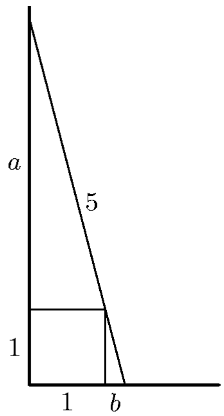
Das Leiterproblem (vorgestellt von Darius Hundenborn)

Aufgabe: Vor einer Wand steht ein 1 m hohes und 1 m tiefes Hindernis. Eine 5 m lange Leiter soll an die Wand gelehnt werden. Bis zu welcher Höhe reicht die Leiter maximal hinauf?

Lösung 1: (Jeanette Ehrke)



Mit den Bezeichnungen der Skizze ist $a+1$ gesucht. Die Größen a und b sind unbekannt, müssen aber positiv sein. Sie müssen die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \text{Satz des Pythagoras:} \quad & (a+1)^2 + (b+1)^2 = 5^2\,, \\ \text{Strahlensatz/ähnliche Dreiecke:} \quad & \frac{a}{1} = \frac{1}{b}\,. \end{aligned}$$

Mit der zweiten Beziehung kann man a eliminieren: $a = \frac{1}{b}$ und erhält:

$$\begin{aligned} 25 &= (a+1)^2 + (b+1)^2 = (\frac{1}{b}+1)^2 + (b+1)^2 = (\frac{1}{b})^2 + \frac{2}{b} + 1 + b^2 + 2b + 1 \\ &= b^2 + 2 + (\frac{1}{b})^2 + 2b + \frac{2}{b} = (b+\frac{1}{b})^2 + 2(b+\frac{1}{b}) \end{aligned}$$

Durch diese (äußerst trickreiche) Umformung in der letzten Zeile wird die Substitution $z = b + \frac{1}{b}$ möglich und man erhält eine quadratische Gleichung in z:

$$25 = z^2 + 2z \iff 26 = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2 \iff z+1 = \pm\sqrt{26} \iff z = -1 \pm \sqrt{26}\,.$$

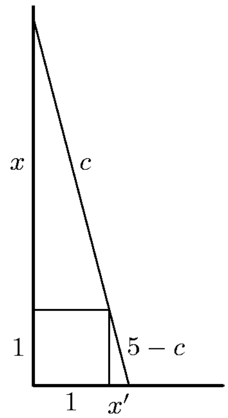
Anschließend muss noch die Substitution nach b aufgelöst werden:

$$b + \frac{1}{b} = z \iff b^2 + 1 = zb \iff b^2 - zb + 1 = 0\,.$$

Nach Lösung dieser quadratischen Gleichung erhält man b, daraus $a = \frac{1}{b}$. Der größte gefundene Wert für $a+1$ ist die gesuchte Höhe (Details siehe Lösung 2, 4. Schritt, siehe dort auch den Zusammenhang zwischen a und b).

Lösung 2: (leider nicht so elegant, eher eine systematische Arbeitslösung)

1. Die Gleichung: Damit die Leiter möglichst weit hinauf reicht, muss sie das Hindernis berühren, wie in nebenstehender Skizze dargestellt.
Die Skizze enthält auch bereits die im folgenden benutzten Bezeichnungen:
c ist die Hypotenuse und x die unbekannte Kathete des oberen rechtwinkligen Dreiecks. Die gesuchte Höhe ist daher $x + 1$.
Aufgrund des Strahlensatzes sind die folgenden Verhältnisse gleich:



$$\frac{x}{c} = \frac{x+1}{5}$$

Zusammen mit dem Satz des Pythagoras $x^2 + 1 = c^2$ erhalten wir die folgende Gleichung für x:

$$\frac{x}{c} = \frac{x+1}{5} \iff \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+1}{5}\,.$$

Mit Standardumformungen (man beachte, dass alle Größen positiv sind, so dass Quadrieren eine Äquivalenzumformung ist) erhalten wir daraus eine Gleichung 4. Grades für x:

$$5x = \sqrt{x^2+1}\cdot(x+1) \iff 25x^2 = (x^2+1)(x+1)^2 = (x^2+1)(x^2+2x+1)$$
$$\iff 25x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \iff x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 2x + 1 = 0\,.$$

Auf den ersten Blick, scheint eine exakte Lösung dieser Gleichung 4. Grades mit den uns bekannten Mitteln nicht möglich. (Es gibt zwar bis zum Grad 4 allgemeine Auflösungsformeln für Polynomgleichungen, diese werden aber üblicherweise im Schulunterricht nicht behandelt.) Eine Näherungslösung (etwa durch Intervallschachtelungen wie Halbierungs- oder Newtonverfahren) ist im Prinzip immer möglich; wir werden darauf später zu sprechen kommen.

2. Symmetrie: Ein Ansatzpunkt zu einer exakten Lösung des Problems liegt in der Symmetrie der Problemstellung. Vertauscht man in obiger Skizze Wand und Fußboden, so erhält man eine zweite Lösung (bereits als x' in obiger Skizze bezeichnet).
Der Zusammenhang zwischen beiden Lösungen ergibt sich aus der Ähnlichkeit (Winkelgleichheit) der beiden rechtwinkligen Dreiecke:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x'} \iff x' = \frac{1}{x}\,.$$

Mit anderen Worten: Ist x eine Lösung obiger Gleichung, so auch $\frac{1}{x}$.
(Anmerkung: Diese Tatsache ergibt sich auch rein algebraisch aus der Symmetrie der Koeffizienten (1, 2, −23, 2, 1) der Polynomgleichung. Dies bedeutet: Die nachfolgenden Überlegungen erlauben es, alle in diesem Sinne symmetrischen Gleichungen 4. Grades zu lösen.)

3. Die Faktorisierung: Wir gehen von einer Lösung a der Gleichung aus. Dann ist auch $\frac{1}{a}$ eine Lösung und aus der Polynomgleichung lassen sich die zugehörigen Linearfaktoren abspalten:

$$(x-a)(x-\frac{1}{a}) = x^2 - (a+\frac{1}{a})x + 1 =: x^2 + Ax + 1 \quad \text{mit } A = -(a+\frac{1}{a})\,.$$

Also gibt es eine Faktorisierung wie folgt

$$x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 2x + 1 = (x^2 + Ax + 1)q(x)\,,\ \ q(x) \text{ quadratisch}\,.$$

Durch Vergleich der führenden bzw. absoluten Koeffizienten folgt, dass $q(x) = x^2 + Bx + 1$ ist; nur der mittlere Koeffizient B ist unbekannt.
Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhält man:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 2x + 1 &= (x^2 + Ax + 1)(x^2 + Bx + 1) \\ &= x^4 + (A+B)x^3 + (AB+2)x^2 + (A+B)x + 1 \end{aligned}$$
$$\iff A + B = 2 \ \wedge\ AB + 2 = -23 \iff A + B = 2 \ \wedge\ AB = -25\,.$$

Dies sind zwei Gleichungen für A, B, die auf eine quadratische Gleichung für A führen. Mit $B = 2 - A$ erhält man nämlich

$$\begin{aligned} & AB = -25 \iff A(2-A) = -25 \iff A^2 - 2A - 25 = 0 \\ & \iff A = 1 \pm \sqrt{1+25} = 1 \pm \sqrt{26}\,. \end{aligned}$$

Wegen $a > 0$ ist $A = -(a + \frac{1}{a}) < 0$, also muss $A = 1 - \sqrt{26}$ sein.

4. Die Lösung: Nun lösen wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & a + \frac{1}{a} = -A \iff a^2 + 1 = -Aa \iff a^2 + Aa + 1 = 0 \\ & \iff a = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - 1} = -\frac{A}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4}\,. \end{aligned}$$

Setzt man obige Werte für A ein, so ergibt sich

$$A^2 - 4 = (1-\sqrt{26})^2 - 4 = 1 - 2\sqrt{26} + 26 - 4 = 23 - 2\sqrt{26}$$

und folglich

$$a = \frac{1}{2} \cdot \Big(-A + \sqrt{A^2 - 4}\Big) = \frac{1}{2} \cdot \Big(-1 + \sqrt{26} \pm \sqrt{23 - 2\sqrt{26}}\Big)$$

mit den Näherungslösungen

$$a_+ \approx 3{,}838501\,, \quad a_- \approx 0{,}260518\,.$$

Da nach der größten Höhe gefragt ist, ist $a_+ + 1 \approx 4{,}838501$ der gesuchte Wert.

5. Verallgemeinerung: Nachdem das Problem erfolgreich gelöst wurde, drängt sich natürlich die Frage auf, was gilt allgemein, d. h. für eine Leiter der Länge l (statt 5 m) und andere Maße des Hindernisses (Höhe h und Tiefe t)?
Wenn $h = t$ ist, sollte derselbe Weg gangbar sein. Im Falle $h \neq t$ entfällt das Symmetrieargument. Die Gleichung 4. Grades sollte man dann ebenso aufstellen können, aber dann ... ?