiges Dreieck geben. Andernfalls sind alle drei Winkel bekannt und mit dem Sinussatz kann man aus der einen Seite (etwa a) alle anderen berechnen:

$$b = \sin(\beta) \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a}, \ c = \sin(\gamma) \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a} .$$