Warum ist $0{,}\overline{9} = 1$?

---

1. Beweis :

$$\begin{array}{rrcl|l} & 0{,}\overline{9} & = & 0{,}9\overline{9} & \cdot 10 \\ \Longleftrightarrow & 10 \cdot 0{,}\overline{9} & = & 9{,}\overline{9} & -0{,}\overline{9} \\ \Longleftrightarrow & 9 \cdot 0{,}\overline{9} & = & 9 & :\ 9 \\ \Longleftrightarrow & 0{,}\overline{9} & = & 1 & \end{array}$$

---

2. Beweis :

$$\begin{array}{rcl} 4 : 9 & = & 0{,}\overline{4} \\ +\ 5 : 9 & = & 0{,}\overline{5} \\ \hline 1 & = & 0{,}\overline{9} \end{array}$$

---

3. Beweis:
Wäre $0{,}\overline{9} < 1$, so lägen weitere Zahlen dazwischen.
Sei x eine solche Zahl:

$$0{,}\overline{9} < x < 1\,.$$

Wir untersuchen nun die Dezimaldarstellung von x. Aus der vorangehenden Abschätzung für x ergeben sich der Reihe nach die folgenden Aussagen:

$$0{,}9 < x < 1 \implies x = 0{,}9\ldots$$

$$0{,}99 < x < 1 \implies x = 0{,}99\ldots$$

$$0{,}999 < x < 1 \implies x = 0{,}999\ldots$$

$$0{,}9999 < x < 1 \implies x = 0{,}9999\ldots$$

usw.

Dies zeigt, dass $x = 0{,}\overline{9}$ sein müsste! Fazit:
Es gibt keine Dezimalzahl zwischen $0{,}\overline{9}$ *und* 1*:* $0{,}\overline{9} = 1$*!*
