

## Aufgaben mit Anwendungsbezug

## 1) Lehrbuch S. 86, Nr. 23

**Lösung:**

Die Forderungen an die gesuchte Funktion  $f(x) = ax^2 + bx + c$  lauten:

$$f(0) = 0, \quad f(50) = 10, \quad f'(10) = 1.$$

Diese stellen 3 Gleichungen für die Unbekannten  $a, b, c$  dar, und zwar *lineare* Gleichungen, da diese Unbekannten nur in erster Potenz auftreten. (Vorsicht:  $x$  ist nicht gesucht,  $x$  ist die Funktionsvariable.) Wegen  $0 = f(0) = c$  ist  $c$  bekannt und es verbleiben zwei lineare Gleichungen für  $a, b$ . Wir berechnen zunächst allgemein  $f'(x) = 2ax + b$  und stellen nun die beiden Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} 10 = f(50) &= a \cdot 50^2 + b \cdot 50 \iff 2500a + 50b = 10, \\ 1 = f'(50) &= 2a \cdot 50 + b \iff 100a + b = 1. \end{aligned}$$

Wir lösen dieses lineare Gleichungssystem, etwa mit dem Einsetzungsverfahren ( $b = 1 - 100a$ ) und erhalten

$$10 = 2500a + 50(1 - 100a) \iff 2500a = 40 \iff a = \frac{2}{125} = 0,016.$$

Daraus ergibt sich dann  $b = 1 - \frac{200}{125} = -\frac{3}{5} = -0,6$ . Die gesuchte Funktion ist also

$$f(x) = 0,016x^2 - 0,6x.$$

b) Bestimmung von  $T$ : Wir berechnen zunächst die *möglichen* Extremstellen, d. h. die stationären Stellen von  $f$ :

$$f'(x) = 2 \cdot 0,016x - 0,6 = 0,032x - 0,6 = 0 \iff x = 18,75.$$

Der zugehörige stationäre Punkt  $(18,75; f(18,75)) = (18,75; -5,625)$  muss der gesuchte Tiefpunkt sein, da die Funktion  $f$  quadratisch ist mit nach oben geöffneter Parabel als Graph. (Alternativ:  $f'$  ist linear, die einzige Nullstelle also einfach und mit VZW, der führende Koeffizient von  $f'$  ist positiv,  $f$  also schließlich steigend.)

Bestimmung von  $D$ : Der Durchhang ist der Abstand zwischen Seil und Verbindungslinie  $\overline{AB}$ . Diese Verbindungslinie wird beschrieben durch die lineare Funktion  $g(x) = \frac{10}{50} \cdot x = \frac{x}{5}$ . Damit beträgt der Durchhang

$$d(x) = g(x) - f(x) = \frac{1}{5}x - 0,016x^2 + \frac{3}{5}x = -0,016x^2 + \frac{4}{5}x.$$

Wir untersuchen nun (wie eben) diese Funktion auf ein Minimum:

$$d'(x) = -0,032x + \frac{4}{5} = 0 \iff x = 25.$$

Da  $d'$  linear ist, liegt an der Nullstelle ein VZW vor,  $d$  hat also bei  $x = 25$  ein Extremum. Dieses muss ein Maximum sein, da  $d$  quadratisch ist und der Graph eine nach unten geöffnete Parabel. (Alternativ: Der führende Koeffizient von  $d'$  ist negativ,  $f$  also schließlich fallend, so dass der letzte (=einzige) Extrempunkt ein Maximum sein muss.) Damit ist der gesuchte Punkt  $D = (25, f(25)) = (25, -5)$ .

Korr!

## 2) Lehrbuch S. 87, Nr. 8

### Lösung:

Die Funktion  $h$  beschreibt die Höhe der Leiste in Abhängigkeit von der  $x$ -Koordinate (=Abstand von der linken Kante) (dies ist nicht die Breite der Leiste; diese beträgt 10 cm).

Die Höhe der Leiste an den Außenkanten beträgt  $h(0) = 3$  und  $h(10) = \frac{83}{15}$ , unterschreitet den geforderten Wert also nicht.

Wir untersuchen nun, ob  $h$  im Innern des Intervalls einen Minimalwert annimmt. Dazu ermitteln wir zunächst die stationären Stellen:

$$\begin{aligned} h'(x) = \frac{1}{25}x^2 - \frac{9}{25}x + \frac{18}{25} = 0 &\iff 0 = x^2 - 9x + 18 \stackrel{\text{(Vieta!)}}{=} (x-3)(x-6) \\ &\iff x = 3 \vee x = 6. \end{aligned}$$

Da  $h'$  quadratisch ist, sind die beiden (verschiedenen) Nullstellen einfach, also Extremstellen von  $f$ . Die letzte Extremstelle 6 ist Minimalstelle, da  $f$  schließlich steigt. Der Minimalwert ist  $h(6) = 3,72$ , der Minimalwert wird also nicht unterschritten.

## 3) Lehrbuch S. 87, Nr. 9

### Lösung:

Angesichts der Skizze sollte man besser von der *Breite* des Fertigteils als von der Länge sprechen. Die Höhe des Betonteils ist an der Stelle  $x$  gegeben durch

$$h(x) = f(x) - g(x) = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{23}{20}x^2 - \frac{33}{10}x + 3.$$

Damit beträgt die Höhe an den Rändern  $h(0) = 3$ ,  $h(6) = 3$ .

Innere Extrema sind notwendig Nullstellen von  $h'$ :

$$\begin{aligned} h'(x) = -\frac{3}{10}x^2 + \frac{23}{10}x - \frac{33}{10} = 0 &\iff x^2 - \frac{23}{3}x + 11 = 0 \\ &\iff x = \frac{23}{6} \pm \sqrt{\frac{529 - 396}{36}} = \frac{1}{6} \cdot (23 \pm \sqrt{133}) \end{aligned}$$

Damit hat  $h$  zwei stationäre Stellen  $x_1 \approx 1,91$  und  $x_2 \approx 5,76$ . Beides sind Extremstellen (da einfache Nullstellen der quadratischen Ableitung  $h'$ ), und zwar ist  $x_2$  Maximalstelle, da  $h$  schließlich fällt (führender Koeffizient von  $h'$  ist negativ), während  $x_1$  Minimalstelle ist. Der innere Maximalwert beträgt  $h(x_2) \approx 3,04$  und der innere Minimalwert  $h(x_1) = 0,2$ . Ein Vergleich mit den Randwerten (beide gleich 3) zeigt, dass diese lokalen Extremwerte auch die absoluten Extremwerte über diesem Intervall  $0 \leq x \leq 6$  sind.

## 4) Lehrbuch S. 97, Nr. 1

### Lösung:

Die Verbrauchsfunktion  $f(x) = 0,0017x^2 - 0,18x + 10,2$  ist quadratisch, ihr Graph also eine Parabel. Diese ist nach oben geöffnet und ihr Scheitelpunkt ist folglich der einzige Extrempunkt, und zwar ein Minimalpunkt. (Den Scheitelpunkt könnte man ohne Differentialrechnung mittels quadratischer Ergänzung bestimmen.) Dort liegt also auch das absolute Minimum von  $f$ . Mit Differentialrechnung geht man wie folgt vor:

Da  $f$  quadratisch ist, ist  $f'$  linear und hat damit nur eine Nullstelle, und zwar mit Vorzeichenwechsel:

$$f'(x) = 0,0034x - 0,18 = 0 \iff x = \frac{0,18}{0,0034} \approx 52,9.$$

An dieser Stelle hat  $f$  sein absolutes Minimum; der minimale Wert beträgt  $f(52,9) = 5,4$ . Bei der Geschwindigkeit  $52,9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  ist der Spritverbrauch mit  $5,4 \frac{1}{100 \text{ km}}$  minimal.

### 5) Lehrbuch, S. 98, Nr. 2

#### Lösung:

a) Die Höhe des Bogens ist durch den  $y$ -Achsenabschnitt gegeben: 187,5 m. (Dabei benutzen wir den gegebenen Graphen<sup>1)</sup>.) Wir bestimmen den Schnittpunkt des Innenbogens mit der Grundfläche:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 187,5 - 1,579 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 1,988 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 = 0 \\ &\iff z = x^2 \wedge 1,988 \cdot 10^{-6} \cdot z^2 + 1,579 \cdot 10^{-2} z - 187,5 = 0 \\ &\iff z = x^2 \wedge 0 = z^2 + \frac{15790}{1,988} z - \frac{187,5}{1,988} \cdot 10^6 = z^2 + 7942,66z - 94,32 \cdot 10^6 \\ &\iff x^2 = z \approx -3971,33 \pm \sqrt{3971,33^2 + 94315895,37} \approx -3971,33 \pm 10492,25 \\ &\iff x \approx \pm \sqrt{6520,92} \approx \pm 80,75. \end{aligned}$$

Die Breite des Innenbogens beträgt also ungefähr 161,5 m.

b) Wir berechnen den Anstieg von  $f$  an der linken Nullstelle:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3,16 \cdot 10^{-2} x - 7,95 \cdot 10^{-6} x^3 = -10^{-2} \cdot x \cdot (3,16 + 7,95 \cdot 10^{-4} \cdot x^2), \\ f'(-80,75) &= 0,8075 \cdot (3,16 + 7,95 \cdot 0,8075^2) \approx 6,74. \end{aligned}$$

Der Schnittwinkel  $\alpha$  des Bogens mit der Horizontalen ist der Winkel zwischen der Tangente und der Horizontalen, und dieser ist durch den Anstieg gegeben:  $\tan \alpha = f'(x)$ . Hier also

$$\alpha = \arctan f'(-80,75) \approx \arctan 6,74 \approx 81,56^\circ.$$

c) Die rechte Flügelspitze des Flugzeugs hat die Koordinaten  $(9, y)$ . Die Forderungen nach 10 m Sicherheitsabstand besagen:

1. Der 10 Meter höher liegende Punkt  $(9, y + 10)$  soll unter dem Bogen liegen, also  $y + 10 \leq f(9) \iff y \leq f(9) - 10$ .

2. Der 10 Meter weiter rechts liegende Punkt  $(9 + 10, y)$  soll ebenfalls unter dem Bogen liegen, also  $y \leq f(9 + 10) = f(19)$ .

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} f(9) - 10 &= 187,5 - 10 - 1,579 \cdot 10^{-2} \cdot 9^2 - 1,988 \cdot 10^{-6} \cdot 9^4 \approx 176,21, \\ f(19) &= 187,5 - 1,579 \cdot 10^{-2} \cdot 19^2 - 1,988 \cdot 10^{-6} \cdot 19^4 \approx 181,54. \end{aligned}$$

Das Flugzeug darf also die kleinere der beiden berechneten Höhen nicht übersteigen, also maximal 176,21 Meter hoch fliegen.

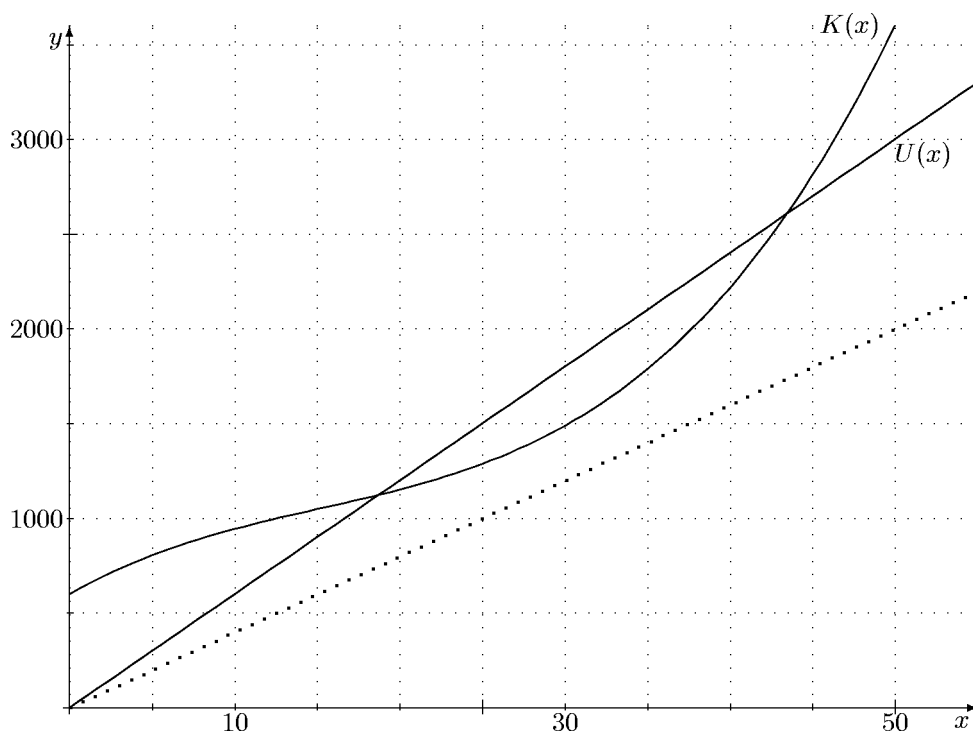
---

<sup>1)</sup> Rechnerische Überprüfung, dass der gegebene Graph korrekt ist:  $f$  ist achsensymmetrisch.  $f$  ist ganzrational mit negativem führendem Koeffizienten, also  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ ,  $f$  besitzt also ein absolutes Maximum.  $f'(x)$  enthält nur Potenzen mit ungeraden Exponenten, hat also 0 als Nullstelle, Ausklammern von  $-x$  liefert einen quadratischen Term  $ax^2 + b$  mit  $a, b > 0$ , also ohne Nullstelle, vgl. b). Die einzige stationäre Stelle 0 muss also die Stelle des absoluten Maximums sein.

6) Lehrbuch S. 98, Nr. 4:

**Lösung:**

a) Die Graphen:



Im Bereich, in dem der Umsatz höher ist als die Kosten, macht das Unternehmen Gewinn, also (aus der Zeichnung abgelesen) etwa im Bereich  $19 \leq x \leq 43$ .

b) Wir untersuchen die Gewinnfunktion  $G$  (im Bereich  $x \geq 0$ ):

$$G(x) = U(x) - K(x) = -0,044x^3 + 2x^2 + 10x - 600,$$

$$G'(x) = -0,132x^2 + 4x + 10 = 0 \iff x^2 - 30,3x - 75,76 = 0$$

$$\iff x = 15,15 \pm \sqrt{15,15^2 + 75,76} \iff x \approx 32,63.$$

(Die negative stationäre Stelle kommt für das Problem nicht in Frage.) An der (einzig) stationären Stelle hat der Gewinn ein Maximum, da die Gewinnfunktion schließlich fällt. Der maximale Gewinn beträgt  $G(32,63) = 327,1$ .

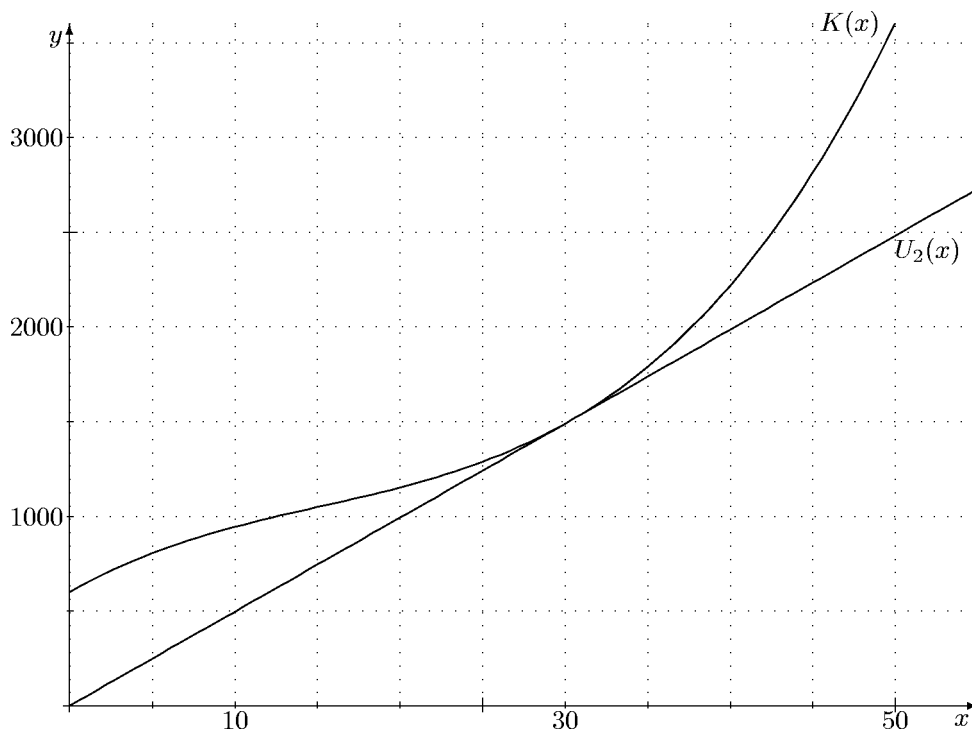
Wenn die Produktionseinheiten nicht teilbar sind (etwa Autos), so muss man die beiden Werte  $G(32) = 326,21$  und  $G(33) = 326,77$  berechnen. Der letztere gibt also den maximalen Gewinn an.

c) Die veränderte Umsatzfunktion ist oben bereits gestrichelt eingezeichnet. Sie liegt immer unterhalb der Kostenfunktion, ein Gewinn ist nicht möglich.

d) Präzisierung der Fragestellung: Statt *verlustfrei arbeiten kann* und *verlustfrei zu produzieren* sollte es besser heißen: ... *bei der das Unternehmen die Möglichkeit hat, (bei passenden Verkaufszahlen) verlustfrei zu arbeiten*.

Wir suchen also eine Umsatzfunktion  $U_2(x) = px$  mit möglichst kleinem Stückpreis  $p$ ,

deren Graph die Kostenfunktion trifft. Hier zunächst die zeichnerische Lösung:



Ist  $x$  die Stelle, an der die gesuchte Umsatzfunktion die Kostenfunktion berührt, so muss gelten:

$$\begin{aligned} U_2(x) = K(x) \wedge U_2'(x) = K'(x) &\iff px = K(x) \wedge p = K'(x) \\ &\iff K(x) = xK'(x) \wedge p = K'(x). \end{aligned}$$

Wir müssen also die kubische Gleichung  $K(x) = xK'(x)$  lösen. Dies ist nur näherungsweise (oder mit kubischen Auflösungsformeln, etwa einem **Computer Algebra System** (CAS)) möglich.

Wir suchen Nullstellen von

$$\begin{aligned} h(x) &= xK'(x) - K(x) = x(0,132x^2 - 4x + 50) - (0,044x^3 - 2x^2 + 50x + 600) \\ &= 0,88x^3 - 2x^2 - 600. \end{aligned}$$

Aus der Skizze entnimmt man zunächst einen Näherungswert von  $\approx 30$ . Wir schachteln nun die gesuchte Nullstelle ein, indem wir Funktionswerte und deren Vorzeichen bestimmen:

$x$	30	31	30,1	30,2	30,3
$h(x)$	-24	99,61	-12,18	-0,24	11,82

$h$  hat also an den Stellen 30,2 und 30,3 Funktionswerte mit unterschiedlichem Vorzeichen und ist dazwischen definiert und stetig, also muss dazwischen eine Nullstelle liegen (Zwischenwertsatz). Durch die Berechnung weiterer Zwischenwerte ( $h(30,25) = 5,77$ ) kann man die Nullstelle weiter einschachteln (sie muss zwischen 30,2 und 30,25 liegen). Wir können also sagen: Eine Nullstelle von  $h$  liegt ungefähr (gerundet) bei 30,2. Der zugehörige Preis ist  $p = K'(30,2) = 0,132 \cdot 30,2^2 - 4 \cdot 30,2 + 50 = 49,59$ . Bei einem niedrigeren Preis macht die Firma *immer* Verlust.

**7) Lehrbuch S. 105, Nr. 9:**

**Lösung:**

Sei  $x > 0$  die Höhe des entstehenden Kartons. Dann hat die Grundfläche die Maße  $\frac{40-3x}{2}$  und  $20-2x$ . Diese beiden Maße müssen positiv sein, also  $x < 10$ . Für  $0 < x < 10$  entsteht so ein Karton mit dem Volumen

$$V(x) = x \cdot \frac{40-3x}{2} \cdot (20-2x) = \frac{x}{2}(800 - 140x + 6x^2) = 3x^3 - 70x^2 + 400x.$$

Wir bestimmen die Nullstellen der Ableitung

$$\begin{aligned} V'(x) = 9x^2 - 140x + 400 = 0 &\iff x^2 - \frac{140}{9}x + \frac{400}{9} = 0 \iff \\ x = \frac{70}{9} \pm \frac{1}{9}\sqrt{70^2 - 9 \cdot 400} &= \frac{70}{9} \pm \frac{10}{9}\sqrt{7^2 - 9 \cdot 4} = \frac{70}{9} \pm \frac{10}{9}\sqrt{13} \approx 7,78 \pm 4,01 \end{aligned}$$

Da  $x < 10$  sein muss, kommt nur der Wert

$$x = \frac{70}{9} - \frac{10}{9}\sqrt{13} \approx 3,77$$

als Extremstelle in Frage.

Da  $V'$  quadratisch ist und beide Nullstellen einfach, sind beide stationären Stellen Extremstellen von  $V$ . Die größere ist eine Minimalstelle, da der führende Koeffizient von  $V$  positiv ist, und an der gefundenen Stelle  $x \approx 3,77$  liegt das gesuchte Maximum. Das maximale Volumen beträgt  $V(3,77) = 673,84$  Kubikzentimeter.

**8) Lehrbuch S. 105, Nr. 10:**

**Lösung:**

a) Zielgröße: Gesamtlänge der Nähte  $l = 4\pi r + h$ ,

Nebenbedingung (=Kopplung der Größen  $h$  und  $r$ ):  $V = \pi r^2 \cdot h$ .

Eliminiere mit Hilfe der Nebenbedingung die Größe  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ .

Zielfunktion ist die rationale Funktion von  $r$ :

$$l(r) = 4\pi r + h = 4\pi r + \frac{V}{\pi r^2}$$

Ableitung:

$$l(r) = 4\pi r + \frac{V}{\pi}r^{-2} \implies l'(r) = 4\pi - \frac{2V}{\pi}r^{-3}.$$

Nullstellen der Ableitung:

$$0 = l'(r) = 4\pi - \frac{2V}{\pi r^3} = \frac{4\pi^2 r^3 - 2V}{\pi r^3} \iff r^3 = \frac{V}{2\pi^2} \iff r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}.$$

Extremstelle: Der Zähler von  $l'$  ist  $4\pi^2 r^3 - 2V$ ; er ist monoton wachsend und ändert an seiner einzigen Nullstelle sein Vorzeichen von  $-$  zu  $+$ , während der Nenner dort positiv ist. Also ist die gefundene stationäre Stelle von  $l$  eine Minimalstelle von  $l$ .

Alternative Argumentation: Die Zielfunktion hat die Randgrenzwerte  $\lim_{x \rightarrow 0} l(r) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} l(r) = \infty$ . Also muss  $l$  im Definitionsbereich  $]0, \infty[$  wenigstens ein Minimum haben. Da es nur eine stationäre Stelle gibt, muss dies die Minimalstelle sein, und zwar liegt dort das absolute Minimum.

Die zugehörige Höhe ist

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}} = \sqrt[3]{4\pi V}.$$

Die zugehörige minimale Nahtlänge ist

$$l\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}\right) = 4\pi \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}} + \sqrt[3]{4\pi V} = 2\sqrt[3]{4\pi V} + \sqrt[3]{4\pi V} = 3\sqrt[3]{4\pi V}.$$

Die minimale Nahtlänge ist also dreimal so groß wie die Höhe; die drei einzelnen Nahtstücke sind also *gleich lang!*

b) Zielgröße: Oberfläche  $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi(r^2 + rh)$ ,

Wie in a) eliminieren wir  $h$  und erhalten die Zielfunktion

$$O(r) = 2\pi\left(r^2 + r \frac{V}{\pi r^2}\right) = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi r}\right).$$

Ableitung:

$$O(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi} r^{-1}\right) \implies O'(r) = 2\pi\left(2r - \frac{V}{\pi} r^{-2}\right).$$

Stationäre Stellen:

$$0 = O'(r) = 2 \cdot \frac{2\pi r^3 - V}{r^2} \iff r^3 = \frac{V}{2\pi} \iff r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Extremstelle: Wie oben für  $l'$  argumentieren wir hier:  $O'$  hat an seiner einzigen Nullstelle einen Vorzeichenwechsel von  $-$  zu  $+$ ,  $O$  hat dort also ein Minimum.

[Alternative Argumentation wie in a) mit den Randgrenzwerten (auch hier jeweils  $\infty$ ).]

Die zugehörige Höhe ist

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Beachten Sie, dass die Höhe doppelt so groß ist wie der Radius:

$$h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r,$$

d. h.  $h$  ist *genauso* groß wie der Durchmesser. Oder anders formuliert: Der senkrechte Dosenquerschnitt ist ein Quadrat! Für die minimale Oberfläche ergibt sich dann

$$O\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}} + \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}\right) = \sqrt[3]{2\pi V^2} + 2\sqrt[3]{2\pi V^2} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Dies bedeutet, dass die Mantelfläche doppelt so groß ist wie Boden und Deckel zusammen.