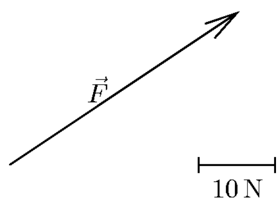
9. Kräfte als Vektoren.

a. Skalare und vektorielle Größen. Eine der grundlegenden Unterscheidungen physikalischer Größen ist die Unterscheidung zwischen *skalaren* und *vektoriellen* Größen. Während eine skalare Größe allein durch Maßzahl und Maßeinheit festgelegt ist, benötigt man für vektorielle Größen *zusätzlich* eine *Richtung* im Raum. Ein herausragendes Beispiel für eine vektorielle Größe ist die Kraft. Entscheidend für die Wirkung einer Kraft ist nicht nur ihre Stärke, sondern auch ihre Richtung. So verstärken sich Kräfte, wenn sie in gleicher Richtung wirken, während entgegengesetzt gerichtete Kräfte sich abschwächen, ja sogar völlig aufheben können.

Solange man nur Kräfte betrachtet, die sich nur in ihrer *Orientierung* unterscheiden, also die *gleiche* oder *entgegengesetzte* Richtung haben, kann man die Wirkung zweier Kräfte rechnerisch (durch Addition oder Subtraktion) ermitteln. Dies haben wir bisher etwa bei der Behandlung der Reibung oder von durch Seile übertragenen Kräften erfolgreich angewendet.

Will man jedoch die Wirkung von zwei Kräften unterschiedlicher Richtung ermitteln, so kommt man nicht mehr mit einfachen 'Zahlenrechnungen' aus, man muss die Kräfte als *Vektoren* behandeln und benötigt *Vektorrechnung.* In vereinfachter Form haben wir dies bereits bei der Bestimmung der Normalkraft an einer schiefen Ebene benutzt, indem wir den Satz des Pythagoras angewendet haben.

Die *Richtung* und *Orientierung* einer Kraft wird durch einen *Pfeil* dargestellt. Ein Pfeil ist gegeben durch einen Anfangs- und einen Endpunkt. Die Gerade durch die beiden Punkte gibt die *Richtung* an, die Festlegung von Anfang und Ende bestimmt die sog. *Orientierung.* Die *Länge* des Pfeils ist ein Maß für die Stärke der Kraft, wobei die Umsetzung der Länge in eine Kraft durch einen *Maßstab* festgelegt wird. Damit ist die Kraft ein *Vektor* im Sinne der Mathematik, festgelegt allein durch *Länge, Richtung* und *Orientierung.*



Insbesondere hat ein Vektor keine bestimmte *Lage* im Raum, vielmehr kann er durch Pfeile an beliebigen Stellen dargestellt werden, wenn diese nur in Länge, Richtung und Orientierung übereinstimmen.

Vektorielle Größen werden in der Physik mit einem über das Symbol gesetzten Pfeil gekennzeichnet: $\vec{F}$ bezeichnet also einen Kraftvektor. Ohne den Pfeil bezeichnet F nur den Betrag des Vektors (die Stärke der Kraft): $F = |\vec{F}|$.[1)]

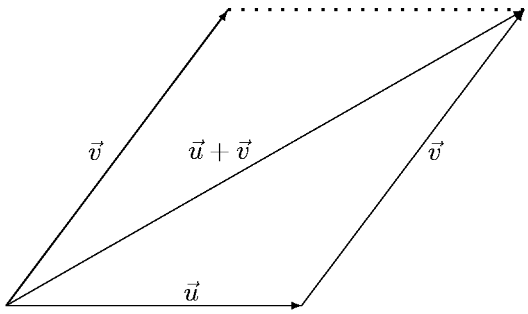
b. Resultierende Kräfte und Vektoraddition. Greifen nun zwei Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ an demselben Massenpunkt an, so bestimmt man die resultierede Kraft $\vec{F}_r$ durch *Vektoraddition:* $F_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Wir wollen diese hier zunächst beschreiben. Warum dies so ist, werden wir erst im Rahmen der Kinematik klären.

1. Geometrische Beschreibung der Vektoraddition:
Zwei Vektoren werden *addiert,* indem man beide als Pfeile mit demselben Anfangspunkt darstellt und zu einem Parallelogramm ergänzt. Die vom gemeinsamen Anfangspunkt beider Vektoren ausgehende Diagonale des Parallelogramms gibt den Summenvektor an.

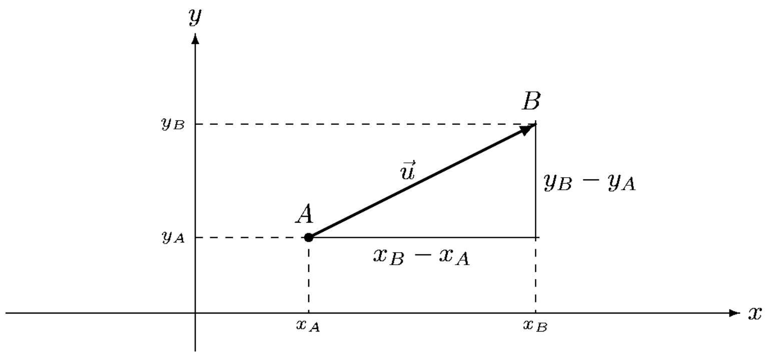
2. Geometrische Beschreibung der Vektoraddition:
Zwei Vektoren werden *addiert,* indem man sie zunächst als Pfeile darstellt, und zwar so, dass der zweite Pfeil am Ende des ersten ansetzt. [Man beachte dabei, dass man Vektoren durch Pfeile an verschiedenen Stellen darstellen kann, wenn nur Länge, Richtung und Orientierung unverändert bleiben.] Verbindet man nun den Anfang des ersten mit dem Ende des zweiten Pfeils, so erhält man den Summenvektor.
Man erkennt, dass die 2. Vorschrift eine Hälfte des unter 1. beschriebenen Parallelogramms darstellt. Diese 2. Beschreibung ist besonders verständlich für ortsbasierte Vektoren wie Ge-

[1)] Diese Art der Bezeichnung ist nicht unproblematisch, denn während im allgemeinen ein Zusatz in der Bezeichnung aus einem Objekt ein wohlbestimmtes neues ableitet (f' die Ableitung von f, a^{-1} das Inverse von a, $-a$ die Gegenzahl von a), ist dies hier nicht der Fall: $\vec{F}$ ist *nicht* durch F eindeutig bestimmt, sondern umgekehrt: F ist als Betrag von $\vec{F}$ durch $\vec{F}$ festgelegt.

schwindigkeit und Beschleunigung.[2)]



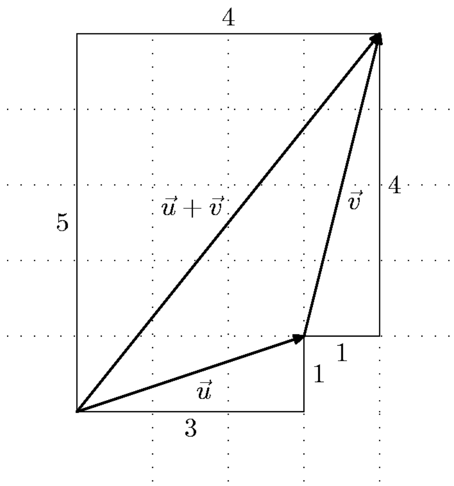
Algebraische Beschreibung der Vektoraddition:
Neben dieser geometrischen Beschreibung ist noch eine algebraische Beschreibung nützlich. Sie setzt ein Koordinatensystem voraus. Dann kann man nicht nur Punkte sondern auch Vektoren durch Koordinaten beschreiben. Ist etwa der Vektor $\vec{u}$ durch einen Pfeil mit Anfangspunkt $A = (x_A, y_A)$ und Endpunkt $B = (x_B, y_B)$ dargestellt, so sind Richtung, Orientierung und Länge des Pfeils, also der Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, eindeutig bestimmt durch die *Koordinaten* $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.



Die Addition von Vektoren, die durch Koordinaten gegeben sind, ist besonders einfach. Die Koordinaten des Summenvektors ergeben sich durch Addition der entsprechenden Koordinaten der Einzelvektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \implies \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}.$$

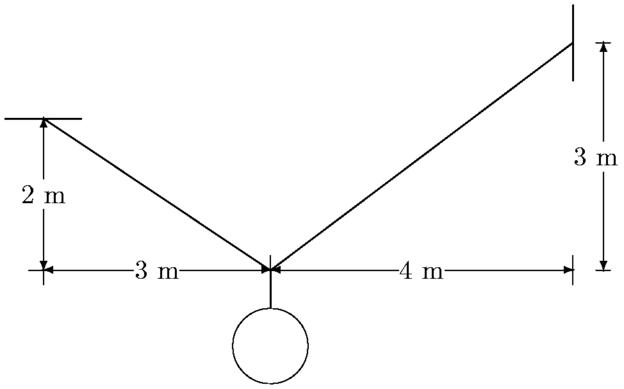
Die nebenstehende Skizze veranschaulicht dies für die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und den Summenvektor $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.



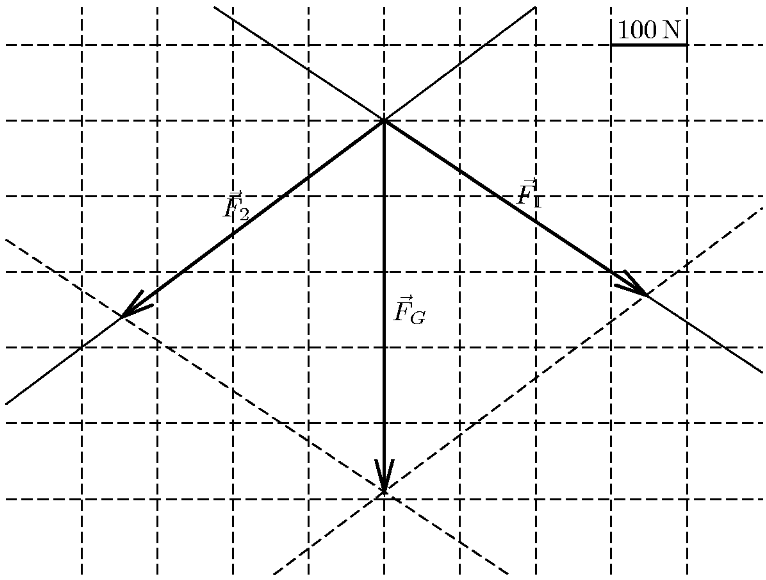
Wir wollen an dem folgenden einfachen Beispiel die verschiedenen Methoden zur vektoriellen Bestimmung von Kräften demonstrieren. Eine Straßenlampe der Masse $m = 50\,\mathrm{kg}$ hängt an zwei

[2)] Darauf aufbauend ist dann wegen der Newton'schen Grundgleichung $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ klar, dass auch Kräfte sich gemäß den Gesetzen der Vektoraddition überlagern.

Seilen wie skizziert. Man bestimme die Kräfte in den Seilen.



1. Zeichnerische Lösung: Man zerlegt die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in zwei Vektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, die die Richtung der Seile haben. Dazu legt man zunächst einen Kraftmaßstab fest (hier werden 100 N durch 1 cm repräsentiert). Man stellt den Vektor der Gewichtskraft $\vec{F}_\mathrm{G}$ durch einen Pfeil dar und zeichnet Geraden durch den Anfangspunkt in Richtung der Seile (die sog. *Wirkungslinien).* Sodann zeichnet man Parallelen zu den Wirkungslinien durch die Spitze des Gewichtsvektors. Ausgehend von $F_\mathrm{G} = mg = 50\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 490{,}5\,\mathrm{N}$ erhält man die nachfolgende Skizze.



Durch Ausmessen bestimmt man die Beträge F_1, F_2 der so ermittelten Kraftvektoren und damit die Belastungen der Seile:

$$F_1 = 420\,\mathrm{N} \quad \text{und} \quad F_2 = 440\,\mathrm{N}$$

2. Vektorrechnung: Die gesuchten Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ sollen die Richtung des jeweiligen Seils haben. Die Seilrichtungen werden durch Richtungsvektoren angegeben, die man aus den Längenangaben entnimmt:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man den Ansatz $\vec{F}_k = r_k \cdot \vec{v}_k$ $(k = 1, 2)$.

Da beide Vektoren den Vektor der Gesamtkraft $\vec{F}_\mathrm{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_\mathrm{G} \end{pmatrix}$ ergeben sollen, muss man folgende Vektorgleichung lösen:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_\mathrm{G} \iff r_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_\mathrm{G} \end{pmatrix}.$$

Mit $F_\text{G} = 490{,}5\,\text{N}$ ergibt dies das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 = -3r_1 + 4r_2 \\ -490{,}5\,\text{N} = 2r_1 + 3r_2 \end{bmatrix}$$

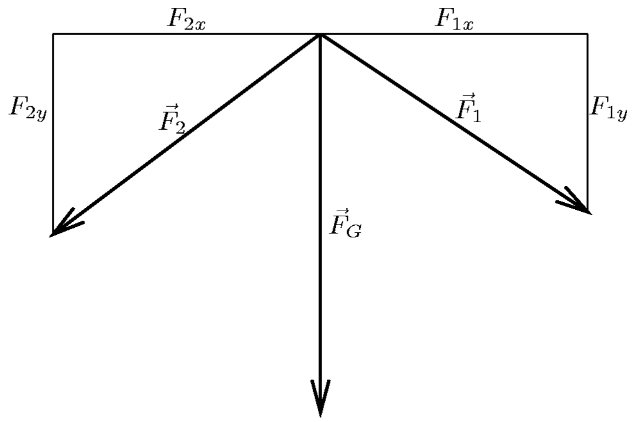
Dieses löst man mit den üblichen Methoden und erhält

$$r_1 = \frac{4}{3} r_2 \ \wedge \ -490{,}5\,\text{N} = \frac{17}{3} r_2 \iff r_2 = -86{,}56\,\text{N} \ \wedge \ r_1 = -115{,}41\,\text{N}\,.$$

Dies ergibt

$$F_1 = |\vec{F}_1| = |r_1| \cdot |\vec{v}_1| = 416{,}12\,\text{N}\,,$$
$$F_2 = |\vec{F}_2| = |r_2| \cdot |\vec{v}_2| = 432{,}79\,\text{N}\,.$$

3. Komponentenzerlegung: Man zerlegt zunächst alle beteiligten Kräfte in Horizontal- und Vertikalkomponenten, die jeweils mit dem Index x für Horizontal und y für Vertikal bezeichnet werden:



Aufgrund der bekannten Richtung der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gilt:

$$\frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \frac{2}{3} \iff F_{1y} = \frac{2}{3} \cdot F_{1x}\,, \quad \text{und genauso } F_{2y} = \frac{3}{4} \cdot F_{2x}\,.$$

Da die Gewichtskraft der Lampe keine Horizontalkomponente hat, müssen die Horizontalkomponenten der Teilkräfte übereinstimmen und die Vertikalkomponenten zusammen die Gewichtskraft F_G ergeben:

$$F_{1x} = F_{2x} \quad \text{und} \quad F_{1y} + F_{2y} = F_\text{G} = 490{,}5\,\text{N}\,.$$

Wir erhalten also die folgende Gleichung für F_{1x}:

$$490{,}5\,\text{N} = \frac{2}{3} F_{1x} + \frac{3}{4} F_{2x} = (\frac{2}{3} + \frac{3}{4}) \cdot F_{1x}$$

und als Ergebnis:

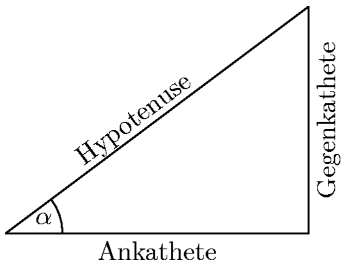
$$F_{2x} = F_{1x} = \frac{12}{17} \cdot F_\text{G} = 346{,}24\,\text{N}\,.$$

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras ergibt dies

$$F_1 = \sqrt{1 + (\frac{2}{3})^2} \cdot F_{1x} = 416{,}12\,\text{N}\,, \quad F_2 = \sqrt{1 + (\frac{3}{4})^2} \cdot F_{2x} = 432{,}79\,\text{N}\,.$$

c. Trigonometrische Funktionen. Wenn die physikalische Situation nicht nur durch Längenangaben, sondern durch Winkel beschrieben wird, benötigt man zusätzlich zu obigen Überlegungen die *trigonometrischen* Funktionen sin, cos, tan, etwa bei der Bestimmung der

Komponenten. Da man dabei mit *spitzen* Winkeln (Winkel zwischen 0^0 und 90^0) auskommt, genügt die folgende Beschreibung dieser Funktionen am rechtwinkligen Dreieck. Sei α ein solcher Winkel. Wir betrachten dann ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel α. In Bezug auf den Winkel α kann man dann die beiden Katheten unterscheiden, die *Ankathete* bildet einen Schenkel des Winkels α, während die *Gegenkathete* dem Winkel α gegenüberliegt:



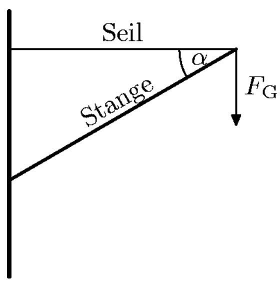
Mit diesen Bezeichnungen definiert man dann den

$$
\begin{aligned}
\text{Sinus}: \quad & \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\,, \\
\text{Cosinus}: \quad & \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\,, \\
\text{Tangens}: \quad & \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\,,
\end{aligned}
$$

wobei jeweils die *Längen* der angegebenen Dreiecksseiten gemeint sind. Die so definierten Werte sind *nicht* von der Größe des gewählten rechtwinkligen Dreiecks abhängig, da in Dreiecken mit übereinstimmenden Winkeln nach dem Strahlensatz auch die Seitenverhältnisse übereinstimmen (die Dreiecke sind ähnlich). Ergänzend legt man fest,[1)] dass $\sin 0^0 = \tan 0^0 = 0$ und $\cos 0^0 = 1$ ist.

Nun sind die obigen geometrischen Definitionen der trigonometrischen Funktionen nur insoweit nützlich, als man sie auch tatsächlich berechnen kann. Zunächst kann man nur für einige spezielle Winkel (30^0, 45^0 und 60^0) mit elementargeometrischen Überlegungen die entsprechenden Werte herleiten, allgemein benötigt man den Taschenrechner. Der Weg von obiger Definition der trigonometrischen Funktionen zu einer Beschreibung, die die Berechnung beliebiger Werte möglich macht, erfordert wesentliche Teile der Differentialrechnung und kann eines der Themen im Rahmen der Mathematik-Ausbildung des zweiten Semesters hier am Studienkolleg sein. Wir setzen im folgenden die vollständige Berechenbarkeit der trigonometrischen Funktionen voraus.

Als Beispiel betrachten wir die folgende Situation: An einer Hauswand ist eine Lampe an der Spitze eines *Auslegers* befestigt. Der Ausleger besteht aus einer am Haus befestigten und von einem Seil gehaltenen Stange. Das Seil verlaufe genau horizontal und der Winkel zwischen Stange und Seil sei $\alpha = 30^0$. Wir wollen die Belastung von Seil und Stange bei einem Gewicht $F_G = 500\,\text{N}$ der Lampe ermitteln.



Sei $\vec{F}_1$ die Belastung des Seils und $\vec{F}_2$ die Belastung der Stange. Dann gilt für die Komponenten von $\vec{F}_2$:

$$\frac{F_{2,y}}{F_2} = \sin 30^0 \iff F_{2,y} = F_2 \cdot \sin 30^0\,, \quad \frac{F_{2,x}}{F_2} = \cos 30^0 \iff F_{2,x} = F_2 \cdot \cos 30^0\,.$$

Da das Seil horizontal verläuft, hat $\vec{F}_1$ keine Vertikalkomponente und aus $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_G$ folgt zunächst

$$F_{2,y} = F_G = 500\,\text{N} \iff F_2 = \frac{F_{2,y}}{\sin 30^0} = \frac{500\,\text{N}}{\frac{1}{2}} = 1000\,\text{N}\,.$$

[1)] Diese Festlegung ergibt sich aus der umfassenderen Beschreibung der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis, wodurch sie für beliebige Winkel definiert werden.

Für die Horizontalkomponente $F_{2,x}$ von $\vec{F}_2$ bedeutet dies:

$$F_{2,x} = F_2 \cdot \cos 30^0 = 1000\,\mathrm{N} \cdot \cos 30^0 = 866{,}03\,\mathrm{N}\,.$$

Da $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_\mathrm{G}$ keine Horizontalkomponente besitzt, stimmen $F_{1,x}$ und $F_{2,x}$ betraglich überein und es folgt

$$F_1 = |F_{1,x}| = F_{2,x} = 866{,}03\,\mathrm{N}\,.$$