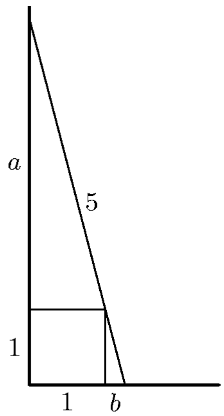
Das Leiterproblem (vorgestellt von Darius Hundenborn)

Aufgabe: Vor einer Wand steht ein 1 m hohes und 1 m tiefes Hindernis. Eine 5 m lange Leiter soll an die Wand gelehnt werden. Bis zu welcher Höhe reicht die Leiter maximal hinauf?

Lösung 1: (Jeanette Ehrke)



Mit den Bezeichnungen der Skizze ist $a+1$ gesucht. Die Größen a und b sind unbekannt, müssen aber positiv sein. Sie müssen die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \text{Satz des Pythagoras:} \quad & (a+1)^2 + (b+1)^2 = 5^2\,, \\ \text{Strahlensatz/ähnliche Dreiecke:} \quad & \frac{a}{1} = \frac{1}{b}\,. \end{aligned}$$

Mit der zweiten Beziehung kann man a eliminieren: $a = \frac{1}{b}$ und erhält:

$$\begin{aligned} 25 &= (a+1)^2 + (b+1)^2 = (\frac{1}{b}+1)^2 + (b+1)^2 = (\frac{1}{b})^2 + \frac{2}{b} + 1 + b^2 + 2b + 1 \\ &= b^2 + 2 + (\frac{1}{b})^2 + 2b + \frac{2}{b} = (b+\frac{1}{b})^2 + 2(b+\frac{1}{b}) \end{aligned}$$

Durch diese (äußerst trickreiche) Umformung in der letzten Zeile wird die Substitution $z = b + \frac{1}{b}$ möglich und man erhält eine quadratische Gleichung in z:

$$25 = z^2 + 2z \iff 26 = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2 \iff z + 1 = \pm\sqrt{26} \iff z = -1 \pm \sqrt{26}\,.$$

Anschließend muss noch die Substitution nach b aufgelöst werden:

$$b + \frac{1}{b} = z \iff b^2 + 1 = zb \iff b^2 - zb + 1 = 0\,.$$

Nach Lösung dieser quadratischen Gleichung erhält man b, daraus $a = \frac{1}{b}$. Der größte gefundene Wert für $a+1$ ist die gesuchte Höhe (Details siehe Lösung 2, 4. Schritt, siehe dort auch den Zusammenhang zwischen a und b).