Übungen (1)

1) Dividieren Sie den Polynomterm $f(x)$ durch $g(x)$ mit Rest, d. h. bestimmen Sie Polynomterme $q(x)$ und $r(x)$ mit $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ und Grad von $r(x) <$ Grad von $g(x)$:
   a) $f(x) = x^6 - 1$, $g(x) = x^2 + 1$,
   b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$, $g(x) = x^2 + x + 1$,
   c) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1$, $g(x) = 2x^2 + 1$.
2) Entscheiden Sie – mit möglichst wenig Rechenaufwand –, welche der Zahlen -2, 2, 7, 10 Nullstellen der folgenden ganzrationalen Funktionen f sind:
   a) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1505$,
   b) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 3x - 78$,
   c) $f(x) = \frac{x^4}{10} + \frac{x^3}{5} + x - 315{,}7$,
   d) $f(x) = \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x - 12$.
   Wenn Nullstellen vorliegen, so spalten Sie bitte die entsprechenden Linearfaktoren ab. [Überlegen Sie sich, wie Sie bei mehreren Nullstellen den Rechenaufwand möglichst gering halten können.]
3) Bestimmen Sie *alle* Nullstellen der Funktionen f mit den folgenden Funktionstermen:
   a) $f(x) = x^3 - 2{,}5x^2 - x + 2{,}5$,
   b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + x - 1$,
   c) $f(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}3x^2 - 1{,}2x - 0{,}7$.
   Entscheiden Sie für jede Nullstelle, ob ein Vorzeichenwechsel vorliegt.
4) Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen mit ihren Nullstellenordnungen sowie die Vorzeichenverteilung der Funktionen f mit den folgenden Funktionstermen:
   a) $f(x) = (x + 2)^2(x^2 + 2)(x^2 - 2)$,
   b) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3$.
   Schraffieren Sie möglichst große Bereiche der Koordinatenebene, in denen der Graph von f *nicht* verlaufen kann.
5) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
   a) $x^6 - 1 = 2x^2$,
   b) $x^6 = 2x^3 + 4$,
   c) $x^2(x^3 + 2x^2 + 2x + 4) = 2x + 4$.

Übungen (1) — Lösungen

1) a) $x^6 - 1 = (x^4 - x^2 + 1)(x^2 + 1) - 2$, also $q(x) = x^4 - x^2 + 1$, $r(x) = -2$.
b) $x^4 - 3x^3 + 2x = (x^2 - 4x + 3)(x^2 + x + 1) + 3x - 3$.
c) $2x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x + 1)(2x^2 + 1)$; insbesondere also $r(x) = 0$.

2) Wir benutzen den Satz über die möglichen rationalen Nullstellen eines ganzzahligen Polynomterms: Eine ganze Zahl a (hier ± 2, 7 oder 10) kann nur dann Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen (!) Koeffizienten sein, wenn sie das sog. absolute Glied a_0 des Polynoms teilt.
a) f hat ganzzahlige Koeffizienten! ± 2 und 10 sind offensichtlich keine Teiler von 1505, also auch keine Nullstellen von f. 7 ist Teiler von 1505 ($= 215 \cdot 7$), kommt also als Nullstelle in Frage. Einsetzen und Ausrechnen ergibt tatsächlich $f(7) = 0$.
Der entsprechende Linearfaktor ist $x - 7$. Mittels Polynomdivision folgt $4x^3 + 2x^2 + 5x - 1505 = (x - 7) \cdot (4x^2 + 30x + 215)$.
b) Auch dieser Polynomterm $f(x)$ hat ganzzahlige Koeffizienten. 7 und 10 sind keine Teiler von 78, also auch keine Nullstellen von f. Wir müssen ± 2 einsetzen und erhalten $f(2) = 16 - 6 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 78 = -46 \neq 0$, aber $f(-2) = 16 + 48 + 8 + 6 - 78 = 0$.
Der zur Nullstelle -2 gehörige Linearfaktor ist $x + 2$. Polynomdivision ergibt $x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 3x - 78 = (x + 2)(x^3 - 8x^2 + 18x - 39)$.
c) Dieser Polynomterm hat keine ganzzahligen Koeffizienten. Daher muss man zunächst die Nenner 'beseitigen', indem man mit dem Hauptnenner 10 multipliziert: Man betrachtet statt des Polynoms $f(x)$ den Polynomterm

$$g(x) = 10 \cdot f(x) = 10 \cdot \Big(\frac{x^4}{10} + \frac{x^3}{5} + x - 315{,}7\Big) = x^4 + 2x^3 + 10x - 3157\,.$$

mit ganzzahligen (!) Koeffizienten. Dieser hat natürlich dieselben Nullstellen wie f. Sein absolutes Glied 3157 ist weder durch ± 2 noch durch 10 teilbar, wohl aber durch 7. Damit kommt lediglich 7 als Nullstelle in Frage, und in der Tat ist $g(7) = 0$, also auch $f(7) = \frac{1}{10} \cdot g(7) = 0$.
Der entsprechende Linearfaktor ist $x - 7$ und man erhält durch Polynomdivision $g(x) = x^4 + 2x^3 + 10x - 3157 = (x - 7)(x^3 + 9x^2 + 63x + 451)$. Für das gegebene $f(x)$ bedeutet dies also (den Faktor 1/10 nicht vergessen!)

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot g(x) = \frac{1}{10} \cdot (x - 7) \cdot (x^3 + 9x^2 + 63x + 451)\,.$$

d) Hier muss man ebenfalls zuerst mit 2 multiplizieren und dann den Term $g(x) = 2f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x - 24$ untersuchen. 7 und 10 sind keine Teiler von 24 und scheiden daher sofort als Nullstellen aus. $+2$ und -2 hingegen sind tatsächlich Nullstellen:

$$g(\pm 2) = \pm 8 + 24 \mp 8 - 24 = \pm 8 \mp 8 = 0\,.$$

Die entsprechenden Linearfaktoren sind $x - 2$ und $x + 2$. [Durch zweimalige Polynomdivision könnte man diese abspalten: $g(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 8x + 12)$ und $x^2 + 8x + 12 = (x + 2) \cdot (x + 6)$. Dies ergibt insgesamt $g(x) = (x - 2)(x + 2) \cdot (x + 6)$.] Günstiger ist es hingegen, direkt die Polynomdivision durch $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$

durchzuführen: Dies ergibt mit viel geringerem Rechenaufwand natürlich dasselbe Ergebnis $g(x) = x^3 + 6x^2 - 4x - 24 = (x^2 - 4) \cdot (x + 6) = (x - 2)(x + 2)(x + 6)$. Damit hat man schließlich eine vollständige Zerlegung des Polynoms $f(x)$ in Linearfaktoren erreicht:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot g(x) = \frac{1}{2}(x + 2)(x - 2)(x + 6)\,,$$

aus der man *alle* Nullstellen von f ablesen kann: -2, $+2$ und -6.

3) Durch Einsetzen von ± 1 in die gegebenen Funktionen stellt man unmittelbar fest:
a) $+1$ und -1 sind Nullstellen,
b) $+1$ ist Nullstelle,
c) -1 ist Nullstelle.
Man spaltet nun die jeweiligen Linearfaktoren ab:
Im Falle a) spaltet man (mittels Polynomdivision durch $x^2 - 1$) beide Faktoren in einem Schritt ab und erhält

$$f(x) = x^3 - 2{,}5x - x + 2{,}5 = (x^2 - 1)(x - 2{,}5) = (x - 1)(x + 1)(x - 2{,}5).$$

Man liest nun alle Nullstellen von f ab: $+1$, -1 und 2,5.
b) Hier ergibt die Polynomdivision

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - x^2 + 3x - 3) = \frac{1}{3}(x - 1)(x^2 + 3).$$

Da $x^2 + 3$ keine Nullstelle hat, ist $+1$ die einzige Nullstelle von f.
c) Hier erhält man bei Polynomdivision durch $x + 1$

$$f(x) = 0{,}1 \cdot (2x^3 - 3x^2 - 12x - 7) = 0{,}1 \cdot (x+1) \cdot (2x^2 - 5x - 7) = 0{,}2 \cdot (x + 19 \cdot (x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}\,.$$

Die Nullstellen des quadratischen Faktors $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$ kann man nun mit der p,q-Formel berechnen. Ergebnis: -1 und $\frac{7}{2}$.
[Man sieht aber auch unmittelbar, dass -1 Nullstelle auch dieses quadratischen Terms $2x^2 - 5x - 7$ ist, und daher nochmals $x + 1$ abgespalten werden kann: $2x^2 - 5x - 7 = (x+1)(2x-7)$. Dies ergibt insgesamt $f(x) = 0{,}1 \cdot (x+1) \cdot (x+1)(2x-7) = 0{,}2 \cdot (x + 1)^2(x - \frac{7}{2})$, woraus man wiederum die Nullstellen von f abliest: -1, und $\frac{7}{2}$.]

4) Im ersten Schritt bestimmen wir alle Nullstellen und die zugehörige Zerlegung von $f(x)$ in Faktoren:
a) In diesem Falle ist dies einfach, da der Funktionsterm $f(x)$ schon in einfache Faktoren zerlegt ist. Indem man noch $x^2 - 2$ nach der dritten binomischen Formel zerlegt, erhält man

$$f(x) = (x + 2)^2(x^2 + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = (x + 2)^2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 2)\,.$$

Da $x^2 + 2$ keine Nullstellen besitzt (p,q Formel, oder man bemerkt $x^2 + 2 \geq 2$ für alle x), kann man aus dieser Zerlegung sämtliche Nullstellen von f ablesen:
Die Funktion f hat die Nullstellen -2 (mit der Vielfachheit 2, also ohne Vorzeichenwechsel), $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ (jeweils mit der Vielfachheit 1, also mit Vorzeichenwechsel),

und sonst keine.
Da der führende Koeffizient von $f(x)$ gerade 1, also insbesondere positiv ist, gilt $f(x) > 0$ für x größer als alle Nullstellen, also für $x > \sqrt{2}$. Da nur bei $\pm\sqrt{2}$ Vorzeichenwechsel stattfinden, erhalten wir die folgende Vorzeichenverteilung von f:

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > \sqrt{2}, \\ < 0 & \text{für } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \\ > 0 & \text{für } -2 < x < -\sqrt{2}, \\ > 0 & \text{für } x < -2. \end{cases}$$

Im Falle b) muss man zunächst alle Nullstellen bestimmen. Als *ganzzahlige* Nullstellen kommen nur die Teiler von 3 in Frage (± 1, ± 3). Man findet (durch Ausprobieren), dass $+1$ eine Nullstelle ist. Mittels Polynomdivision erhält man

$$(x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3) : (x - 1) = x^3 - x^2 - 3x + 3.$$

Der gefundene Teiler hat $+1$ erneut als Nullstelle. Erneutes Abspalten des Linearfaktors $x - 1$ ergibt

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3 = (x-1)(x^3 - x^2 - 3x + 3) = (x-1)(x-1)(x^2 - 3)$$

und damit schließlich

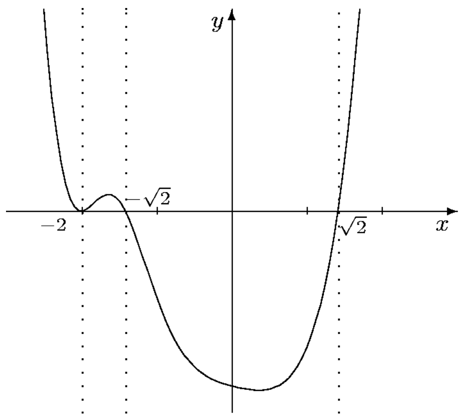
$$f(x) = (x + \sqrt{3})(x - 1)^2(x - \sqrt{3}),$$

woraus man die Nullstellen von f und ihre Vielfachheiten abliest:
Die Nullstellen von f sind $-\sqrt{3}$ und $+\sqrt{3}$ (jeweils mit der Vielfachheit 1, also mit Vorzeichenwechsel) und $+1$ (mit der Vielfachheit 2, also ohne Vorzeichenwechsel).
Wegen $f(x) > 0$ für $x > \sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$ ist die größte Nullstelle und der führende Koeffizient von $f(x)$ ist 1, also positiv) erhält man die Vorzeichenverteilung für f:

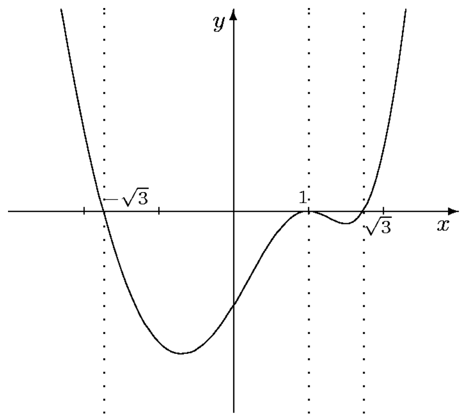
$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > \sqrt{3}, \\ < 0 & \text{für } 1 < x < \sqrt{3}, \\ < 0 & \text{für } -\sqrt{3} < x < 1, \\ > 0 & \text{für } x < -\sqrt{3}. \end{cases}$$

In den folgenden Skizzen sind Graphen eingezeichnet, die diese Vorzeichenverteilung haben. *Dies sind nicht die genauen Graphen der Funktionen; sie verdeutlichen lediglich die Vorzeichenverteilung. Daher ist auch auf der y-Achse keine Einheit angegeben.* Schraffieren Sie selbst die Bereiche, in denen der Graph auf keinen Fall verlaufen kann.

a)



b)



5) Polynomgleichungen der Form $g(x) = h(x)$ sind natürlich äquivalent zur Gleichung $g(x) - h(x) = 0$; es gilt also wiederum Nullstellen zu berechnen, und zwar von der ganzrationalen Funktion f gegeben durch $f(x) = g(x) - h(x)$.
a) $f(x) = x^6 - 2x^2 - 1$. Hier ist Substitution möglich: $w = x^2$. Dies führt dann auf die Polynomgleichung $w^3 - 2w - 1 = 0$. Diese hat -1 als Nullstelle. Polyomdivision ergibt $w^3 - 2w - 1 = (w+1)(w^2 - w - 1)$. Die verbleibende quadratische Gleichung $w^2 - w - 1 = 0$ löst man wie üblich und erhält als Lösungen $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Fasst man alles zusammen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} x^6 - 1 = 2x^2 &\iff x^6 - 2x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = w \ \wedge \ w^3 - 2w - 1 = 0 \\ &\iff x^2 = w \ \wedge \ (w = -1 \vee w = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})) \\ &\iff x^2 = -1 \ \vee \ x^2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \\ &\iff x^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \qquad (-1 < 0, \ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) < 0!) \\ &\iff x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

b) $f(x) = x^6 - 2x^3 - 4 = 0$. Substitution $x^3 = w$ führt auf die Polynomgleichung $w^2 - 2w - 4 = 0$ mit den Lösungen $1 \pm \sqrt{5}$. Dies ergibt die Gleichungen $x^3 = 1 \pm \sqrt{5}$ mit jeweils nur einer Lösung $x = \sqrt[3]{1 \pm \sqrt{5}}$:

$$\mathbb{L} = \{ \sqrt[3]{1 + \sqrt{5}}, \ \sqrt[3]{1 - \sqrt{5}} \}.$$

c) $f(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$. -2 ist eine Nullstelle von f. Abspalten des Linearfaktors $x + 2$ führt auf die Polynomgleichung $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ und die Substitution $x^2 = w$ reduziert dies auf die quadratische Gleichung $w^2 + 2w - 2 = 0$. Diese hat die Lösungen $w = -1 \pm \sqrt{3}$. Man muss also nun die Gleichungen $x^2 = -1 \pm \sqrt{3}$ lösen. Wegen $-1 - \sqrt{3} < 0$ ist nur $x^2 = -1 + \sqrt{3}$ lösbar; Lösungen $\pm\sqrt{-1 + \sqrt{3}}$. Insgesamt ist die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung:

$$\mathbb{L} = \{ -2, \sqrt{-1 + \sqrt{3}}, -\sqrt{-1 + \sqrt{3}} \} \ .$$