Arbeitsauftrag: Eine Grenzwertbestimmung

Sie sollen mit den Ihnen zur Verfügung stehenden Mitteln der Differentialrechnung die folgende Grenzwertaussage herleiten:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 \text{ für jedes } k = 0, 1, 2, 3\ldots.}$$

Untersuchen Sie dazu die Funktionenschar $f_k(x) = x^k e^{-x}$ $(k = 0, 1, 2, 3\ldots)$:
a) Zeigen Sie, dass alle Funktionen f_k im Bereich $x \geq 0$ einen absolut größten Wert M_k besitzen.
b) Folgern Sie für $x > 0$:

$$0 \leq f_k(x) = \frac{f_{k+1}(x)}{x} \leq \frac{M_{k+1}}{x}\,.$$

c) Folgern Sie daraus die obige Grenzwertaussage.

Lösung:
a) Wir untersuchen f_k auf Extrema im Bereich $x \geq 0$. Der Fall $k = 0$ ist ein Sonderfall: $f_0(x) = e^{-x}$ ist streng monoton fallend mit $f_0(0) = 1$. Also ist $M_0 = 1$.
Sei nun $k \geq 1$. (Dann ist $f_k(0) = 0$ und $f_k(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$: 0 ist also das absolute Minimum von f_k im Bereich $x \geq 0$.) Wir berechnen die erste Ableitung

$$f_k'(x) = kx^{k-1} \cdot e^{-x} + x^k \cdot (-e^{-x}) = (k - x) \cdot x^{k-1} e^{-x}\,.$$

Wir erkennen, dass f_k' nur die Nullstellen $x = k$ und (im Falle $k - 1 \geq 1$) $x = 0$ hat. Bei $x = k$ wechselt f_k' sein Vorzeichen von $+$ zu $-$ (Faktor $(k - x)$!), also hat f_k dort eine Maximalstelle mit dem Maximalwert $f_k(k) = k^k e^{-k} =: M_k$. Dies ist zugleich das absolute Maximum von f_k, da im Bereich $x \geq 0$ allenfalls bei 0 noch ein Extremum liegen könnte, welches dann ein Minimum sein müsste. (Genauer: 0 ist (für $k-1 \geq 1$) eine $k-1$-fache Nullstelle von f_k', also eine Sattelstelle bei geradem $k-1$ (also ungeradem k) und eine Extremstelle bei ungeradem $k-1$ (also geradem k).) Insgesamt ist a) bewiesen mit dem obigen Wert $k^k e^{-k} = (\frac{k}{e})^k$.
b) Für $x > 0$ gilt:

$$0 < x^k e^{-x} = \frac{x^{k+1}}{x} e^{-x} = \frac{f_{k+1}(x)}{x} \leq \frac{M_{k+1}}{x}\,.$$

c) Damit ist $f_k(x)$ eingeschachtelt zwischen 0 und $\frac{M_{k+1}}{x}$:

$$0 \leq f_k(x) \leq \frac{M_{k+1}}{x}\,.$$

Für $x \to \infty$ hat $\frac{M_{k+1}}{x}$ den Grenzwert 0 (Grenzwertsätze), also ist $f_k(x)$ ‘eingeschachtelt’ zwischen 0 und eine Funktion mit Grenzwert 0, also muss auch $f_k(x)$ gegen 0 streben für $x \to \infty$:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & f_k(x) & \leq & \frac{M_{k+1}}{x} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f_k(x) = 0$$

In Ergänzung zum Arbeitsauftrag hier Skizzen der ersten 5 Graphen. Die jeweiligen Hochpunkte sind markiert.