

## Übungen (4)

- 1) Bestimmen Sie alle stationären Stellen der nachfolgenden Funktionen. Entscheiden Sie, welche davon Extremstellen sind und welcher Art diese sind.
  - a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3$ ,
  - b)  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x - 1$ ,
  - c)  $f(x) = x^4 - 4x^2 - 16x + 17$ ,
  - d)  $f(x) = 3x^5 - 10x^3 - 45x + \frac{4}{7}$ ,
  - e)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{x}$ ,
  - f)  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ .Weitere Aufgaben: Lehrbuch, S. 86.
- 2) Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen und skizzieren Sie ihre Graphen.
  - a)  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$
  - b)  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$
  - c)  $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 27$
  - d)  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3$
  - e)  $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 90x$Weitere Aufgaben: Lehrbuch, S. 95/96.
- 3) Es sei  $f(x) = x^3 - x + 1$ .
  - a) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle und Extrema von  $f$ .
  - b) Zeigen Sie damit, dass  $f$  nur eine Nullstelle hat.
  - c) Bestimmen Sie den größten und kleinsten Funktionswert von  $f$  über dem Intervall  $I = [-\frac{1}{2}, 1]$ .
- 4) Berechnen Sie die Ableitungsfunktionen aller rationalen Funktionen von Übungsblatt (2).
- 5) Untersuchen Sie die rationalen Funktionen von Übung (2), Aufgabe 1) a-c sowie Aufgabe 2 b,c auf Monotonie und Krümmungsverhalten. Bestimmen Sie alle Extrem- und Wendepunkte und entscheiden Sie, welcher Art die Extrempunkte sind.

## Übungen (4) — Lösungen

- 1) a)  $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$  hat die Nullstellen 0 und +2. Damit sind 0 und +2 die beiden einzigen stationären Stellen von  $f$ . Da beide Nullstellen von  $f'$  einfach sind, also dort jeweils ein VZW von  $f'$  vorliegt, sind beide Stellen Extremstellen von  $f$ . Da  $f'(x)$  (wie  $f(x)$ ) einen positiven führenden Koeffizienten hat, ist  $f'(x)$  schließlich positiv, also  $f$  schließlich monoton steigend. Damit muss die letzte Extremstelle +2 eine Minimalstelle sein und 0 eine Maximumstelle.
- b)  $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 = 3(x^2 + 4x + 4) = 3(x + 2)^2$  hat nur die Nullstelle  $-2$ . Dies ist die einzige stationäre Stelle von  $f$ . Wegen  $f'(x) = 3(x + 2)^2 \geq 0$  für alle  $x$  ist  $f$  stets monoton steigend,  $f$  besitzt also kein Extremum:  $-2$  ist stationäre Stelle, aber nicht Extremstelle von  $f$ ;  $-2$  ist Sattelstelle von  $f$ .
- c)  $f'(x) = 4x^3 - 8x - 16 = 4(x^3 - 2x - 4)$ . Einzig mögliche *rationale* Nullstellen von  $f'$  sind die Teiler von 4; es ist  $f'(2) = 0$ . Polynomdivision durch  $x - 2$  ergibt  $f'(x) = 4(x - 2)(x^2 + 2x + 2)$ . Da  $x^2 + 2x + 2$  keine Nullstellen mehr hat, folgt: +2 ist einzige und einfache Nullstelle von  $f'$ , also einzige stationäre Stelle und Extremstelle von  $f$ . Wie bei a) begründet man, dass +2 Minimalstelle von  $f$  ist.
- d) Es ist  $f'(x) = 15x^4 - 30x^2 - 45 = 15(x^4 - 2x^2 - 3)$ . Wir substituieren  $z = x^2$  und erhalten (nach Vieta oder mit  $p, q$ -Formel)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15(x^4 - 2x^2 - 3) = 15(z^2 - 2z - 3) = 15(z + 1)(z - 3) \\ &= 15(x^2 + 1)(x^2 - 3) = 15(x^2 + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

$f'(x)$  hat damit nur die beiden Nullstellen  $\pm\sqrt{3}$ : Dies sind die beiden einzigen stationären Stellen von  $f$ . Beides sind Extremstellen, da  $\pm\sqrt{3}$  *einfache* Nullstellen von  $f'$  sind. Da der führende Koeffizient von  $f'$  positiv ist, ist die letzte Extremstelle  $+\sqrt{3}$  eine Minimum- und  $-\sqrt{3}$  Maximumstelle von  $f$ .

e)  $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$  ist definiert für  $x > 0$ . Dafür gelten folgende Äquivalenzen:

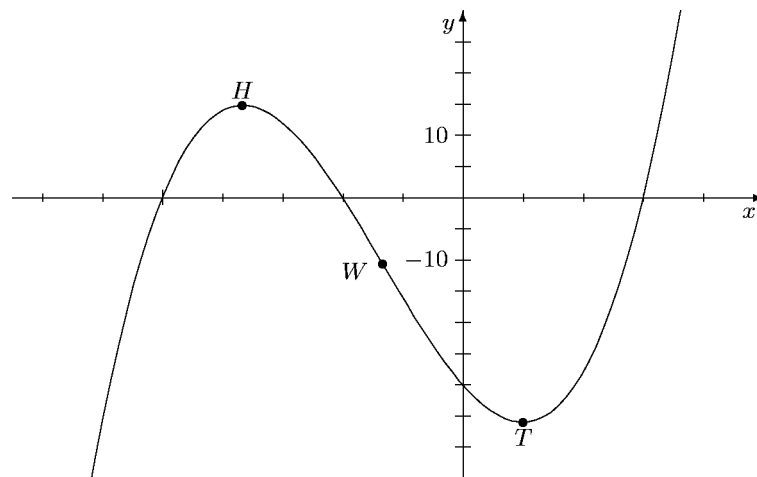
$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \iff x\sqrt{x} - 1 = 0 \iff x^{3/2} = 1 \iff x = 1.$$

+1 ist die einzige Nullstelle von  $f'$  und  $f'(x)$  wechselt dort das Vorzeichen von ‘-’ zu ‘+’ ( $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{1} < 0$ ,  $f(4) = 2 - \frac{1}{4} > 0$ ), also hat  $f$  bei +1 ein Minimum.

f)  $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = 0 \iff 2x^3 - 2 = 0 \iff x^3 = 1 \iff x = 1$ . Damit ist +1 einzige stationäre Stelle von  $f$ . Um die Art zu untersuchen, bestimmen wir die Vorzeichenverteilung von  $f'$ :  $f'(\frac{1}{2}) = 1 - 8 < 0$  und  $f'(2) = 4 - \frac{1}{2} > 0$ , also hat  $f'$  bei +1 einen VZW von - zu +: +1 ist Minimalstelle von  $f$ .

- 2) a) Es ist  $f(-2) = 0$ ,  $f(x) : (x+2) = (x^2 + 2x - 15)$  und  $x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3)$ . Damit hat  $f$  die drei (einfachen) Nullstellen  $-2$ ,  $-5$  und  $+3$ . Die Nullstellen von  $f'(x) = 3x^2 + 8x - 11$  sind  $+1$  und  $-\frac{11}{3}$ . Beide Nullstellen von  $f'$  sind einfach, also Extremstellen von  $f$ . Da der führende Koeffizient von  $f(x)$  (und damit auch der von  $f'(x)$ ) positiv ist, ist  $f'(x)$  schließlich positiv,  $f(x)$  also schließlich monoton steigend, so dass der ‘letzte’ Extrempunkt ein Tiefpunkt sein muss:  $T = (1, f(1)) = (1, -36)$ , während der andere ein Hochpunkt ist:  $H = (-11/3, f(-11/3)) = (-11/3, 400/27) \approx (-3,67; 14,81)$ .

Nullstellen von  $f''(x) = 6x + 8$ : Die (einfache) Nullstelle bei  $-4/3$  ist Wendestelle von  $f$ . Wendepunkt  $W = (-4/3, f(4/3)) = (-4/3, -286/27) \approx (-1,33; -10,60)$ .

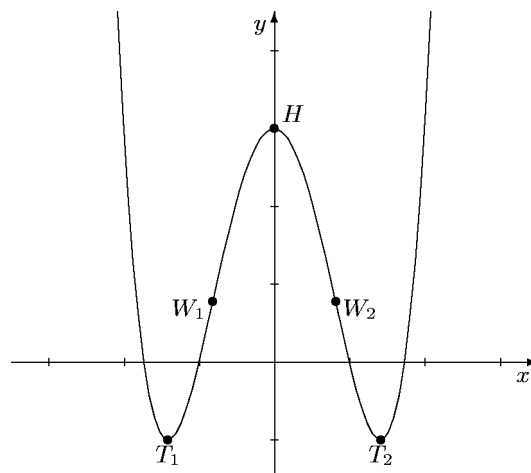


b) Die Funktion ist achsensymmetrisch. Ihre Nullstellen bestimmen wir mittels Substitution:  $\pm 1$  und  $\pm\sqrt{3}$ . Da es 4 verschiedene Nullstellen sind, müssen sie alle einfach sein.

$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$  hat die Nullstellen  $0$  und  $\pm\sqrt{2}$ , diese sind einfach, also Extremstellen von  $f$ . Die zugehörigen Extremwerte sind  $f(0) = 3$ ,  $f(\pm\sqrt{2}) = -1$ . Da der führende Koeffizient von  $f$  positiv ist, ist der 'letzte' Extrempunkt ein Tiefpunkt:  $T_2 = (\sqrt{2}, -1)$ , der davor ein Hochpunkt:  $H = (0, 3)$  und schließlich davor wieder ein Tiefpunkt  $T_1 = (-\sqrt{2}, -1)$ .

$f''(x) = 12x^2 - 8 = 12(x^2 - \frac{2}{3})$  hat die beiden Nullstellen  $\pm\sqrt{2/3} \approx \pm 0.82$ ; diese sind einfach, also Wendestellen von  $f$ . Die zugehörigen Wendepunkte sind  $W_1 = (-\sqrt{2/3}, 7/9)$  und  $W_2 = (\sqrt{2/3}, 7/9)$ .

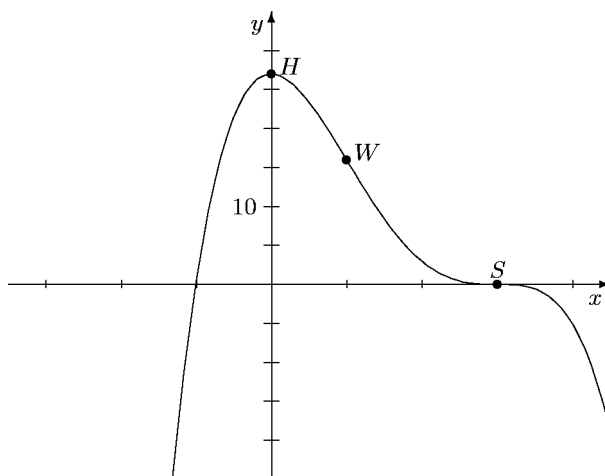
Skizze:



c) Es ist  $f(-1) = 0$  und  $f(x) : (x + 1) = -(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)$ . Dieser letzte Term hat  $+3$  als Nullstelle und erneute Polynomdivision ergibt dann  $f(x) = -(x + 1)(x - 3)(x^2 - 6x + 9) = -(x + 1)(x - 3)(x - 3)^2$ . Damit hat  $f$  die Nullstellen  $-1$  (einfach) und  $+3$  (dreifach).

$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 36x = -4x(x^2 - 6x + 9) = -4x(x - 3)^2$  hat die Nullstellen  $0$  (einfach) und  $+3$  (doppelt). Damit ist  $0$  Extrem- und  $+3$  Sattelstelle. Da der führende Koeffizient negativ ist, fällt die Funktion schließlich, d. h. der (einzige) Extrempunkt ist ein Hochpunkt:  $H = (0, f(0)) = (0, 27)$ . Der Sattelpunkt ist  $S = (+3, 0)$ .

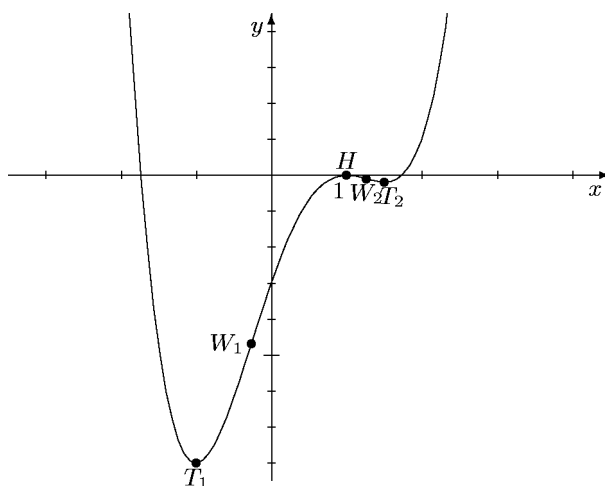
$f''(x) = -12(x^2 - 4x + 3) = -12(x-3)(x-1)$  hat die beiden (einfachen) Nullstellen  $+1$  und  $+3$ . Damit hat  $f$  neben dem schon bestimmten Sattelpunkt  $S$  noch einen weiteren Wendepunkt  $W = (1, f(1)) = (1, 16)$ .



d)  $+1$  ist Nullstelle von  $f$ . Polynomdivision ergibt  $f(x) : (x-1) = x^3 - x^2 - 3x + 3$ . Wieder ist  $+1$  Nullstelle, erneute Polynomdivision ergibt  $f(x) = (x-1)^2(x^2 - 3)$ . Damit hat  $f$  die Nullstellen  $+1$  (doppelt) und  $\pm\sqrt{3}$  (einfach).

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 4x + 6$  hat ebenfalls  $+1$  als Nullstelle. Wir erhalten durch Polynomdivision  $f'(x) = (x-1)(4x^2 - 2x - 6)$  und daraus die drei (einfachen) Nullstellen  $\pm 1$  und  $3/2$  von  $f'$ . Dies sind Extremstellen von  $f$ . Die zugehörigen Extrempunkte sind ein Tiefpunkt  $T_2 = (3/2, f(3/2)) = (3/2, -3/16) = (1.5, -0.1875)$ , ein Hochpunkt  $H = (1 | f(1)) = (1 | 0)$  und ein weiterer Tiefpunkt  $T_1 = (-1 | f(-1)) = (-1 | -8)$ .

$f''(x) = 12x^2 - 12x - 4$  hat die beiden (einfachen) Nullstellen  $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{12}}$ . Dies sind Wendestellen von  $f$  und die Wendepunkte sind  $W_1 \approx (-0.26 | -4.68)$  sowie  $W_2 \approx (1.26 | -0.10)$ .



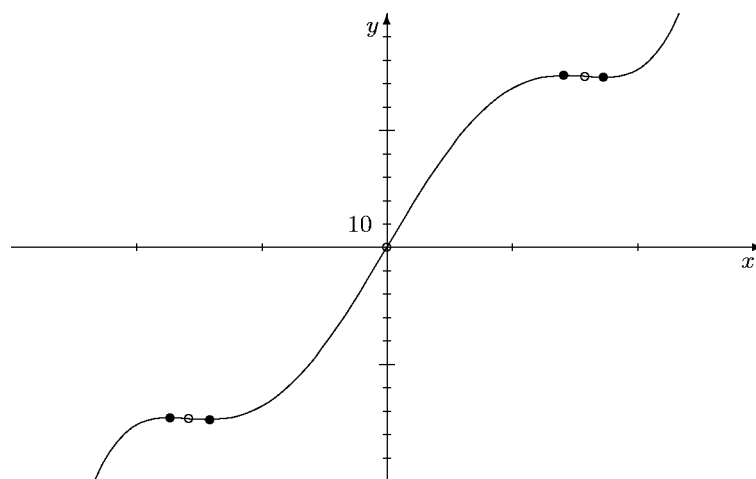
e) Diese Funktion ist punktsymmetrisch, da nur ungerade Potenzen im Funktions-term  $f(x)$  auftreten.

$f(x) = x(3x^4 - 25x^2 + 90)$  hat die einfache Nullstelle  $0$ . Mittels Substitution und  $p, q$ -Formel zeigt man, dass  $3x^4 - 25x^2 + 90$  keine Nullstellen hat.

Die Gleichung  $f'(x) = 15(x^4 - 5x^2 + 6) = 0$  kann man mittels Substitution auf die quadratische Gleichung  $z^2 - 5z + 6 = 0$  reduzieren. Letztere löst man mittels  $p, q$ -Formel oder dem Satz von Vieta. Man erhält  $z^2 - 5z + 6 = (z - 2)(z - 3)$  und damit  $f'(x) = 15(x^4 - 5x^2 + 6) = 15(x^2 - 2)(x^2 - 3)$ . Also hat  $f'$  die vier (einfachen) Nullstellen  $\pm\sqrt{2}$  und  $\pm\sqrt{3}$ . Diese sind sämtlich Extremstellen. Man erhält die Extrempunkte  $H_1 = (-\sqrt{3} \mid -42\sqrt{3}) \approx (-1.73 \mid -72.75)$ ,  $T_1 = (-\sqrt{2} \mid -52\sqrt{2}) \approx (-1.41 \mid -73.54)$  sowie die dazu symmetrische Punkte  $H_2 = (\sqrt{2} \mid 52\sqrt{2}) \approx (1.41 \mid 73.54)$  und  $T_2 = (\sqrt{3} \mid 42\sqrt{3}) \approx (1.73 \mid 72.75)$ .

$f''(x) = 60x^3 - 150x = 60x(x^2 - \frac{5}{2})$  hat die (einfachen) Nullstellen 0 und  $\pm\sqrt{5/2} \approx 1.58$ . Diese sind somit Wendestellen und die Wendepunkte sind  $W_1 \approx (-1.58 \mid -73.13)$ ,  $W_2 = (0 \mid 0)$  und schließlich  $W_3 \approx (1.58 \mid 73.13)$ .

In der nachfolgenden Skizze sind die Wendepunkte durch kleine Kreise, die Extrempunkte durch 'massive' Punkte gekennzeichnet. Die Skala ist in  $x$ -Richtung stark gestreckt, damit die entscheidenden Punkte gut getrennt erkennbar sind. (In Wahrheit ist der Graph wesentlich steiler. Bei 0 ist der Anstieg 90 (!)).

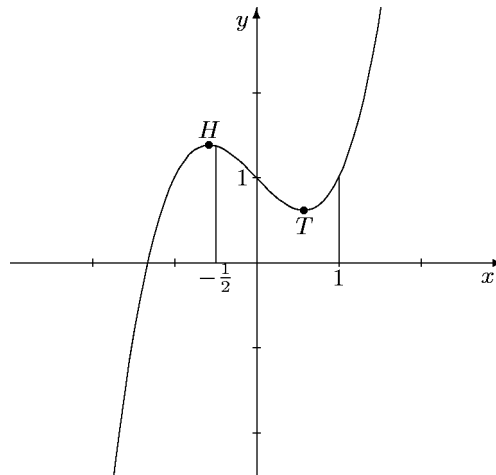


- 3) a) Es ist  $f'(x) = 3x^2 - 1$  und  $f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ . Die beiden stationären Stellen  $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$  sind Extremstellen von  $f$ , da sie *einfache* Nullstellen von  $f'$  sind und  $f'$  daher dort einen Vorzeichenwechsel hat. Da der führende Koeffizient von  $f'$  positiv ist, ist  $f'(x)$  schließlich positiv,  $f$  also schließlich, d. h. für  $x > \sqrt{\frac{1}{3}}$ , streng monoton wachsend. Im Bereich  $-\sqrt{\frac{1}{3}} < x < \sqrt{\frac{1}{3}}$  ist  $f$  streng monoton fallend und für  $x < -\sqrt{\frac{1}{3}}$  streng monoton steigend. Mithin ist die Extremstelle  $\sqrt{\frac{1}{3}}$  eine Minimalstelle. Genauso begründet man, dass  $-\sqrt{\frac{1}{3}}$  eine Maximumstelle von  $f$  ist. Die Extrempunkte sind

$$T = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 1 - \frac{2}{9}\sqrt{3}\right) \approx (0,577; 0,615), \quad H = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}\right) \approx (-0,577; 1,385).$$

b) Da  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  ist, hat die stetige Funktion  $f$  *mindestens* eine Nullstelle. Als ganz-rationale Funktion dritten Grades hat sie *höchstens* drei Nullstellen. Da Hoch- und Tiefpunkt von  $f$  *beide* oberhalb der  $x$ -Achse liegen, kann der Graph von  $f$  die  $x$ -Achse nur einmal schneiden, und zwar

im Bereich  $x < -\sqrt{\frac{1}{3}}$ .



c) Wir ermitteln zunächst die lokalen Extremstellen im Innern des Intervalls  $I$ . Nach a) liegt nur die Minimalstelle  $\approx 0,577$  in  $I$ . Dann vergleichen wir mit den *Randwerten* von  $f$  über  $I$ :  $f(-\frac{1}{2}) = \frac{11}{8} = 1,375$  und  $f(1) = 1$ . Damit ist der kleinste Wert von  $f$  über  $I$  der Wert an der Minimalstelle, also  $\approx 0,615$  und der größte Wert ist der Wert am linken Rand: 1,375.

4) 1.a) Berechnet man die Ableitung ohne Analyse der Lücken, so ergibt sich folgendes (beachten Sie insbesondere das mehrmalige Kürzen):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2} \\ \implies f'(x) &= \frac{2x(x + 1)^2 - (x^2 - 1) \cdot 2(x + 1)}{(x + 1)^4} \\ &= \frac{2x(x + 1) - 2(x^2 - 1)}{(x + 1)^3} = \frac{2(x + 1)}{(x + 1)^3} = \frac{2}{(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Benutzt man jedoch die Kenntnisse aus der Bearbeitung der Aufgabe 1.a) von Übung (2) und arbeitet mit dem gekürzten Funktionsterm, so ergibt sich einfacher

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1} \implies f'(x) = \frac{(x + 1) - (x - 1)}{(x + 1)^2} = \frac{2}{(x + 1)^2}.$$

Fazit: Erst Kürzen, dann ableiten, nicht umgekehrt.

$$1.b) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \implies f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$1.c) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \implies f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6x}{(x^2 - 1)^2}.$$

3.a) Die Funktion  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - 3x + 3}$  hat eine hebbare Lücke bei +1 und die fortgesetzte Funktion ist  $\tilde{f}(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 3}$ . Wir berechnen deren Ableitung:

$$\tilde{f}'(x) = \frac{(x^2 - 3) - (x + 3) \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{-x^2 - 9}{(x^2 - 3)^2}$$

Für alle  $x \neq 1$  gilt  $f(x) = \tilde{f}(x)$ , also folgt für diese  $x$  auch  $f'(x) = \tilde{f}'(x)$ . Der Wert  $\tilde{f}'(1)$  gibt den Anstieg der fortgesetzten Funktion an der Definitionslücke  $+1$  an, während  $f$  an dieser Stelle  $+1$  nicht definiert und folglich dort auch nicht differenzierbar ist.

3.b) Man kann die gegebene Funktion einfach mit der Quotientenregel ableiten, aber man erhält dann einen unnötig komplizierten Term:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + x - 6}{-x^2 + 6x - 9} \\ \implies f'(x) &= \frac{(2x + 1)(-x^2 + 6x - 9) - (x^2 + x - 6)(-2x + 6)}{(-x^2 + 6x - 9)^2} \\ &= \frac{7x^2 - 30x + 27}{(-x^2 + 6x - 9)^2}. \end{aligned}$$

Wenn man jedoch die Ergebnisse aus der Analyse der Lücken beachtet, erhält man einfacher

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{(x - 3)^2} \implies f'(x) = \frac{(2x + 1) \cdot (x - 3)^2 - (x^2 + x - 6) \cdot 2(x - 3)}{(x - 3)^4}.$$

Man erkennt, dass man Kürzen kann, und erhält

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)(x - 3) - 2x^2 - 2x + 12}{(x - 3)^3} = \frac{7x - 9}{(x - 3)^3}.$$

Beachten Sie die erheblich einfachere Form, die bei einer Vorzeichenuntersuchung von  $f'$  von großem Vorteil ist. Beachten Sie aber auch, dass in diesem Falle die Vereinfachung nicht darauf beruht, dass man den Funktionsterm  $f(x)$  kürzt, sondern allein auf der Tatsache, dass der Nenner von  $f(x)$  einen Linearfaktor mehrfach enthält, also ein mehrfacher Pol vorliegt. Dies führte dann dazu, dass der entsprechende Linearfaktor in der Ableitung gekürzt werden konnte. Dies gilt allgemein, (siehe später, Null-/Polstellenordnung und Ableitung).

3.c) Die gegebene Funktion hat bei  $+1$  eine hebbare Lücke. Wir untersuchen die fortgesetzte Funktion:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{3x^2 + 6x - 9}{x^2 - 3} \\ \implies \tilde{f}'(x) &= \frac{(6x + 6)(x^2 - 3) - (3x^2 + 6x - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{-6x^2 - 18}{(x^2 - 3)^2}. \end{aligned}$$

Wieder gilt für  $x \neq 1$   $f'(x) = \tilde{f}'(x)$ .  $\tilde{f}'(1)$  ist der Anstieg der fortgesetzten Funktion an der hebbaren Lücke, während  $f$  dort nicht definiert (und folglich auch nicht differenzierbar) ist.

3.d) Alle Lücken von  $f$  sind Pole, aber  $f$  lässt sich durch Kürzen vereinfachen und wir erhalten

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 - 6x^2 + 4x + 8}{x^4 - 4x^3 - x^2 + 20x - 20} = \frac{x^2 - 4x - 4}{x^3 - 2x^2 - 5x + 10} \\ \implies f'(x) &= \frac{(2x - 4)(x^3 - 2x^2 - 5x + 10) - (x^2 - 4x - 4)(3x^2 - 4x - 5)}{(x^3 - 2x^2 - 5x + 10)^2} \\ &= \frac{-x^4 + 8x^3 - x^2 + 4x - 60}{(x^3 - 2x^2 - 5x + 10)^2}. \end{aligned}$$

$$4.a) f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{3x^3 + 4x - 1} \implies f'(x) = \frac{-3x^4 + 24x^3 - 5x^2 - 2x}{(3x^3 + 4x - 1)^2}.$$

4.b) Leitet man den gegebenen Funktionsterm  $f(x) = \frac{3x^3 + 4x - 4}{2x^2 - x - 1}$  wie üblich ab, erhält man den komplizierten Term  $f'(x) = \frac{6x^4 - 6x^3 - 17x^2 + 16x - 8}{(2x^2 - x - 1)^2}$ . Günstiger ist es jedoch, die Asymptotenform des Funktionsterms, die man durch Polynomdivision erhält, für die Berechnung der Ableitung zu benutzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x^4 - 2x^2 + 1}{7x^4 - 5x - 3} = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{25x - 13}{4(2x^2 - x - 1)} \\ \implies f'(x) &= \frac{3}{2} - \frac{25x^2 - 26x + 19}{2(2x^2 - x - 1)^2} \end{aligned}$$

4.c) Auch hier kann man die Asymptotenform nutzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x^4 - 2x^2 + 1}{7x^4 - 5x - 3} = 1 + \frac{-14x^2 + 20x + 19}{7(7x^4 - 5x - 3)} \\ \implies f'(x) &= \frac{28x^5 - 60x^4 - 76x^3 + 10x^2 + 12x + 5}{(7x^4 - 5x - 3)^2} \end{aligned}$$

4.d) Hier hat der Funktionsterm  $f(x) = 2x - 1 - \frac{3x + 4}{x^2 - 4}$  bereits die Asymptotenform. Als Ableitung erhält man

$$f'(x) = 2 - \frac{3x^2 + 8x + 12}{(x^2 - 4)^2}.$$

4.e) Hier erleichtert die Benutzung der Asymptotenform die Ableitungsberechnung besonders:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{x - 3}{x + 4} = x + 1 - \frac{7}{x + 4} = x + 1 - 7(x + 4)^{-1} \\ \implies f'(x) &= 1 + 7(x + 4)^{-2} = 1 + \frac{7}{(x + 4)^2}. \end{aligned}$$

5) Die in Übung (2) bereits gefundenen Ergebnisse (Definitionsbereich, Pole, Vorzeichenverteilung von  $f$ , evtl. Asymptote) werden im Folgenden selbstverständlich benutzt.

$$\text{Ü2, 1a) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2}:$$

Da bereits die Lücken bestimmt sind, gehen wir von dem gekürzten Funktionsterm aus

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}.$$

Zur Berechnung der beiden Ableitungen benutzen wir den Funktionsterm in Asymptotenform, die wir durch Polynomdivision bestimmen:

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x + 1} = 1 - 2(x + 1)^{-1}.$$



Damit erhalten wir die beiden Ableitungen

$$f'(x) = -2 \cdot (-1) \cdot (x+1)^{-2} = \frac{2}{(x+1)^2}, \quad f''(x) = 2 \cdot (-2) \cdot (x+1)^{-3} = \frac{-4}{(x+1)^3}.$$

Wir erkennen unmittelbar, dass weder  $f'$  noch  $f''$  eine Nullstelle hat, so dass  $f$  weder Extrem- noch Wendestellen besitzt.

Ebenso einfach erkennt man, dass  $f'$  nur positive Werte hat, so dass der Graph von  $f$  über jedem Intervall des Definitionsbereiches monoton wächst (aber nicht über  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ !). Anders formuliert: Die beiden zusammenhängenden Teilstücke des Graphen von  $f$  sind jeweils monoton wachsend, nicht aber der Graph als Ganzes.

Da  $f''$  an dem (dreifachen) Pol bei  $-1$  sein Vorzeichen ändert, ändert sich dort die Krümmung von  $f$ , ohne dass  $f$  dort eine Wendestelle hat! Über dem Intervall  $] -\infty, -1[$  hat  $f''$  nur positive Werte und  $f$  ist dort linksgekrümmt, während über  $] -1, \infty[$   $f$  umgekehrt rechtsgekrümmt ist.

Damit erweist sich der bereits in Übung (2) als *möglich* skizzierte Graph auch hinsichtlich Monotonie und Krümmungsverhalten als korrekt.

$$\text{Ü2, 1b) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Wir bemerken, dass  $f$  achsensymmetrisch ist ( $f(-x) = f(x)$  für alle  $x$ ).

Wir berechnen die ersten beiden Ableitungen:

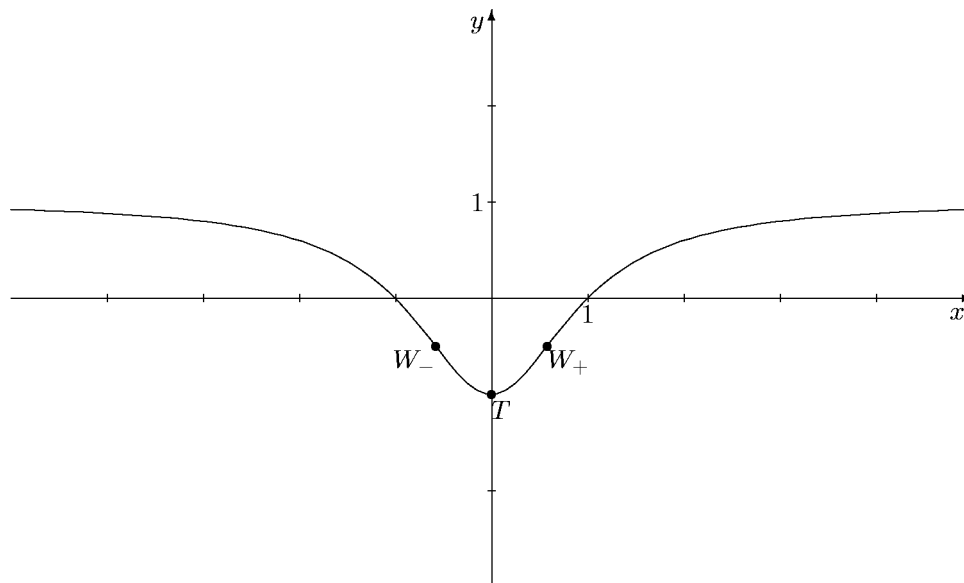
$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2},$$
$$f''(x) = \frac{4(x^2 + 1)^2 - 4x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{4(x^2 + 1) - 16x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-4(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}.$$

Die erste Ableitung hat nur eine einfache Nullstelle bei 0, also ist 0 die einzige Extremstelle von  $f$ . Da der Nenner von  $f'$  immer positiv ist, hat  $f'$  bei 0 einen VZW von  $-$  zu  $+$ , so dass  $f$  dort eine Minimalstelle hat. Der Tiefpunkt ist  $T = (0, f(0)) = (0, -1)$ .

$f''$  hat die beiden Nullstellen  $\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$ . Diese sind einfach, da der Zählerterm quadratisch ist. Damit hat  $f$  an beiden Stellen einen Wendepunkt. Die Wendepunkte sind  $W_{\pm} = (\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}, f(\pm \frac{1}{3}\sqrt{3})) = (\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}) \approx (\pm 0,58, -\frac{1}{2})$ .

Da der Nenner von  $f''$  stets positiv ist, können wir die Vorzeichenverteilung von  $f''$  allein am Zähler ablesen. Im Bereich  $] -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$  ist  $f''(x) > 0$  und  $f$  linksgekrümmt, während in den anderen Bereichen  $f$  rechtsgekrümmt ist.

Skizze:



Ü2, 1c)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ : Wieder ist  $f$  achsensymmetrisch. Die ersten beiden Ableitungen sind:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6x}{(x^2 - 1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2 - 1)^2 - 6x \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{6(x^2 - 1) - 24x^2}{(x^2 - 1)^3} = \frac{-6(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}.$$

Wieder hat  $f'$  nur eine einfache Nullstelle bei 0,  $f$  also nur die Extremstelle 0. Da der Nenner von  $f'$  stets positiv ist, bestimmt allein der Zähler  $6x$  das Vorzeichen von  $f'$ :  $f'$  wechselt bei 0 das Vorzeichen von  $-$  zu  $+$ . Damit ist das Extremum ein Minimum und der Tiefpunkt ist  $T = (0, 4)$ .

$f''$  dagegen hat keine Nullstelle,  $f$  also keinen Wendepunkt.  $f''$  wechselt sein Vorzeichen nur an den beiden Polen  $\pm 1$ . Der Zähler von  $f''$  ist immer negativ, der Nenner ist negativ genau im Bereich  $] - 1, +1[$ . Damit ist  $f''$  positiv in diesem Bereich und sonst negativ. Also ist  $f$  im Bereich  $] - 1, +1[$  linksgekrümmt, sonst rechtsgekrümmt.

Der Verlauf des Graphen ist der bereits bei Übung 2, 1c) skizzierte.

Ü2, 2 b)  $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{-x^2 + 6x - 9}$ :

Der Funktionsterm ist nicht kürzbar, aber der Nenner ist ein vollständiges Quadrat. Dies kann man sich bei der Berechnung der Ableitung zunutze machen:

$$f(x) = -\frac{x^2 + x - 6}{(x - 3)^2},$$

$$f'(x) = -\frac{(2x + 1)(x - 3)^2 - (x^2 + x - 6) \cdot 2(x - 3)}{(x - 3)^4}$$

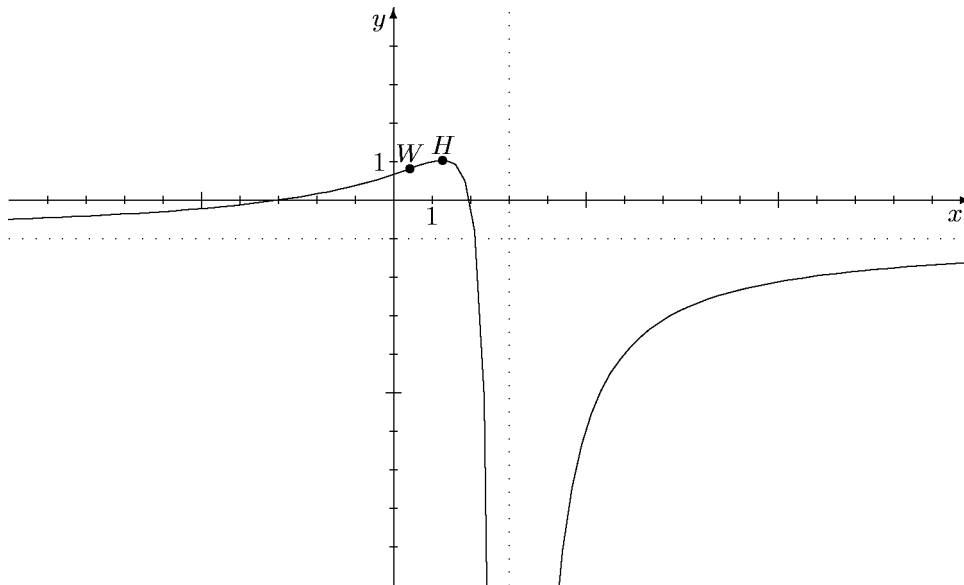
$$= -\frac{(2x + 1)(x - 3) - 2(x^2 + x - 6)}{(x - 3)^3} = \frac{7x - 9}{(x - 3)^3},$$

$$f''(x) = \frac{7(x - 3)^3 - (7x - 9) \cdot 3(x - 3)^2}{(x - 3)^6} = \frac{7(x - 3) - 3(7x - 9)}{(x - 3)^4} = \frac{-14x + 6}{(x - 3)^4}.$$

Einzigste Nullstelle von  $f'$  ist  $\frac{9}{7}$ , sie ist einfach und damit Extremstelle von  $f$ . Der Zähler von  $f$  hat bei  $\frac{9}{7}$  einen VZW von  $-$  zu  $+$ , da aber der Nenner bei  $\frac{9}{7}$  (und in einer ganzen Umgebung) negative Werte hat, wechselt  $f'$  bei  $\frac{9}{7}$  sein Vorzeichen umgekehrt von  $+$  zu  $-$ :  $\frac{9}{7}$  ist Maximalstelle von  $f$ . Der Hochpunkt ist  $H = (\frac{9}{7}, f(\frac{9}{7})) = (\frac{9}{7}, \frac{25}{24}) \approx (1,29; 1,04)$ .

$f''$  hat nur die Nullstelle  $\frac{3}{7}$ , ebenfalls einfach und somit Wendestelle von  $f$ . Der Wendepunkt ist  $W = (\frac{3}{7}, f(\frac{3}{7})) = (\frac{3}{7}, \frac{22}{27}) \approx (0,43; 0,81)$ .

Skizze:



$$\text{Ü 6, 2c) } f(x) = \frac{3x^3 + 3x^2 - 15x + 9}{x^3 - x^2 - 3x + 3}:$$

Wir kürzen den Funktionsterm und berechnen die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3(x-1)(x+3)}{x^2-3} = \frac{3x^2+6x-9}{x^2-3}, \\ f'(x) &= \frac{(6x+6)(x^2-3) - (3x^2+6x-9) \cdot 2x}{(x^2-3)^2} \\ &= \frac{6x^3+6x^2-18x-18-6x^3-12x^2+18x}{(x^2-3)^2} = \frac{-6x^2-18}{(x^2-3)^2}, \\ f''(x) &= \frac{-12x(x^2-3)^2 + (6x^2+18) \cdot 2(x^2-3) \cdot 2x}{(x^2-3)^4} \\ &= \frac{-12x(x^2-3) + (6x^2+18) \cdot 4x}{(x^2-3)^3} \\ &= \frac{12x^3+108x}{(x^2-3)^3} = \frac{12x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} \end{aligned}$$

Damit erkennen wir, dass  $f'(x)$  keine Nullstelle,  $f$  also keine Extremstelle hat. Da  $f'$  nur negative Werte hat, ist  $f$  über jedem Teilintervall des Definitionsbereiches monoton fallend.

$f''$  hat nur eine einfache Nullstelle bei 0, dort liegt also eine Wendestelle von  $f$  vor. Der Wendepunkt ist  $W = (0, f(0)) = (0, 3)$ .

Diese Ergebnisse bestätigen den Verlauf des in Übung 2 bereits gefundenen Graphen, nur dass jetzt die genaue Lage des Wendepunktes bestimmt ist.