## Aufgabe vom 5. September 2008

1) Gegeben ist die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 - 89x + 30}{1 - x - 6x^2}\,.$$

a) Bestimmen Sie alle Lücken von $f$. Welcher Art sind diese Lücken?
b) Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung von $f$ und die Grenzwerte an den Definitionsrändern.
c) Besitzt $f$ eine Asymptote? Wenn ja, bestimmen Sie eine Gleichung für sie.
d) (Nachträglich zugefügt) Schneidet der Graph die Asymptote?
e) Skizzieren Sie einen – mit Ihren Ergebnissen kompatiblen – möglichen Verlauf des Graphen von $f$.

**Lösung:**
a) Lücken sind die Nullstellen des Nenners:

$$\begin{aligned}
1 - x - 6x^2 = 0 &\iff x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0\\
&\iff x = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{1}{6}} = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144}} = -\frac{1}{12} \pm \frac{5}{12}\\
&\iff x = \frac{1}{3} \ \vee\ x = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Die Lücken von $f$ sind $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$.
$-\frac{1}{2}$ ist keine Nullstelle des Zählers von $f$, also ein *Pol* von $f$.
Die Lücke $\frac{1}{3}$ ist auch Nullstelle des Zählers. Also lässt sich in Zähler und Nenner der Linearfaktor $x - \frac{1}{3}$ abspalten und kürzen. Da $\frac{1}{3}$ einfache Nullstelle des Nenners ist, fällt nach dem Kürzen im Nenner der Linearfaktor $x - \frac{1}{3}$ weg: $\frac{1}{3}$ ist eine *hebbare Lücke.*
b) Der Zählergrad ist gößer als der Nennergrad und der Quotient der führenden Koeffizienten ist negativ, also ist $f(x)$ *schließlich* negativ.
Wir untersuchen die Vorzeichenwechsel von $f$ und faktorisieren dazu $f(x)$. Der Nenner ist (siehe a)) $1 - x - 6x^2 = -6(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$. Da $\frac{1}{3}$ auch Nullstelle des Zählers ist, muss die Polynomdivision des Zählers durch $x - \frac{1}{3}$ (oder besser durch $3x - 1$) aufgehen:

$$(3x^3 - 4x^2 - 89x + 30) : (3x - 1) = x^2 - x + 30\,.$$

Den quadratischen Faktor kann man nach Vieta (oder mit Hilfe der $p, q$-Formel) faktorisieren: $x^2 - x + 30 = (x - 6)(x + 5)$. Insgesamt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x^3 - 4x^2 - 89x + 30}{1 - x - 6x^2} = \frac{(x-6)(x+5)(3x-1)}{-6(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})} = \frac{3(x-6)(x+5)(x-\frac{1}{3})}{-6(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-6)(x+5)}{x+\frac{1}{2}} =: \tilde{f}(x)\,.
\end{aligned}$$

Die Nullstellen von $\tilde{f}$ und $f$ sind 6 und $-5$. Beide Nullstellen und der Pol $-\frac{1}{2}$ sind einfach, also hat $f$ an allen drei Stellen einen Vorzeichenwechsel. Da $f$ schließlich (genauer für

$x > 6$) negativ ist, ist damit die Vorzeichenverteilung von $f$ bekannt (siehe unten, Schraffur in der Skizze).
Unter den *Definitionsrändern* versteht man die Lücken und $\pm\infty$. Es gilt ganz allgemein: $f$ und $\tilde{f}$ haben an den Definitionsrändern dieselben Grenzwerte (da sie sich allenfalls an einzelnen Lücken unterscheiden, sonst aber identische Werte haben).
Grenzwerte im Unendlichen: Da der Zählergrad von $\tilde{f}$ größer als der Nennergrad und der Quotient der führenden Koeffizienten negativ ist, gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \tilde{f}(x) = -\infty\,.$$

Da die Differenz von Zähler- und Nennergrad 1, also ungerade ist, gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\,.$$

(Beide Grenzwertaussagen kann man auch an einer evtl. Asymptote ablesen, siehe c).)
Grenzwerte an den Lücken: $x_0 = \frac{1}{3}$ ist eine hebbare Lücke, also keine Lücke von $\tilde{f}$. Vielmehr gehört $x_0 = \frac{1}{3}$ zum Definitionsbereich von $\tilde{f}$, so dass wegen der Stetigkeit der rationalen Funktion $\tilde{f}$ (bzw. gemäß den Grenzwertsätzen) gilt

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{3}} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(\frac{1}{3}+5)(\frac{1}{3}-6)}{(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})} = \frac{272}{15} \approx 18{,}13\,.$$

Am Pol $-\frac{1}{2}$ gilt definitionsgemäß

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} |f(x)| = \infty\,.$$

Das Vorzeichen des Grenzwertes hängt davon ab, ob der Grenzübergang von *rechts* ($x > -\frac{1}{2}$) oder von *links* ($x < -\frac{1}{2}$) erfolgt, denn $f$ ändert bei dem Pol sein Vorzeichen. Da $f$ schließlich negativ ist und bei der Nullstelle $+6$ sein Vorzeichen wechselt, gilt $f(x) > 0$ für $-\frac{1}{2} < x < 6$, (vgl. auch die Schraffuren in der untenstehenden Skizze). Also gilt für die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\searrow-\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}} f(x) = \infty\,, \qquad \lim_{x\nearrow-\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x<-\frac{1}{2}}} f(x) = -\infty\,.$$

c) Da der Zählergrad von $\tilde{f}$ (bzw. $f$) um 1 größer ist als der Nennergrad, besitzt $f$ eine schräge Asmyptote. Ihr Anstieg ist der Quotient der führenden Koeffizienten, also $-\frac{1}{2}$. Zur Bestimmung der genauen Asymptotengleichung führen wir eine Polynomdivision durch:

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2}\frac{(x-6)(x+5)}{(x+\frac{1}{2})} = \frac{-x^2+x+30}{2x+1} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{117}{4(2x+1)}$$

Damit ist $q(x) = -\frac{-1}{2}x + \frac{3}{4}$ ein Funktionsterm für die Asymptote.
Hieraus kann man erneut die Grenzwerte von $f$ im Unendlichen bestimmen, denn

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} q(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}) = \mp\infty\,.$$

d) Schnittstellen des Graphen mit der Asymptote sind Lösungen der Gleichung

$$f(x) = q(x) \iff 0 = f(x) - q(x) = \frac{117}{4(2x+1)}\,.$$

Der letztgenannte Bruch wird aber niemals 0: Es gibt keinen Schnittpunkt von Parabel und Asymptote.
e) Um den Graphen von $f$ zu skizzieren, zeichnen wir den Graphen von $\tilde{f}$ und markieren den im Graphen von $f$ fehlenden Punkt an der hebbaren Lücke $\frac{1}{3}$. Dieser 'Lückenpunkt' ist der Punkt $(\frac{1}{3}, \frac{272}{15})$.