

Grundlagen der Elektrizitätslehre

für Studierende des Köln-Kollegs
in der Einführungsphase

Unterrichtsbegleitende Skripten sowie
Übungen mit ausführlichen Lösungen

Norbert Klingen

Köln 2008

Inhalt

I. Elektrizität

1. Grundlagen	1
a. Ladung als elektrische Grundgröße.....	1
b. Ladungstrennung und Spannung.....	1
c. Elektrischer Strom.....	2
d. Das Ohmsche Gesetz und der Widerstand.....	2
e. Der spezifische Widerstand.....	4
f. Leistung.....	4
2. Elektrische Schaltungen.	5
a. Reihen- und Parallelschaltung.....	5
b. Einfache Schaltungen.....	6
c. Kirchhoffs Maschen- und Knotenregeln.....	7
d. Die Wheatstone-Brücke.....	8

II. Elektrische und magnetische Felder

3. Das elektrische Feld	9
a. Der Feldbegriff.....	9
b. Die Feldstärke.....	9
c. Elektrisches Feld und Spannung.....	10
4. Grundlagen des Magnetismus.	11
a. Magnete, ferromagnetische Stoffe, Pole	11
b. Ein erstes einfaches Modell.....	11
c. Das magnetische Feld.....	12
5. Elektrizität und Magnetismus.	12
a. Die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes.....	12
b. Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule.....	13
c. Anwendungen.....	13
d. Die Lorentzkraft.....	14
e. Bewegung induziert Spannung.....	14

I. Elektrizität

1. Grundlagen

a. Ladung als elektrische Grundgröße. Grundlage der Elektrizität ist die sog. elektrische *Ladung*. Diese gibt es in zwei Ausprägungen, die man *positiv* bzw. *negativ* nennt. Ladungen üben Kräfte aufeinander aus: Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an. Träger der Ladung sind die *Elektronen* (negativ) in der Atomhülle und die *Protonen* (positiv) im Atomkern. Da beide Elementarteilchen gleich große, aber entgegengesetzte Ladung tragen und in Atomen immer in gleicher Anzahl auftreten, heben sich ihre Wirkungen nach außen auf, so dass man Ladung makroskopisch zunächst nicht beobachten kann. Atome sind nach außen elektrisch *neutral*. Ladung kann man *nicht erzeugen*; sie ist in jeglicher Substanz vorhanden. Um sie beobachten zu können, muss man sie *trennen*. Dies kann schon durch Reibung geschehen, besonders effektiv mit einem sog. *Bandgenerator*, wie wir ihn im Unterricht benutzt haben.

Wir wollen hier die Ladung als eine weitere physikalische Grundgröße betrachten, obwohl man im internationalen Einheitensystem aus Gründen der genaueren Messbarkeit die Stromstärke zugrundelegt. Die Ladung ist sicher der fundamentalere Begriff, da ihre Natur nicht weiter aufgeklärt wird; sie ist untrennbar mit den entsprechenden Elementarteilchen verknüpft.

Als Formelzeichen wird für Ladung Q oder q benutzt. Als Einheit für die Ladung wäre die Festlegung der allen Elementarteilchen gemeinsamen Ladung, der sog. *Elementarladung* $1e$ sinnvoll. Diese ist sehr klein und daher nicht unmittelbar messbar. Man legt daher die folgende größere Einheit als Basiseinheit der Ladung fest:

Basiseinheit der Ladung: 1 C (Coulomb)

In dieser Einheit hat dann die Elementarladung den Wert:

Elementarladung: $1e = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{ C}$.

b. Ladungstrennung und Spannung. Um Ladung beobachten zu können, muss man die verschiedenartigen Ladungen trennen. Da diese sich gegenseitig anziehen, ist für die Ladungstrennung eine *Kraft* erforderlich. Wenn diese Kraft bei der Ladungstrennung über eine gewisse Wegstrecke angewendet wird, benötigt man Energie:

Ladungstrennung erfordert Energie.

Diese Energie W ist proportional zur Ladung Q , die abgetrennt wird. Das Verhältnis beider Größen nennt man die elektrische *Spannung* U :

$$\text{Spannung } U = \frac{W}{Q}, \quad \text{Basiseinheit Volt: } 1\text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Dabei bezieht sich die Angabe einer Spannung immer auf *zwei* Punkte, zwischen denen diese Spannung herrscht. Die Spannung gibt an, wieviel Energie benötigt wird, um eine Ladungsmenge Q von dem einen Punkt zum anderen zu bringen, bzw. wieviel Energie frei wird, wenn eine Ladungsmenge Q vom einen Punkt zu dem anderen fließt. Zwischen 2 Punkten herrscht also eine Spannung von 1 V , wenn für den Transport von 1 C Ladung eine Energie von 1 J benötigt wird. [Wir erinnern uns an die Definition der Energieeinheit 1 J in der Mechanik: $1\text{ J} = 1\text{ Nm}$ ist die Arbeit, die man verrichtet, wenn eine Kraft von 1 N über eine Wegstrecke von 1 m wirkt.]

Man kann die Spannung mit dem folgenden mechanischen Modell veranschaulichen. Pumpst man Wasser von einem Niveau auf ein höheres, so benötigt man dafür Energie. Diese Energie ist zunächst von der Wassermenge (genauer -masse) abhängig. Das Verhältnis von notwendiger Energie zur Wassermasse ist ein Maß dafür, wieviel Energie in einem kg Wasser in erhöhter Lage

enthalten ist bzw. wieviel Energie frei wird, wenn man 1 kg Wasser wieder herunterfließen lässt, etwa durch eine Turbine. Dieses Verhältnis ist ein Analogon zur Spannung. Im mechanischen Modell ergibt sich dafür

$$\frac{W}{m} = \frac{mgh}{m} = gh$$

mit der Höhe h und dem Ortsfaktor g . Im mechanischen Modell ist also die Höhe h , aber auch der Ortsfaktor g und damit die Stärke der Gravitation für die ‘Spannung’ bestimmend.

c. Elektrischer Strom. Unter elektrischem Strom versteht man *bewegte* elektrische Ladung. Wir betrachten zunächst nur Strom in Leitern. Dies sind Drähte aus Metall, die den Strom gut leiten. Ursache dafür ist, dass in Metallen die äußeren Elektronen der Atome *frei beweglich* sind. Im Gegensatz zu den Leitern bezeichnet man Materialien wie Holz, Keramik, Porzellan, gewisse Kunststoffe, die den Strom nicht oder schlecht leiten, als *Nichtleiter* oder *Isolatoren*.

Als Maß für die Stärke eines elektrischen Stromes definieren wir die *Stromstärke* I als das Verhältnis von durch den Leiterquerschnitt fließender Ladung zur dafür benötigten Zeit:

$\text{Stromstärke } I = \frac{Q}{t}, \quad \text{Basiseinheit Ampère: } 1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}}$

Durch einen Leiterquerschnitt fließt also ein Strom der Stärke 1 A, wenn in einer Sekunde eine Ladung von 1 C hindurchfließt.

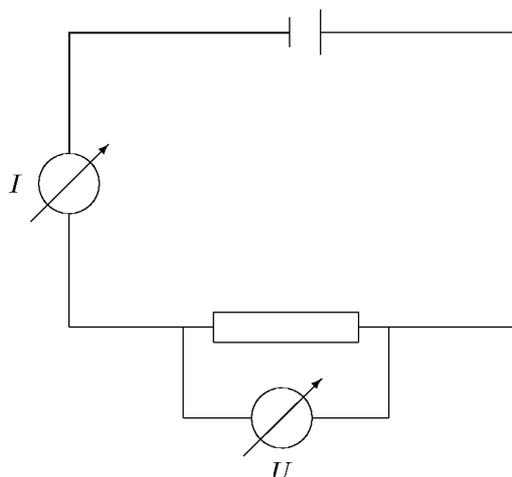
Wir wollen hier zunächst nur den sog. *Gleichstrom* betrachten, bei dem die Fließrichtung unverändert ist. Im Gegensatz dazu ändert sich beim *Wechselstrom*, mit dem wir es im täglichen Leben zu tun haben, die Bewegungsrichtung ständig (bei der üblichen Frequenz von 50 Hz 100-mal pro Sekunde).

Wie wir beim Bandgenerator gesehen haben, sind hohe Spannungen allein für den Menschen noch nicht gefährlich. Entscheidend ist die Ladungsmenge bzw. der dann fließende Strom, der eine Gefahr für den Menschen bedeutet. Auch hohe Stromstärken in Leitern können gefährlich werden: Bei zu großer Stromstärke erhitzen sich Leiter und können schließlich Brände auslösen. Um dies zu verhindern benötigt man *Sicherungen*. Der naheliegendste Typ sind die *Schmelzdrahtsicherungen*, bei denen in einem isolierenden Keramikkörper ein Draht mit genau festgelegtem Querschnitt verläuft. Diese Sicherung wird so in den Stromkreis eingesetzt, dass sämtlicher Strom hindurchfließt. Wird der Strom zu stark, so schmilzt der Draht in der Sicherung, bevor in den anderen Leitungen des Hauses eine zu starke Hitze gefährlich wird. Ist eine solche Sicherung ‘durchgebrannt’, muss sie ersetzt werden. In der Praxis benutzt man heute Sicherungsautomaten, die auf anderen Wirkungen des Stromes beruhen (magnetische Wirkungen, siehe später).

d. Das Ohmsche Gesetz und der Widerstand. Um einen Strom auszulösen, benötigt man eine Spannungsquelle. An dieser wird getrennte Ladung bereitgestellt. Schließt man nun daran einen *Verbraucher* (elektrischer Heizofen, Elektromotor o.ä.) an, so fließt ein Strom. Wovon hängt die Stromstärke ab?

Dazu haben wir einen Schiebewiderstand an die Spannungsquelle angeschlossen und die entstehende Stromstärke sowie die Spannung an den Enden des Schiebewiderstandes gemessen. Dazu benötigt man *Messgeräte*. Über deren Aufbau und Wirkungsweise werden wir zu einem späteren Zeitpunkt sprechen. Diese Multifunktionsgeräte können sowohl zur Stromstärken- als auch zur Spannungsmessung eingesetzt werden. Mit Hilfe von Schaltern kann man wählen, ob Gleich- oder Wechselstrom gemessen werden soll, ob Stromstärke oder Spannung gemessen werden soll, und welcher Messbereich gewünscht ist. Das allein genügt jedoch nicht, man muss die Geräte auch korrekt in den Stromkreis einbauen. Will man *an einer Stelle* des Stromkreises die *Stromstärke* messen, muss man den Stromkreis an dieser Stelle unterbrechen und das Gerät dazwischen (in *Reihe*) schalten. Will man jedoch *zwischen zwei Stellen* des Stromkreises die *Spannung* messen, muss man die beiden Pole des Messgerätes an diese beiden Stellen

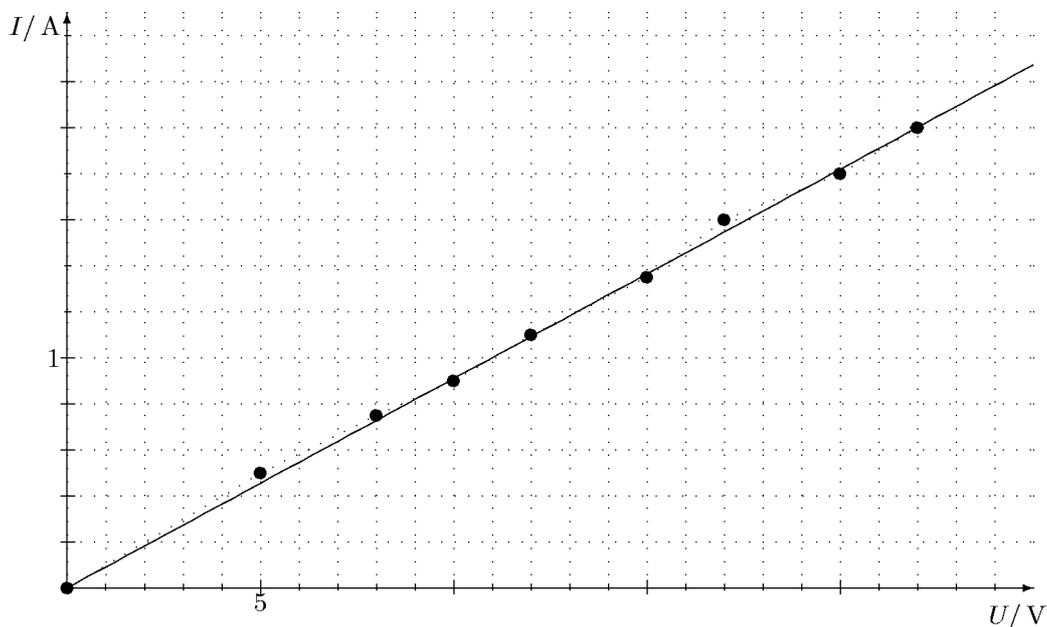
anschießen, ohne den Stromkreis ansonsten zu verändern (*parallel* schalten).



Bei der skizzierten Schaltung misst man die Stärke des Stromes I durch den Verbraucher und die Spannung zwischen den *Enden* des Verbrauchers (hier als Rechteck symbolisiert). Dabei haben Studierende eines früheren Kurses z. B. folgende Messreihe erhalten:

U/V	5	8	10	12	15	17	20	22
I/A	0,5	0,75	0,9	1,1	1,35	1,6	1,8	2

Die graphische Darstellung der Stromstärke in Abhängigkeit von der Spannung (die sog. *Kennlinie* des Verbrauchers) ergibt ungefähr eine Ursprungsgerade, so dass man Proportionalität



vermuten kann. Wir berechnen für alle Messpunkte das Verhältnis beider Größen:

U/V	5	8	10	12	15	17	20	22
I/A	0,5	0,75	0,9	1,1	1,35	1,6	1,8	2
$\frac{U}{I} / \frac{V}{A}$	10	10,7	11,1	10,9	11,1	10,6	11,1	11

Genauere Messungen bestätigen diese Proportionalität:

Ohmsches Gesetz:

Die Spannung an den Enden eines metallischen Leiters ist zur Stromstärke des durchfließenden Stromes proportional.

Dieses Gesetz ist jedoch (wie viele physikalische Gesetze) nicht uneingeschränkt gültig. Es trifft nicht auf alle Materialien gleichermaßen zu und auch nicht, wenn sich die Temperatur des Leiters ändert (etwa in Glühlampen). Es gibt jedoch besondere Metallegierungen (z. B. Konstantan), bei denen das Ohmsche Gesetz auch bei starkem Stromfluss und daraus folgender Erhitzung gültig bleibt. Trifft das Ohmsche Gesetz zu, so definiert man den

$$\text{Widerstand } R = \frac{U}{I}, \quad \text{Basiseinheit } \text{Ohm } 1 \Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

Ein Gerät hat also einen Widerstand von 1Ω , wenn bei 1 V anliegender Spannung ein Strom von 1 A durch das Gerät fließt.

e. Der spezifische Widerstand. Wovon ist nun der Widerstand eines Drahtes abhängig? Mögliche Parameter sind die Länge l des Drahtes, seine Querschnittsfläche A sowie das Material. Man stellt nun fest, dass (nicht ganz unerwartet) der Widerstand mit der Länge l steigt und mit zunehmender Querschnittsfläche A sinkt. Genauer kann man beobachten, dass Widerstand R und Länge l im gleichen Verhältnis wachsen; sie sind *proportional*. Für die Abhängigkeit von der Querschnittsfläche kann dies nicht zutreffen. Bei genauerer Beobachtung stellt man jedoch fest, dass sich der Widerstand bei Halbierung der Fläche verdoppelt und dass er bei Verdreifachung der Fläche auf ein Drittel sinkt. Indem man statt mit A mit dem Kehrwert $\frac{1}{A}$ vergleicht, erkennt man, dass R im gleichen Verhältnis steigt wie dieser Kehrwert: R und $\frac{1}{A}$ sind proportional zueinander. Man sagt dann auch: R und A sind *umgekehrt* proportional zueinander.

$$R, A \text{ umgekehrt proportional} \iff R \sim \frac{1}{A} \iff \frac{R}{1/A} \text{ konstant} \iff R \cdot A \text{ konstant.}$$

Zwei Größen sind also umgekehrt proportional zueinander, wenn ihr Produkt konstant ist.

Setzt man beide oben genannten Proportionalitäten zusammen, so erhält man

$$R \sim \frac{l}{A} \iff \rho = \frac{R}{l/A} \text{ ist konstant.}$$

Diese Konstante enthält die Materialabhängigkeit des Widerstandes und wird *spezifischer* Widerstand genannt. Kennt man diese, so kann man den Widerstand von Drähten aus seinen Abmessungen berechnen:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

f. Leistung. Wenn man ein elektrisches Gerät (etwa eine Waschmaschine oder ein anderes größeres Haushaltsgerät) kauft und an den Stromkreis anschließen will, muss man sicherstellen, dass dadurch kein Schaden verursacht wird. Zunächst muss das Gerät für die ortsübliche Spannung (in Europa $220\text{--}230 \text{ V}$) geeignet sein. Sodann muss aber auch sichergestellt werden, dass die elektrischen Leitungen nicht durch eine zu große Stromstärke überlastet werden. Allerdings ist die Stromstärke auf dem Gerät *nicht* angegeben. Stattdessen findet man auf dem Typschild neben der Spannung die *Leistung* des Gerätes. Wie hängt diese mit der Stromstärke zusammen?

Wir erinnern uns: Die Spannung U ist das Verhältnis zwischen der Energie W , die beim Transport einer Ladung frei wird, zur transportierten Ladungsmenge Q : $U = \frac{W}{Q}$. Die Leistung P ist definitionsgemäß das Verhältnis von verrichteter Arbeit W zur dafür benötigten Zeit t , also ergibt sich bei Transport der Ladung Q in der Zeit t über eine Spannungsdifferenz U für die Leistung

$$P = \frac{W}{t} = \frac{U \cdot Q}{t}.$$

Nun bedeutet der Transport einer Ladungsmenge Q in der Zeit t einen Strom der Stärke $I = \frac{Q}{t}$, und man erhält schließlich die wichtige Beziehung für die Leistung P eines elektrischen Stromes:

$$P = U \cdot I.$$

Zugleich ergibt sich für die Einheiten

$$1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} \cdot 1 \frac{\text{C}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ W}.$$

Man kann also bei Kenntnis der Spannung U und der Leistung P den entstehenden Stromfluss I ermitteln und überprüfen, ob dieser für die eingebauten Sicherungen nicht zu stark ist.

Was geschieht nun, wenn man ein solches Gerät an einer ungeeigneten Spannungsquelle betreibt? Ist die Spannung zu hoch, so wächst auch die Stromstärke (bei einem Ohmschen Widerstand proportional), und das Gerät wird überlastet und möglicherweise beschädigt.

Ist hingegen U niedriger als vorgesehen, so wird das Gerät unbeschadet bleiben, aber seinen Zweck nicht erfüllen, da mit der Spannung auch die Stromstärke und damit die Leistung des Gerätes sinken. Bei einem Ohmschen Widerstand R erhält man

$$P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}.$$

Die Leistung ist also bei konstantem Widerstand R proportional zum Quadrat der Spannung; man sagt: Die Leistung wächst quadratisch mit der Spannung.

$$\boxed{R \text{ konstant} \implies P \sim U^2.}$$

Halbiert sich also die Spannung, so sinkt die Leistung auf ein Viertel!

Zugleich kann man aus obiger Gleichung den Zusammenhang zwischen Widerstand und Leistung (bei konstanter Spannung) ablesen:

$$\boxed{U \text{ konstant} \implies P \text{ und } R \text{ umgekehrt proportional.}}$$

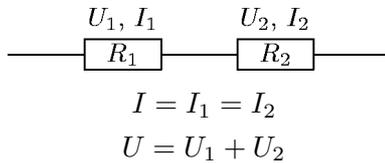
Übung: Ermitteln Sie den Zusammenhang zwischen P und I bei konstantem Widerstand und zwischen P und R bei konstanter Stromstärke I .

2. Elektrische Schaltungen.

a. Reihen- und Parallelschaltung. Die einfachsten Schaltungen verschiedener elektrischer Bauteile sind die Reihen- und die Parallelschaltung von Widerständen. Wir wollen untersuchen, welchen Einfluss diese auf Spannung, Stromstärke und Widerstand haben. In den folgenden Überlegungen bezeichnen wir für einen Widerstand R_k mit I_k den hindurch fließenden Strom und mit U_k den Spannungsabfall an diesem Widerstand. Weiter bezeichne I den Gesamtstrom sowie U den gesamten Spannungsabfall an der Schaltung. Dann gilt:

Reihenschaltung:

Die Leitungen sind unverzweigt, also ist der durchfließende Strom überall derselbe: $I = I_1 = I_2$. Dagegen addieren sich die Spannungen, da sich der Energiebedarf für einen Ladungstransport über R_1 und anschließend über R_2 addiert: $U = U_1 + U_2$.



Daher addieren sich bei einer Reihenschaltung die Widerstände:

$$\text{Reihenschaltung: } R = R_1 + R_2$$

denn

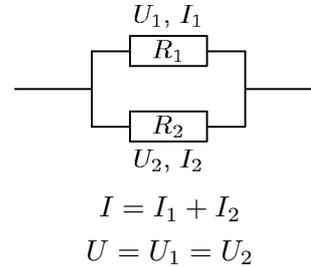
$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} = \frac{U_1}{I_1} + \frac{U_2}{I_2} = R_1 + R_2.$$

Da die Stromstärke in beiden Widerständen gleich ist, erhält man für die Teilspannungen $U_1 = R_1 I$ und $U_2 = R_2 I$ die *Spannungsteilerregel*:

$$\text{In einer Reihenschaltung verhalten sich die Teilspannungen wie die Widerstände:}$$
$$U_1 : U_2 = R_1 : R_2.$$

Parallelschaltung:

Hier teilt sich der Strom auf zwei parallele Wege auf: $I = I_1 + I_2$, während der Spannungsabfall an beiden Widerständen derselbe ist, da sie an den gleichen Stellen angeschlossen sind: $U = U_1 = U_2$.



Hier addieren sich die Kehrwerte der Widerstände:

$$\text{Parallelschaltung: } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

denn

$$\frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} = \frac{I_1}{U_1} + \frac{I_2}{U_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

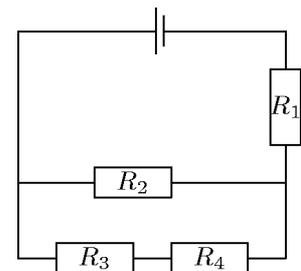
Da der Spannungsabfall an beiden Widerständen gleich ist, erhält man für die Teilströme $I_1 = \frac{U}{R_1}$ und $I_2 = \frac{U}{R_2}$ die *Stromteilerregel*:

$$\text{In einer Parallelschaltung verhalten sich die Teilströme umgekehrt wie die Widerstände:}$$
$$I_2 : I_1 = R_1 : R_2.$$

b. Einfache Schaltungen. Wenn man Schaltungen mit einer größeren Zahl von Widerständen analysieren will, versucht man diese zunächst in Teile zu zerlegen, die sich aus Reihen- oder Parallelschaltungen zusammensetzen. Man bestimmt dann für jeden Teil einen Ersatzwiderstand und kann so sukzessive den Gesamtwiderstand und dann alle sonstigen Größen ermitteln.

Betrachten wir einmal die nebenstehende Schaltung. Gegeben seien die Widerstände $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 7 \text{ k}\Omega$ und $R_4 = 8 \text{ k}\Omega$. Eine Analyse der Schaltung besteht in der Bestimmung aller Spannungsabfälle U_i an den Widerständen sowie der Stromstärken I_i durch die Widerstände R_i ($i = 1, \dots, 4$) bei vorgegebener Spannung $U = 15 \text{ V}$ an der Quelle.

Bei nebenstehender Schaltung sind die Widerstände R_3 und R_4 in Reihe geschaltet und der Ersatzwiderstand ist $R_{34} = R_3 + R_4 = 15 \text{ k}\Omega$. Dieser Widerstand R_{34} ist parallel zu R_2 geschaltet, also gilt für den Ersatzwiderstand R_{234} :



$$\frac{1}{R_{234}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{10 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{15 \text{ k}\Omega} = \frac{1}{6 \text{ k}\Omega},$$

d. h. $R_{234} = 6 \text{ k}\Omega$. Schließlich ist dieser Widerstand R_{234} in Reihe mit R_1 geschaltet und der Gesamtwiderstand ist

$$R = R_{234} + R_1 = 10 \text{ k}\Omega.$$

Damit beträgt bei der Spannung $U = 15 \text{ V}$ die Gesamtstromstärke

$$I = \frac{U}{R} = \frac{15 \text{ V}}{10 \text{ k}\Omega} = 1,5 \text{ mA}.$$

Wegen $I = I_1$ ergibt dies $U_1 = R_1 \cdot I = 4 \text{ k}\Omega \cdot 1,5 \text{ mA} = 6 \text{ V}$. Daraus ergibt sich weiter

$$U_2 = U_{34} = U - U_1 = 15 \text{ V} - 6 \text{ V} = 9 \text{ V}.$$

Damit lässt sich die Aufspaltung der Stromstärken bestimmen:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{9 \text{ V}}{10 \text{ k}\Omega} = 0,9 \text{ mA},$$

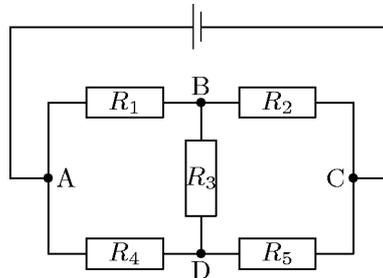
$$I_{34} = I - I_2 = 1,5 \text{ mA} - 0,9 \text{ mA} = 0,6 \text{ mA}.$$

Schließlich ermitteln wir aus dem Strom I_{34} durch die Widerstände R_3 und R_4 den Spannungsabfall an ihnen:

$$U_3 = R_3 \cdot I_{34} = 7 \text{ k}\Omega \cdot 0,6 \text{ mA} = 4,2 \text{ V},$$

$$U_4 = R_4 \cdot I_{34} = 8 \text{ k}\Omega \cdot 0,6 \text{ mA} = 4,8 \text{ V}.$$

c. Kirchhoffs Maschen- und Knotenregeln. Nicht alle Schaltungen lassen sich in der beschriebenen Weise auf eine Kombination von Reihen- und Parallelschaltungen zurückführen. Etwa in folgender Schaltung kann man an keiner Stelle eine Reihen- oder Parallelschaltung herausgreifen.



Man muss daher auf die schon zur Analyse der Parallelschaltung in Abschnitt a. benutzten grundlegenden Prinzipien zurückgreifen:

1. An jedem Verzweigungspunkt der Schaltung (*Knoten* genannt) ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme (Erhaltung der Ladung).
2. Der Spannungsabfall zwischen zwei Punkten ist über jeden Verbindungsweg derselbe (Prinzip der Energieerhaltung). Gleichwertig damit ist, dass über jeden geschlossenen Weg (*Masche* genannt) der Spannungsabfall 0 ist.

Knotenregel: Für jeden Knoten sind die Summen der zu- und der abfließenden Ströme gleich.

Maschenregel: Für jede Masche ist die Summe der Spannungen 0.

Auf der Grundlage dieser Gesetzmäßigkeiten stellt man Gleichungen für die unbekanntenen Stromstärken auf. Man erhält so ein lineares Gleichungssystem mit mehreren Gleichungen und Unbekannten. Eine genauere Analyse zeigt, dass eine der Knotengleichungen überflüssig ist und

man mit jeder anderen Knotengleichung eine der Unbekannten *eliminieren* kann. Dadurch reduziert sich die Zahl der Unbekannten. Am Ende erhält man für jede *Grundmasche*¹⁾ eine Gleichung und genauso viele Unbekannte. Dieses lineare Gleichungssystem löst man dann mit den üblichen Methoden (Gauß-Elimination). Dies wollen wir hier aber nicht weiter verfolgen.

d. Die Wheatstone-Brücke. Die obige Schaltung ist bekannt unter dem Namen *Wheatstone-Brücke* und wird benutzt zur Messung von Widerständen. Zwar kann man im Prinzip Widerstände ermitteln, indem man eine Spannung anlegt, diese und den durchfließenden Strom misst und daraus den Widerstand berechnet. Nun erfolgt Spannungsmessung in der Regel mit einem Drehspulmessgerät. Der durch das Messgerät fließende Strom verfälscht aber die Situation. Mit Hilfe der Wheatstone-Brücke kann man *stromlos* Widerstände bestimmen.

Dazu benutzt man die obige Schaltung, in der

- der Widerstand R_3 durch ein Amperemeter ersetzt wird,
- der Widerstand R_2 unbekannt ist und gemessen werden soll,
- der Widerstand R_5 variabel ist.

Man variiert nun den Widerstand R_5 so, dass durch das Messgerät R_3 *kein* Strom fließt! Man kann dann aus den drei bekannten Widerständen den unbekanntem ermitteln.

Zunächst erhält man nach der Knotenregel aus $I_3 = 0$, dass $I_1 = I_2$ und $I_4 = I_5$ ist. Wenn $I_3 = 0$ ist, ist aber auch die Spannung $R_3 I_3 = 0$ und aus der Maschenregel folgt $R_1 I_1 = R_4 I_4$ sowie $R_2 I_2 = R_5 I_5$. Wegen $I_1 = I_2$ und $I_4 = I_5$ bedeutet dies

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_5},$$

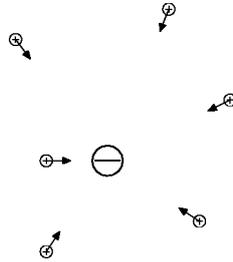
womit man jeden der Widerstände aus den übrigen ermitteln kann.

¹⁾ Darunter verstehen wir einen geschlossenen Weg, der keine inneren Abzweige besitzt und sich so nicht in zwei kleinere Maschen zerlegen lässt.

II. Elektrische und magnetische Felder

3. Das elektrische Feld

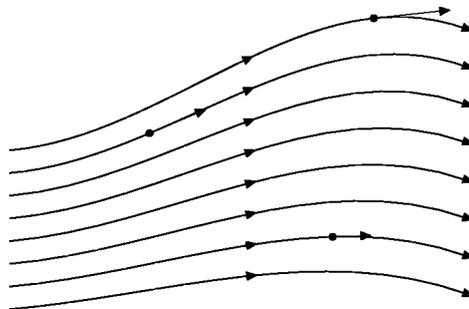
a. Der Feldbegriff. Ausgangspunkt für den Begriff des elektrischen Feldes ist die Kraftwirkung zwischen elektrischen Ladungen: Jede Ladung übt auf andere Ladungen Kräfte aus.



In Verallgemeinerung davon sprechen wir immer dann von einem elektrischen Feld, wenn an einer Stelle des Raumes auf Ladungen Kräfte ausgeübt werden:

Ein elektrisches Feld ist ein Zustand des Raumes, in dem Kräfte auf elektrische Ladungen ausgeübt werden.

Dabei ist es unerheblich, was die Ursache dieser Kraftwirkung ist. Jede Ladung erzeugt um sich ein elektrisches Feld, denn es werden Kräfte auf andere Ladungen ausgeübt. Aber elektrische Felder können auch anders entstehen! Und dies ist der Grund, warum man den Begriff des Feldes von der erzeugenden Ladung trennt. Das nachfolgende Bild veranschaulicht ein solches Feld durch die sog. *Feldlinien*. Zugleich ist dadurch an jedem Punkt des Raumes die Richtung der Feldkraft auf positive Ladungen bestimmt. (Für negative Ladungen wird die Richtung umgekehrt.) In dem Bild sind für drei Stellen des Raumes positive Probeladungen mit den Kraftvektoren eingezeichnet. Diese verlaufen jeweils tangential zu den Feldlinien.

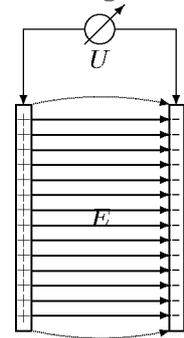


b. Die Feldstärke. Um ein Maß für die Stärke eines elektrischen Feldes festzulegen, gehen wir von den das Feld konstituierenden Kräften aus: Auf jede Ladung wirkt eine Kraft. Verdoppelt man die Ladung, so verdoppelt sich auch die Kraft, da ja auf *jede* Ladung die entsprechende Kraft wirkt; die wirkende Kraft ist also proportional zur Größe der Probeladung. Der (von der Probeladung q unabhängige) Quotient von wirkender Kraft zur Ladung ist ein Maß für die Stärke des Feldes, die sog. Feldstärke $E = \frac{F}{q}$. Da Kräfte gerichtete Größen sind, ist auch die Feldstärke gerichtet. Man legt als Richtung von \vec{E} die Richtung der auf eine *positive* Probeladung wirkenden Feldkraft \vec{F} fest. Man erhält so die folgende Definition der Feldstärke:

Feldstärke: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$.

Hierbei ist q die ins Feld gebrachte Probeladung und \vec{F} die auf diese Ladung wirkende Kraft. Ist dabei q negativ, so erhält man eine Richtungsumkehr: Die Richtung der Kraft auf eine *negative* Ladung ist *umgekehrt* zur Richtung des *Feldes*. Als Einheit für die Feldstärke ergibt sich aufgrund der Definition: $1 \frac{\text{N}}{\text{C}}$.

c. Elektrisches Feld und Spannung. Wir betrachten hier der Einfachheit halber homogene elektrische Felder. Man nennt ein elektrisches Feld *homogen*, wenn der Feldstärkevektor \vec{E} überall gleich ist, wenn also das Feld an allen Stellen die gleiche Richtung und die gleiche Stärke hat. Ein solches homogenes Feld erhält man zwischen den geladenen Platten eines *Plattenkondensators*. Dieser besteht aus zwei Metallplatten, die durch Vakuum, Luft oder andere Isolatoren gegeneinander isoliert sind. Ist der Plattenabstand d klein im Vergleich zu den Maßen der Platten, so ist das Feld zwischen den Platten weitgehend homogen. (An den Rändern ist das Feld schwächer und leicht gekrümmt.)



Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen der Feldstärke E und der Spannung U ? Definitionsgemäß ist die Spannung U zwischen zwei Punkten das Verhältnis der Energie W zur Ladung q : $U = \frac{W}{q}$, wobei W die Energie ist, die benötigt wird, um die Ladung q vom einen zum anderen Punkt zu bringen. Also benötigt man zum Transport der Ladung q die Energie $W = U \cdot q$.

Warum wird dabei Energie benötigt? Um etwa ein Elektron in Feldrichtung zu bewegen, muss man die Feldkraft überwinden. Man muss also über die Strecke d die Kraft $F = E \cdot q$ aufbringen. Gemäß der fundamentalen Definition der Arbeit als Produkt aus Kraft und Weg (bei gleicher Richtung) erhalten wir:

$$W = F \cdot d = Eq \cdot d, \quad \text{also} \quad U = \frac{W}{q} = E \cdot d.$$

Dies bedeutet allgemein:

In einem homogenen Feld ist die Spannung U zwischen zwei Punkten proportional zum Abstand d der Punkte (gemessen in Richtung des Feldes); der Proportionalitätsfaktor ist die Feldstärke E : $U = E \cdot d$.

Insbesondere kann man die Feldstärke in einem Kondensator aus Spannung U und Plattenabstand d ermitteln:

Feldstärke eines Plattenkondensators: $E = \frac{U}{d}$.

4. Grundlagen des Magnetismus.

a. Magnete, ferromagnetische Stoffe, Pole

- Magnete üben anziehende Kräfte auf sog. *ferromagnetische* Metalle (Eisen, Nickel, Kobalt) aus.
- Magnete haben zwei Pole (Orte stärkster Kraftwirkung).
- Die Pole eines Magneten sind verschieden.
Gleichartige Pole verschiedener Magnete stoßen sich ab, ungleichartige ziehen sich an.
- Eine *Kompassnadel* ist ein drehbar aufgehängter Magnet.
- Die Erde ist ein Magnet; die magnetischen Pole der Erde liegen nahe bei den geographischen Polen.
- Namensgebung für die magnetischen Pole:

Der Pol einer Kompassnadel, der zum *geographischen* Norden der Erde zeigt, wird (magnetischer) Nordpol der Kompassnadel genannt.

Achtung: Diese Festlegung hat notwendig zur Folge, dass im *geographischen Norden* der Erde der *magnetische Südpol* der Erde liegt (da der Nordpol der Kompassnadel dorthin gezogen wird).

- Es gibt keine Magnete mit nur einem Pol. Bricht man einen Stabmagneten in der Mitte durch, so entstehen an der Bruchstelle neue Pole, und zwar so, dass der eine Magnet dort einen Südpol, der andere dort einen Nordpol erhält. Beide Teilstücke sind wieder vollständige Magnete mit zwei verschiedenen Polen.

Es gibt keine magnetischen *Monopole*.

- Man kann ferromagnetische Stoffe *magnetisieren*. Durch Berührung mit einem Magneten wird der ferromagnetische Körper selbst zum Magneten, der wiederum (in schwächerer Form) auf andere ferromagnetische Stoffe Kraft ausübt.
Beispiel: Unmagnetische Büroklammern hängen in großer Zahl an einem Permanentmagneten, ohne diesen direkt zu berühren. Löst man die Büroklammern vom Magneten, so fallen sie auseinander.
- Man kann ferromagnetische Stoffe (mehr oder weniger) dauerhaft *magnetisieren*, indem man sie langfristig mit einem Magneten in Berührung bringt oder oft immer in der gleichen Richtung mit dem Magneten überstreicht.
- Magnete können durch mechanische Erschütterung (Hammerschlag o.ä.) oder durch Erhitzung ihre magnetische Wirkung verlieren.
- Umgekehrt kann man ferromagnetische Stoffe dauerhaft magnetisieren, indem man sie rot- bis weißglühend erhitzt und sie während des Abkühlens einem starken Magneten aussetzt. Nach dem Erkalten ist die vorübergehende Magnetisierung sozusagen ‘eingefroren’.

b. Ein erstes einfaches Modell.

- Ein erstes einfaches Modell für die bisher genannten Phänomene sind die sog. *Elementarmagnete*. Wir stellen uns vor, dass alle ferromagnetischen Stoffe aus kleinen Teilchen (was immer sie sein mögen) zusammengesetzt sind, die wir *Elementarmagnete* nennen.
- Diese Elementarmagnete sind in ferromagnetischen Stoffen soweit beweglich, dass sich unter der Wirkung eines äußeren Permanentmagneten alle in einer Richtung ausrichten. Dadurch wird der ferromagnetische Körper selbst zum Magneten.
- Im allgemeinen verliert ein ferromagnetischer Stoff diese Ausrichtung der Elementarmagnete und damit seine magnetische Wirkung.
- Wenn es gelingt, diese Ausrichtung zu fixieren, hat man einen Permanentmagneten.

Bitte beachten Sie, dass es sich bei diesen Elementarmagneten nur um eine (sehr einfache) Modellvorstellung handelt, aufgrund derer man sich jedoch die oben genannten Eigenschaften erklären kann.

c. Das magnetische Feld. Ausgangspunkt für den Begriff des magnetischen Feldes ist die Kraftwirkung zwischen Magneten. Jeder Magnet übt auf andere Magnete Kräfte aus. Diese kann man sichtbar machen mit Hilfe einer Kompassnadel, die sich entsprechend der Kraftwirkung ausrichtet. Man spricht nun ganz allgemein von einem *magnetischen Feld*, wenn an einer Stelle des Raumes Kräfte auf Magnete (etwa Kompassnadeln) ausgeübt werden:

Ein *magnetisches Feld* ist ein Zustand des Raumes, in dem Kräfte auf Magnete ausgeübt werden.

Man erkennt also ein Feld an seinen (Kraft-) *Wirkungen*. Dabei ist unerheblich, was die Ursache dieser Kraftwirkung ist. Jeder Magnet erzeugt um sich ein magnetisches Feld, denn es werden Kräfte auf andere Magnete ausgeübt. Aber magnetische Felder können auch anders entstehen! Und dies ist der Grund, warum man den Begriff des Feldes vom erzeugenden Magneten trennt.

Man veranschaulicht die Wirkung des Magnetismus durch sog. Feldlinien. Diese kann man sichtbar machen durch Eisenfeilspäne, die sich im Magnetfeld ausrichten. Nimmt man statt der Eisenfeilspäne kleine Kompassnadeln, so kann man auch eine Orientierung für das Feld festlegen. Man vereinbart:

Definition: Die Richtung des magnetischen Feldes ist die Richtung der Kraftwirkung auf den *Nordpol* einer Kompassnadel.

Wir haben in Demonstrationen die magnetischen Feldlinien und ihre Ausrichtung für einen Stab- und einen Hufeisenmagneten gesehen. Dabei orientiert sich der Nordpol der Kompassnadel vom Nordpol des Permanentmagneten weg und zum Südpol hin orientieren. Dies gibt dann gemäß obiger Definition die Richtung des Magnetfeldes an:

Folgerung: Die Richtung des Feldes eines Permanentmagneten verläuft von dessen Nord- zu dessen Südpol.

5. Elektrizität und Magnetismus.

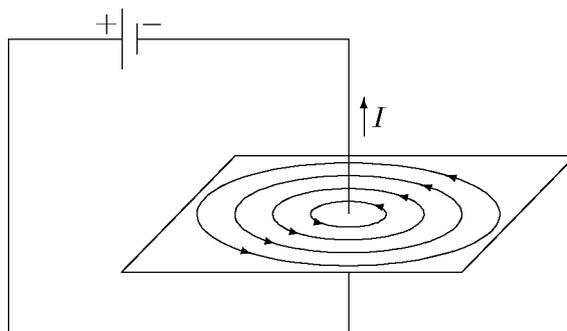
a. Die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes. Im Jahre 1820 entdeckte der dänische Physiker *Oersted*, dass auch elektrischer Strom magnetische Wirkung hat.

Jeder stromdurchflossene Leiter erzeugt um sich ein magnetisches Feld. Die Feldlinien verlaufen in Ebenen senkrecht zum Leiter in konzentrischen Kreisen um den Leiter herum.

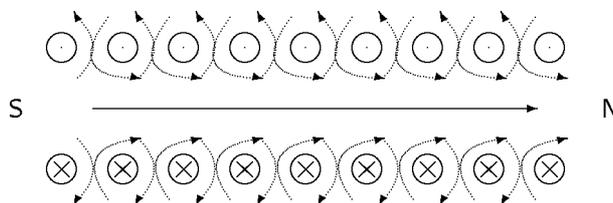
Die Richtung des Feldes wird durch die Rechte-Hand-Regel beschrieben:

Weist der Daumen der rechten Hand in Richtung des Stromes (d. i. die Bewegungsrichtung von positiven Ladungen, also vom Pluspol zum Minuspol), so geben die gekrümmten übrigen Finger die Richtung des Magnetfeldes an.

Die folgende Skizze veranschaulicht dies:



b. Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule. Um die magnetische Wirkung zu verstärken, wickelt man den stromführenden Leiter zu einer Spule zusammen. Das nachfolgende Bild zeigt einen Längsschnitt durch eine solche Spule. Die kleinen Kreise symbolisieren Querschnitte durch den Leiter. Dabei wird die Stromrichtung durch ein Kreuz (in die Zeichenebene hinein) oder durch einen Punkt (aus der Zeichenebene heraus) gekennzeichnet. Dies ist die übliche Kennzeichnung für Vektoren senkrecht zur Zeichenebene; das Kreuz soll einen Pfeil von hinten mit gekreuzten Federn und der Punkt die Spitze des Pfeils symbolisieren.



Die gekrümmten Pfeile kennzeichnen die Feldrichtung des Magnetfeldes für jeden einzelnen Drahtquerschnitt gemäß der auf S. 12 formulierten Rechte-Hand-Regel. Man beachte, dass in den Zwischenräumen zwischen den einzelnen Drähten die Magnetfelder einander entgegengesetzt verlaufen und sich so aufheben. Im Innern der Spule hingegen verlaufen alle Feldlinien in der gleichen Richtung. Dadurch ergibt sich eine Verstärkung des Magnetfeldes in der Richtung des langen Pfeils und an den Enden der Spule entstehen so zwei Pole (Orte stärkster Kraftwirkung). Welcher Art die Pole sind, ergibt sich aus der Richtung des Feldes: Am rechten Ende wird sich eine Kompassnadel gemäß der Feldrichtung von der Spule weg nach außen ausrichten, dort liegt also der Nordpol der Spule. Es gilt also für die magnetischen Pole einer Spule die folgende Regel:

Zeigen die gekrümmten Finger der rechten Hand in die Stromrichtung einer Spule, so gibt der Daumen die Richtung des Magnetfeldes in der Spule an.

Eine stromdurchflossene Spule verhält sich insgesamt wie ein kräftiger Stabmagnet mit den Polen wie soeben beschrieben.

c. Anwendungen. Hier sollen nur kurz einige Anwendungen aufgezählt werden, wie wir sie im Unterricht besprochen haben.

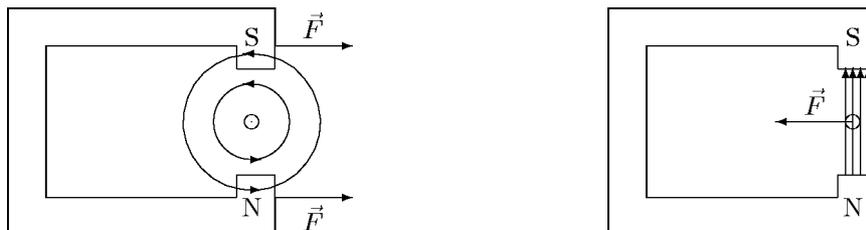
1. Elektromagnet: Mit einer stromdurchflossenen Spule wie oben beschrieben hat man einen *Elektromagneten*. Er ist ein- und ausschaltbar und in seiner Stärke veränderbar. Elektromagnete können benutzt werden, um (selbst schwere) ferromagnetische Stoffe zu heben, wie dies etwa auf Schrottplätzen oder bei der Eisen-/Stahlverarbeitung genutzt wird. Man benutzt Elektromagnete auch zur Herstellung von Permanentmagneten, indem man ferromagnetisches Material erhitzt und beim Erkalten dem Magnetfeld eines starken Elektromagneten aussetzt. In vielen alltäglichen Anwendungen werden Elektromagnete genutzt (Türklingel, Gong, Türöffner, Sicherungsautomaten, Lautsprecher).

2. Drehspulmessgeräte: Man hängt eine *Spule drehbar* in das Magnetfeld eines Permanentmagneten. Drehachse, Spulenchse und die Richtung des Magnetfeldes des *Permanentmagneten* sind jeweils senkrecht zueinander ausgerichtet. Wird nun die Spule von einem Strom durchflossen, so wird sie selbst zu einem Magneten und richtet sich entsprechend der Richtung des äußeren Magnetfeldes aus. Die Drehung der Spule wird durch eine *Rückstellfeder* begrenzt und durch einen *Zeiger* auf einer *Skala* angezeigt. Auf diese Weise kann man Ströme messen.

3. Elektromotor: Der Grundaufbau ist wie beim Messgerät, nur dass hier keine Rückstellfeder die Bewegung begrenzt, sondern dass im Gegenteil durch regelmäßige *Umpolung* des Stromes die Spule sich immer wieder neu ausrichtet und so die Bewegung ständig weitergeht. Man hat so einen *Motor*.

d. Die Lorentzkraft. Die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes bedeutet, dass nicht nur der Leiter Kräfte auf Magnete ausübt, sondern auch umgekehrt Magnetfelder Kräfte auf stromdurchflossene Leiter ausüben. Wir wollen dies etwas genauer untersuchen. Wir betrachten dazu einen Hufeisenmagneten, in dessen Magnetfeld ein Leiter senkrecht zu den Feldlinien verläuft. Der kleine Kreis stellt einen Querschnitt durch den Leiter dar. Dabei wird die Stromrichtung durch einen Punkt gekennzeichnet; dies soll bedeuten, dass der Strom aus der Zeichenebene heraus dem Betrachter entgegenkommt.

Die konzentrischen Kreise im linken Bild geben die Richtung des Magnetfeldes des Leiters an (gemäß der Rechte-Hand-Regel). Dieses Magnetfeld wirkt auf den Hufeisenmagneten, insbesondere auf die beiden Pole. Die Richtung der Kraft ist für den Nordpol gleich der Richtung des Feldes (gemäß der Definition der Feldrichtung), für den Südpol ist die Kraft dem Feld entgegengesetzt. Dadurch hat in beiden Fällen die Kraft dieselbe Richtung (nach rechts).



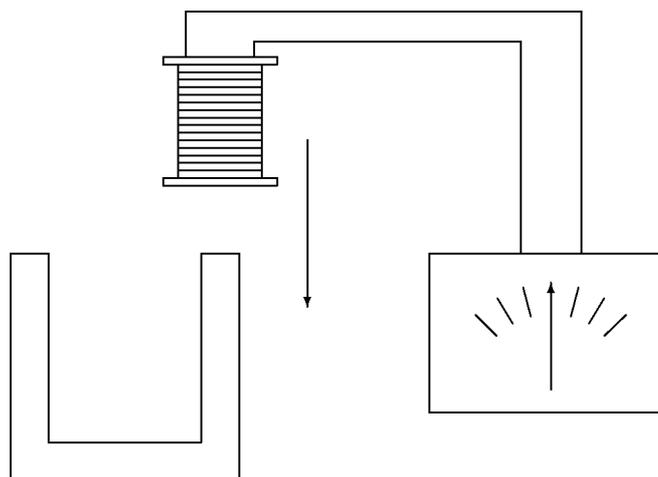
Nach Newtons *actio = reactio*-Prinzip übt nicht nur der Leiter eine Kraft auf den Magneten aus, sondern umgekehrt der Magnet die gleiche, entgegengesetzt gerichtete Kraft auf den Leiter (siehe rechtes Bild). In der rechten Skizze sind nun die Feldlinien des Hufeisenmagneten und die Kraft auf den stromdurchflossenen Leiter sowie die Stromrichtung angegeben. Man erkennt die Gültigkeit der folgenden

Dreifingerregel: In einem Magnetfeld erfährt ein stromdurchflossener Leiter eine Kraft, die sog. *Lorentzkraft*. Diese ist sowohl zum Leiter als auch zum Magnetfeld senkrecht gerichtet. Für ihre Orientierung gilt:
Weist der Daumen der rechten Hand in die Stromrichtung und der Zeigefinger in die Richtung des Magnetfeldes, so gibt der abgespreizte Mittelfinger die Richtung der Kraft an.

Für die soeben beschriebene Lorentzkraft ist der Leiter selbst unwichtig, entscheidend ist der Strom, d. h. die *bewegte Ladung* im Magnetfeld. Auch auf bewegte Ladung außerhalb eines Leiters wirkt die Lorentzkraft (etwa auf einen Strahl von Elektronen im Vakuum, siehe 4. Semester).

e. Bewegung induziert Spannung. Bei den Anwendungen der magnetischen Wirkung des elektrischen Stromes haben wir auch den Elektromotor erwähnt (s. S. 13). Sein Grundprinzip beruhte auf der Tatsache: Fließt durch eine in einem Magnetfeld drehbar aufgehängte Spule ein Strom, so richtet sich die Spule im Magnetfeld aus und dreht sich. In einem Elektromotor wird also elektrischer Strom in Bewegungsenergie umgesetzt.

Es gibt aber auch den entgegengesetzten Vorgang: Bewegungsenergie wird in elektrische Spannung umgewandelt. Wir haben dies in einfacher Weise demonstrieren können. Eine Leiterschleife wird an ein empfindliches Spannungsmessgerät angeschlossen und dann durch das Feld eines Hufeisenmagneten bewegt. Wir beobachteten einen (sehr schwachen) Ausschlag des Messgerätes. Dieser Ausschlag wurde ein wenig verstärkt, wenn man die Leiterschleife in mehrere Windungen zusammenlegte. Ersetzte man die Leiterschleife durch eine Spule mit vielen Windungen und bewegte diese in das Magnetfeld hinein oder heraus, so erhielt man einen beachtlichen Spannungsausschlag. Der Ausschlag war umso stärker, je mehr Windungen die Spule enthielt. Auch durch die Geschwindigkeit konnte man die Spannung erhöhen. Außerdem registrierten wir bei entgegengesetzten Bewegungen (zum Magneten hin oder davon weg) Ausschläge in unterschiedlichen Richtungen, also Spannungen mit entgegengesetztem Vorzeichen.



Dieses Phänomen nennt man *elektromagnetische Induktion*. Die im Messgerät nachgewiesene Spannung ist die sog. *Induktionsspannung*. Diese Induktionsspannung ist proportional zur Windungszahl n der Spule. Dies erklärt sich dadurch, dass eine Spule mit n Windungen eine Reihenschaltung von n Leiterschleifen ist. Dadurch addieren sich die in jeder einzelnen Windung induzierten Spannungen zur Gesamtspannung und diese ist dadurch proportional zur Windungszahl.

Die wichtigste Anwendung der elektromagnetischen Induktion ist der *Generator*, wie er in allen Elektrizitätswerken zur Erzeugung von elektrischer Spannung eingesetzt wird: Durch Drehung einer Spule in einem Magnetfeld wird zwischen den Enden der Spule eine Spannung erzeugt. In einem Generator wird mechanische (Bewegungs-)Energie in elektrische Energie umgewandelt. Dies ist der zum Elektromotor entgegengesetzte Prozess.

Abschließend wollen wir kurz erläutern, dass sich das Phänomen der Induktion auf der Basis der Lorentzkraft erklären lässt. Wir betrachten statt einer Spule eine einfache Leiterschleife und realisieren diese (siehe nachfolgende Skizze) durch einen Leiter, der über Kontaktschienen gleitet. Der bewegte Leiter ist daneben noch einmal vergrößert dargestellt. Die ganze Anordnung befindet sich in einem Magnetfeld. Durch die Bewegung des Leiters werden auch die darin enthaltenen Elektronen bewegt. Also wirkt auf sie die Lorentzkraft, und zwar in der eingezeichneten Richtung (Daumen nach unten in Bewegungsrichtung *positiver* Ladungen, Zeigefinger nach hinten in Richtung des Magnetfeldes, Mittelfinger nach rechts in Richtung der Lorentzkraft). Da in einem Leiter Elektronen frei beweglich sind, verschiebt die Lorentzkraft die Elektronen nach rechts; es erfolgt eine Ladungstrennung und es entsteht eine Spannung mit der angegebenen Polung (rechts $-$, links $+$).

