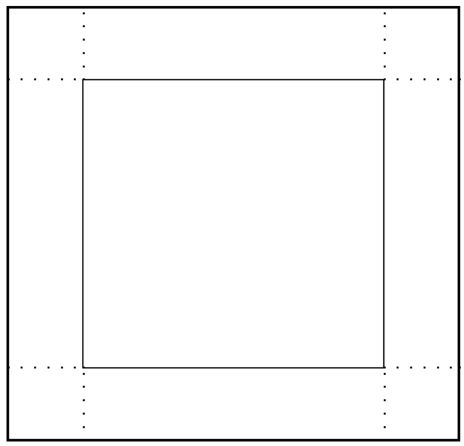
Übungen (5)

1) a) Gegeben sei ein quadratisches Pappstück der Kantenlänge 11 cm. Schneidet man aus diesem an allen vier Ecken ein kleines Quadrat der Kantenlänge x heraus und faltet dann die überstehenden Teile nach oben, so erhält man eine Schachtel (ohne Deckel). Wie ist x zu wählen, so dass die entstehende Schachtel größtmögliches Volumen hat?



b) Lösen Sie dieses Problem für beliebige Kantenlänge a des Ausgangsquadrates. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an dem in a) behandelten Spezialfall.
c) Lösen Sie dieses Problem für ein rechteckiges Pappstück mit den Kantenlängen $a \leq b$ und überprüfen Sie Ihr Ergebnis an dem Spezialfall b).

2) Eine Kugel wird mit der Geschwindigkeit $v = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ senkrecht nach oben geschossen. Aus den Gesetzen des freien Falls ergibt sich die folgende Formel für die Höhe h der Kugel (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) nach dem Abschuss:

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt \quad (g = 9{,}81 \approx 10 \text{ Fallbeschleunigung näherungsweise in } \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ ).$$

a) Wie hoch steigt die Kugel? Wann erreicht sie den höchsten Punkt? Wann schlägt die Kugel wieder auf dem Boden auf?
b) Lösen Sie die Aufgabe für beliebiges v und g.
c) Auf der Mondoberfläche beträgt die Fallbeschleunigung nur ein Sechstel. Wie hoch steigt dort die Kugel bei $v = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und wann erreicht sie den höchsten Punkt?

3) a) Aus 30 Zentimeter breitem Kupferblech soll eine Regenrinne mit rechteckigem Querschnitt geformt werden. Welche Höhe soll die Regenrinne erhalten, damit sie möglichst viel Wasser aufnehmen kann? Wie groß ist der dann entstehende Querschnitt?
b) Ein Bauer möchte auf einer Weide, die an einen Fluss grenzt, ein Teilstück für seinen Stier abgrenzen. Er hat noch 180 Meter Zaun im Schuppen und möchte eine möglichst große rechteckige Fläche entlang des Flusses einzäunen. Wie breit soll er den Streifen am Fluss wählen? Wie groß ist die dann entstehende Weide?
c) Lösen Sie die Aufgaben a) allgemein für ein Blech der Breite a. Lösen Sie auch b) allgemein für einen Zaun der Länge l.

4) Zeigen Sie:
a) Unter allen Rechtecken mit festem Umfang U hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.
b) Unter allen Rechtecken mit festem Flächeninhalt A hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

Weitere Übungsaufgaben: Lehrbuch, S. 89, S. 101–102.

Übungen (5) — Lösungen

1) Teil a) erhält man aus b) mit $a = 11$. Teil b) erhält man natürlich aus c) mit $a = b$. Da aber die Untersuchung von c) nicht zu so glatten Ergebnissen führt, hier zunächst die Lösung für
b) Faltet man Streifen der Breite x ($x > 0$) nach oben, so entsteht eine quadratische Bodenfläche mit der Kantenlänge $a - 2x$ (falls $a - 2x > 0$) und das Volumen der Schachtel beträgt

$$V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x \quad (\text{für } 0 < x < \frac{a}{2}).$$

Zwischen den beiden Nullstellen 0 und $\frac{a}{2}$ hat V positive Werte und dort muss ein Maximum liegen. Wir berechnen also die erste Ableitung

$$\begin{aligned} V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0 &\iff x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{a^2}{12} = 0 \\ &\iff x = \frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{36}} = \frac{a}{3} \pm \frac{a}{6}\,. \end{aligned}$$

Damit ist $x_H = \frac{a}{3} - \frac{a}{6} = \frac{a}{6}$ die gesuchte Maximalstelle. (Die andere Extremstelle $\frac{a}{3} + \frac{a}{6} = \frac{a}{2}$ ist die doppelte Nullstelle von V.) Das maximale Volumen beträgt dann

$$V(x_H) = V(\frac{a}{6}) = (a - \frac{a}{3})^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2a^3}{27}\,.$$

Ad a): Für $a = 11$ ergibt sich konkret bei der Höhe $\frac{11}{6} \approx 1{,}83$ das maximale Volumen $V_{max} = V(x_H) = \frac{2 \cdot 11^3}{27} \approx 98{,}59$.
Nun zu c): Die beiden Kantenlängen seien a und b; es sei b der größere Wert: $b \geq a$. (Wir schließen den Fall $a = b$ mit ein.) Faltet man Streifen der Breite $x > 0$ nach oben, so entsteht als Bodenfläche ein Rechteck mit den Kantenlänge $a - 2x$ bzw. $b - 2x$. Dies ergibt nur dann eine Schachtel, wenn sowohl x als auch $a - 2x$ und $b - 2x$ positiv sind, d. h. $x > 0$ und $x < \frac{a}{2}$. Nach dem Falten entsteht ein Quader mit dem Volumen

$$V(x) = (a - 2x)(b - 2x)x = 4x^3 - 2(a + b)x^2 + abx\,.$$

Dies ist eine kubische Funktion mit den Nullstellen 0, $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$. Diese sind einfach, wenn sie verschieden sind, andernfalls ist $a = b$ und $\frac{a}{2}$ ist doppelte Nullstelle von f (siehe b)).
Auch ohne Differentialrechnung ist dann klar: Zwischen den Nullstellen 0 und $\frac{a}{2}$ hat V positive Werte und dort liegt notwendig ein Maximum. (Ein Minimum liegt zwischen $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$.) Wir bestimmen nun die stationären Stellen von V:

$$V'(x) = 12x^3 - 4(a + b)x + ab = 0 \iff x^2 - \frac{(a + b)}{3}x + \frac{ab}{12} = 0$$
$$\iff x = \frac{a + b}{6} \pm \sqrt{\frac{(a + b)^2}{36} - \frac{ab}{12}} = \frac{a + b}{6} \pm \sqrt{\frac{a^2 - ab + b^2}{36}}\,.$$

Die kleinere Stelle muss die Maximumstelle sein:

$$x_H = \frac{a+b}{6} - \frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

Das maximale Kartonvolumen beträgt daher

$$V(x_H) = x_H(a-2x_H)(b-2x_H).$$

Dieser Wert lässt sich algebraisch (bei $b > a$) nicht wesentlich vereinfachen. Für $a = b$ hingegen ergibt sich das glatte Ergebnis des Spezialfalls b):

$$a = b \implies x_H = \frac{a+a}{6} - \sqrt{\frac{a^2-aa+a^2}{36}} = \frac{a}{3} - \frac{a}{6} = \frac{a}{6}$$

und $V(x_H) = \frac{2a^3}{27}$ wie bereits bei b) berechnet.

2) Lösung (mit Näherungswert $g = 10$ zur Vereinfachung der Werte):
Da die Zielfunktion quadratisch ist, kann man diese Aufgabe ohne Differentialrechnung mit Hilfe der Scheitelpunktsbestimmung für Parabeln lösen. Wir wollen hier jedoch zur Demonstration die Differentialrechnung verwenden.
Gesucht ist das absolute Maximum von h. Wir bestimmen zunächst die stationären Stellen von h, also die Nullstellen von $h'(t) = -10t + 20$. Da h' linear ist, gibt es nur eine Nullstelle und es liegt notwendig ein VZW vor: $h'(t) = 0 \iff t = 2$. Da h' einen negativen führenden Koeffizienten hat, ist h' schließlich negativ, h also schließlich fallend: Die stationäre Stelle $t = 2$ ist also eine Maximumstelle; der maximale Wert von h ist $h(2) = 20$. Die Kugel erreicht ihre maximale Höhe von 20 Metern nach 2 Sekunden. Diese Höhe ist auch absolut die höchste, da die Höhe für $t = 0$ und für $t \to \infty$ (die Definitionsränder) niedriger ist.
b) Wieder bestimmen wir die stationären Stellen: $h'(t) = -gt + v = 0 \iff t = \frac{v}{g}$. Wieder liegt ein VZW bei h' vor, und zwar von $+$ zu $-$; die stationäre Stelle $\frac{v}{g}$ ist eine Maximalstelle. Der maximale Wert ist $h(\frac{v}{g}) = -\frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{g} = \frac{v^2}{2g}$: Die Kugel erreicht nach einer Steigzeit $\frac{v}{g}$ (in Sekunden) ihre maximale Höhe $\frac{v^2}{2g}$ (in Metern).
Die Kugel schlägt wieder auf dem Boden auf, wenn $h(t) = 0$ ist: $0 = -\frac{g}{2}t^2 + vt = \frac{t}{2}(2v - gt) \iff t = 0 \vee t = \frac{2v}{g}$. $t = 0$ bedeutet den Startzeitpunkt, der Wiederaufschlag erfolgt also nach der Zeit $\frac{2v}{g}$ (in Sekunden). Dies ist das Doppelte der Steigzeit.
c) Spezialisiere b): Steigzeit $t = \frac{v}{\frac{1}{6}g} = 6\frac{v}{g}$, Steighöhe $h = \frac{v^2}{2\cdot\frac{g}{6}} = 6\frac{v^2}{2g}$. Beide sind sechsmal so groß wie auf der Erde.

3) In beiden Fällen ist die Zielfunktion wieder quadratisch und die Aufgabe ohne Differentialrechnung mit der Scheitelpunktsuntersuchung lösbar. Wieder benutzen wir zu Demonstrationszwechen die Differentialrechnung.
a)/c) Das Fassungsvermögen der Regenrinne wird durch die Querschnittsfläche bestimmt. Biegt man von dem Blech jeweils x Zentimeter nach oben, so erhält man als Querschnitt ein Rechteck der Höhe x und der Breite $a - 2x$, die Fläche ist also $A(x) = (a - 2x)x = -2x^2 + ax$.
Wir bestimmen $A'(x) = -4x + a$ mit der (einzigen) Nullstelle $x = \frac{a}{4}$. Da A' linear ist, liegt hier ein VZW von A' vor, also eine Extremstelle von A. Da A' schließlich negativ ist, A also schließlich fällt, ist das Extremum bei $\frac{a}{4}$ ein Maximum. Der

Maximalwert ist $A(\frac{a}{4}) = (a - \frac{a}{2})\frac{a}{4} = \frac{a^2}{8}$. Für $a = 30\,\text{cm}$ ergibt sich eine Höhe von $\frac{a}{4} = 7{,}5\,\text{cm}$ und eine Querschnittsfläche $\frac{a^2}{8} = \frac{900}{8} = 112{,}5$ Quadratzentimeter.
b)/c) Die Weide habe die Kantenlängen x, y, wobei y die Kante entlang des Flusses sei. Da für das Stück entlang des Flusses kein Zaun benötigt wird, beträgt der Zaunbedarf $2x + y = l$, also ist $y = l - 2x$. Für die Weidefläche ergibt sich so

$$A = x \cdot y = x(l - 2x) = -2x^2 + lx\,.$$

Wie in a) erhalten wir nur eine stationäre Stelle

$$A'(x) = -4x + l = 0 \iff x = \frac{l}{4}$$

und diese ist eine Maximalstelle (führender Koeffizient von A' ist negativ, s. o.) Der Bauer sollte also die Weide mit den Kantenlängen $x = \frac{l}{4}$ quer zum Fluss und $y = l - 2x = \frac{l}{2}$ parallel zum Fluss anlegen. Die maximale Weidefläche beträgt dann $\frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{8}$. Im Falle $l = 180$ ergeben sich die Maße 45×90 Meter und die Fläche $\frac{l^2}{8} = 45 \cdot 90 = 4050$ Quadratmeter.

4) a) Es seien a, b die Kantenlängen des gesuchten Rechtecks. Dann ist die *Zielgröße* die Fläche $A = a \cdot b$ und die *Nebenbedingung* ist $2a + 2b = U$. Wir eliminieren mit Hilfe der Nebenbedingung eine Variable: $b = \frac{U}{2} - a$ und erhalten als *Zielfunktion*

$$A(a) = a \cdot b = a \cdot (\frac{U}{2} - a) = -a^2 + \frac{U}{2} \cdot a\,.$$

Da die Kantenlängen $a, b > 0$ sein müssen, gilt $0 < a < \frac{U}{2}$. Einzige stationäre Stelle ist

$$A'(a) = -2a + \frac{U}{2} = 0 \iff a = \frac{U}{4}\,.$$

Diese ist eine Extremstelle, da A' linear ist, die Nullstelle also einfach, mit VZW. Es liegt ein Maximum vor, da A' schließlich negativ ist. (Alternatives Argument: Die Randwerte sind $A(0) = A(\frac{U}{2}) = 0$, also muss dazwischen mindestens ein (positives) Maximum existieren. Da $\frac{U}{4}$ der einzige Kandidat ist, liegt dort das gesuchte Maximum.) Das Rechteck ist ein Quadrat, da $a = \frac{U}{4}$ und folglich $b = \frac{U}{2} - \frac{U}{4} = a$ ist.
b) Wieder seien a, b die Kantenlängen des gesuchten Rechtecks, diesmal ist aber der Umfang $U = 2a + 2b$ die *Zielgröße* und $A = a \cdot b$ die *Nebenbedingung.* Wir eliminieren damit eine Variable: $b = \frac{A}{a}$ und erhalten die *Zielfunktion*

$$U(a) = 2a + 2b = 2a + \frac{2A}{a}\,.$$

Diese ist nicht quadratisch, sondern (gebrochen) rational. Die Forderungen $a, b > 0$ ergeben diesmal nur die Einschränkung $a > 0$.
Wir bestimmen wieder die stationären Stellen:

$$A'(a) = 2 + 2A \cdot (-a^{-2}) = \frac{2a^2 - 2A}{a^2} = 0 \iff a^2 = A \iff a = \pm\sqrt{A}\,,$$

wobei $a = -\sqrt{A}$ entfällt. Wegen $\lim_{a\to 0} A(a) = \infty$ und $\lim_{a\to\infty} A(a) = \infty$ muss es mindestens ein Minimum im Bereich $]0, \infty[$ geben. Die einzige stationäre Stelle ist also eine Minimalstelle. Damit hat das Rechteck mit den Kantenlängen $a = \sqrt{A}$ und $b = \frac{A}{a} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A} = a$ den kleinsten Umfang $4\sqrt{A}$. Wegen $a = b$ ist es ein Quadrat.