Übungsaufgabe

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie für ganzrationale Funktionen f vom Grade 3 die folgende Äquivalenz: $W = (0 \mid 0)$ ist genau dann Wendepunkt, wenn der Graph von f punktsymmetrisch ist.

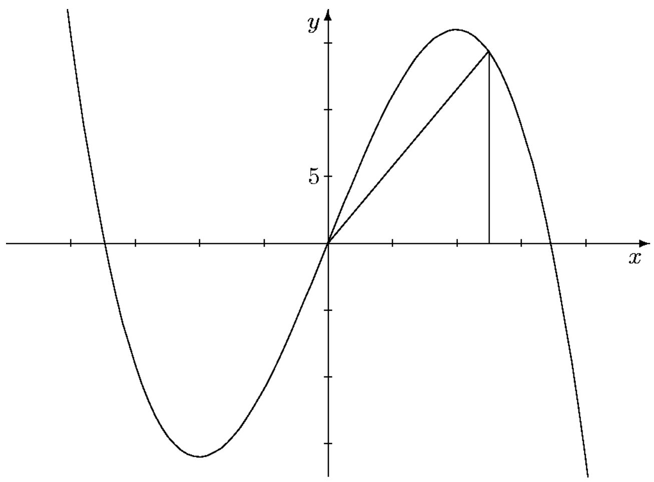
b) Bestimmen Sie alle ganzrationalen Funktionen vom Grade 3 mit dem Wendepunkt $W = (0 \mid 0)$ und einem Extremum an der Stelle $x = 2$. Für welche dieser Funktionen schließt der Graph von f mit der x-Achse eine Fläche von 72 Flächeneinheiten ein?
c) Skizzieren Sie die Graphen aller in b) ermittelten Funktion. In das Flächenstück zwischen dem Graphen von f und dem positiven Teil der x-Achse seien rechtwinklige Dreiecke so eingezeichnet, dass die Hypotenuse den Koordinatenursprung mit einem Punkt des Funktionsgraphen verbindet und eine Kathete auf der x-Achse liegt (Skizze). Welches dieser Dreiecke hat den größten Flächeninhalt?

Übungsaufgabe — Lösungen

1) a) Eine ganzrationale Funktion vom Grade 3 hat als Funktionsterm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a \neq 0$. Da die zweite Ableitung $f''(x) = 6ax + 2b$ Grad 1 hat, wechselt sie an ihrer Nullstelle das Vorzeichen, also ist 0 *genau* dann eine Wendestelle von f, wenn 0 eine Nullstelle von f'' ist, also $b = 0$ ist. Außerdem verläuft der Graph von f genau dann durch den Koordinatenursprung, wenn $d = 0$ ist. Dies bedeutet zusammen aber nichts anderes als $f(x) = ax^3 + cx$, der Graph ist punktsymmetrisch.
b) Es ist nach a) $f(x) = ax^3 + cx$, also $f'(x) = 3ax^2 + c$. Da f nur einen Wendepunkt haben kann und dieser bei $(0 \mid 0)$ liegt, kann 2 keine Sattelstelle von f sein. Also liegt bei 2 *genau* dann ein Extremum vor, wenn $f'(2) = 0$ ist. Nun gilt: $f'(2) = 0 \iff 12a + c = 0 \iff c = -12a$. Dies ergibt für die gesuchten Funktionsterme die Form $f_a(x) = ax^3 - 12ax = a(x^3 - 12x)$. Die Nullstellen dieser Funktionen sind 0 sowie $\pm\sqrt{12}$. Die zwischen Graph und x-Achse eingeschlossene Fläche berechnet sich (aus Symmetriegründen) durch

$$A = 2\left|\int_0^{\sqrt{12}} a(x^3 - 12x)\,dx\right| = 2|a|\left|\left[\frac{x^4}{4} - 6x^2\right]_0^{\sqrt{12}}\right| = 72 \cdot |a|\,.$$

Wenn $A = 72$ sein soll, muss also $|a| = 1$, d. h. $a = \pm 1$ sein.
Skizze für $a = -1$ (für $a = +1$ gespiegelt an der x-Achse):



c) Da die Graphen für $a = \pm 1$ zueinander spiegelbildlich sind, ergibt sich derselbe maximale Flächeninhalt.
Lösung von c) für $a = -1$: Es sei $(x \mid f(x))$ $(0 \leq x \leq \sqrt{12})$ der auf dem Graphen liegende Dreieckspunkt (siehe Skizze), dann ist die Fläche des Dreiecks

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 6x^2\,.$$

$A'(x) = -2x^3 + 12x$ hat die Nullstellen $x = 0$ sowie $x = \pm\sqrt{6}$. Von diesen liegt nur $\sqrt{6}$ im betrachteten Intervall $[0, \sqrt{12}]$, muss also das dort existierende Maximum liefern ($A(0) = A(\sqrt{12}) = 0$). Die maximale Dreiecksfläche beträgt dann 18.