

# I. Funktionsverlauf rationaler Funktionen

## §1 Ganzrationale Funktionen und ihre Nullstellen

**a. Der Funktionsbegriff.** Wir wiederholen aus der Einführungsphase

Eine *Funktion* ist eine *Zuordnung*, die jeder Zahl  $r$  (aus einer Menge  $D$ ) eine eindeutig bestimmte Zahl  $f(r)$  zuordnet. Man nennt  $f(r)$  (lesen Sie ‘ $f$  von  $r$ ’) den *Funktionswert* von  $f$  an der Stelle  $r$ .  
Die Menge  $D$  nennen wir den *Definitionsbereich* von  $f$  und schreiben für solche Funktionen auch  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  (lesen Sie: ‘ $f$  von  $D$  in  $\mathbb{R}$ ’).

Welcher Art die Zuordnung ist, ist dabei unerheblich; entscheidend ist, dass

1. jedem Element der Menge  $D$  eine Zahl zugeordnet wird, und
2. dass das zugeordnete Element jeweils *eindeutig* bestimmt ist.

Eine sehr einfache Methode, eine Funktion  $f$  zu definieren, ist die Angabe eines *Funktionsterms*  $f(x)$  für  $f$  (beispielsweise  $f(x) = 3x + 1$  oder  $f(x) = 2x^2 - x + 3$  o.ä.). Die Zuordnungsvorschrift für  $f$  lautet dann:

Setze im Term  $f(x)$  für die Variable  $x$  eine beliebige Zahl  $r$  ein und rechne aus. Das Ergebnis ist der dieser Zahl zugeordnete Funktionswert  $f(r)$ .

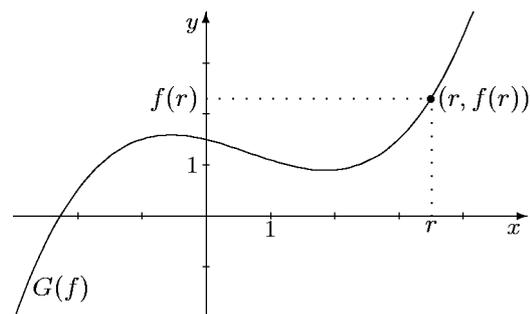
Diese Vorschrift liefert zu einer Zahl  $r$  aber nur dann einen Funktionswert  $f(r)$ , wenn die Einsetzung in den Term möglich ist, d. h. wenn  $r$  zum Definitionsbereich des Terms gehört. Dies bedeutet, dass der *Definitionsbereich des Funktionsterms*  $f(x)$  (wie früher schon definiert) gleich dem *maximalen* Definitionsbereich  $\mathbb{D}_f$  der Funktion  $f$  im hier definierten Sinne ist.

Einen ersten (sehr begrenzten) Eindruck von einer Funktion erhält man durch eine *Wertetabelle*, etwa:

$x$	0	1	2	3	4	-1	-2	-3
$f(x)$	-7	1	4	-3	2	1	1	-2

Die Bedeutung ist wohl klar: Zu jeder Zahl  $x$  der ersten Zeile ist der zugeordnete Wert  $f(x)$  in der zweiten Zeile angegeben. Eine Wertetabelle kann aber immer nur eine begrenzte Information über die Funktion geben.

Die zweite wichtigere Möglichkeit ist die Darstellung einer Funktion durch ihren Graphen. Für jedes Element  $r$  des Definitionsbereiches  $D$  markiert man (siehe nebenstehende Skizze) im Koordinatenkreuz den Punkt  $(r, f(r))$ , dessen  $x$ -Koordinate  $r$  und dessen  $y$ -Koordinate der zugehörige Funktionswert  $f(r)$  ist. Die Menge aller dieser Punkte  $(r, f(r))$  in der  $x$ - $y$ -Ebene ist der *Graph* von  $f$ .



Der Graph einer Funktion  $f$  ist die Menge aller Punkte der Form  $(r, f(r))$ :

$$G(f) = \{(r, f(r)) \mid r \in D\} = \{(r, s) \mid s = f(r)\}.$$

$G(f)$  ist also nichts anderes als die Lösungsmenge der *Funktionsgleichung*  $y = f(x)$ .

Der Graph einer Funktion hat eine sehr suggestive, anschauliche Aussagekraft, ist aber wie jede graphische Darstellung von begrenzter Genauigkeit. Ist dagegen eine Funktion durch einen Funktionsterm definiert, so kann man jeden gewünschten Funktionswert mit beliebiger

Genauigkeit berechnen. Man kann also Wertetabellen (beliebiger Länge) erstellen und die dabei gefundenen Ergebnisse ins Koordinatenkreuz eintragen. Da man aber nur endlich viele Punkte zur Verfügung hat, bleiben immer Lücken, man erhält nie eine geschlossene Kurve. Man kann zwar vermuten, wie etwa der Verlauf dazwischen ist, man hat aber keine Sicherheit. Eines der fundamentalen Themen wird es sein, *vom Funktionsterm auf Gestalt und Eigenschaften des Graphen zu schließen*, und dies mit möglichst geringem Rechenaufwand.

**b. Polynomterme und ganzrationale Funktionen.** In der Einführungsphase haben Sie die Funktionsgraphen für zwei grundlegende Funktionenklassen bereits studiert:

1. Die *linearen* Funktionen (Funktionsterm  $f(x) = mx + n$ ) haben als Graphen Geraden (genauer: die Gerade mit dem *Anstieg*  $m$  und dem  $y$ -Achsenabschnitt  $n$ ).
2. Die *quadratischen* Funktionen (Funktionsterm  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ) haben als Graphen Parabeln. (Genauer: Das Vorzeichen von  $a$  bestimmt die Öffnungsrichtung der Parabel und der Betrag von  $a$  ist ein Maß für die *Weite* der Parabel. Mittels quadratischer Ergänzung kann man den Funktionsterm in die Scheitelpunktsform  $f(x) = a(x - d)^2 + e$  überführen, aus der man den Scheitelpunkt  $(d, e)$  der Parabel abliest.)

Im Folgenden wollen wir diese Untersuchungen aus der Einführungsphase ausdehnen auf allgemeinere Funktionen. Im Schulbereich werden nur Funktionen in *einer* Variablen betrachtet. Die Funktionsterme werden also aus der *Funktionsvariablen*  $x$  und *Zahlen* mit Hilfe der Rechenoperationen  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$  und  $:$  (bzw. stattdessen den Bruchstrich) aufgebaut. Wie wir wissen, bringt die Division Probleme mit dem Definitionsbereich (Division durch 0 ist nicht möglich). Wir betrachten daher zunächst nur Funktionsterme, die die Division *nicht* enthalten. Diese können wir (durch Ausmultiplizieren und Umsortieren) in die folgende Form bringen:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (*)$$

mit  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ . Ein solcher Term ist eine Summe von Vielfachen von Potenzen von  $x$ , sortiert nach absteigenden Exponenten von  $x$ , ein sog. *Polynomterm*. Die Faktoren  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  vor den Potenzen der Variablen  $x$  nennt man die *Koeffizienten* des Polynomterms. Beispiele:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2 &= 3x^2 + 0 \cdot x + (-2) : \\ &n = 2, a_2 = 3, a_1 = 0, a_0 = -2, \\ -7x^4 + 13x^3 - 2x - 1 &= -7x^4 + 13x^3 + 0 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + (-1) : \\ &n = 4, a_4 = -7, a_3 = 13, a_2 = 0, a_1 = -2, a_0 = -1. \end{aligned}$$

Ist  $a_n \neq 0$ , so ist  $n$  der höchste Exponent der Variablen  $x$ , der in dem Term vorkommt; man nennt dann  $n$  den *Grad*,  $a_n$  den *führenden Koeffizienten* und  $a_n x^n$  den *führenden Term* des Polynomterms:

Ein *Polynomterm* vom Grade  $n$  ist ein Term der obigen Form (\*) mit  $a_n \neq 0$ ; sein führender Koeffizient ist  $a_n$ , sein führender Term  $a_n x^n$ .

In den beiden Beispielen oben ist der Grad 2 bzw. 4, der führende Koeffizient 3 bzw.  $-7$  und der führende Term  $3x^2$  bzw.  $-7x^4$ .

Eine *ganzrationale Funktion* (oder auch Polynomfunktion) ist eine Funktion  $f$ , die durch einen Polynomterm definiert werden kann.

Beachten Sie: Sind in (\*) alle Koeffizienten 0, also  $f(x) = 0$ , so spricht man von der *Nullfunktion*. Für diese ist der Grad nicht definiert!

**c. Polynomdivision.** Ganzrationale Funktionen *können*, müssen aber nicht durch Polynomterme beschrieben werden. Sie können auch durch einen formal anders gestalteten Funktionsterm gegeben sein. So ist etwa auch durch den Funktionsterm

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

eine ganzrationale Funktion definiert, da man  $f(x)$  durch ‘Ausmultiplizieren’ als Polynomterm darstellen kann:

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$$

Die nicht ausmultiplizierte, *faktorierte* Form des Funktionsterms hat aber den großen Vorteil, dass man aus ihr unmittelbar die Nullstellen der Funktion  $f$  ablesen kann. Da ein Produkt nur dann 0 sein kann, wenn einer der Faktoren 0 ist, gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0 \\ &\iff x - 1 = 0 \vee x + 2 = 0 \vee x - 3 = 0 \\ &\iff x = 1 \vee x = -2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Zur Nullstellenberechnung ist also eine Zerlegung in Faktoren, insbesondere in lineare Faktoren  $x - a$  sehr nützlich. Das entscheidende Hilfsmittel dabei ist die sog.

**Polynomdivision:** Wir gehen aus von zwei Polynomtermen, etwa

$$f(x) = 3x^5 + 4x^4 - x^2 + 3x - 1 \quad \text{und} \quad g(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Wie von Polynomtermen gefordert, sind sie nach fallenden Exponenten von  $x$  sortiert. Wir wollen versuchen,  $f(x)$  durch  $g(x)$  zu dividieren, und gehen dabei ähnlich vor wie bei der schriftlichen Division mehrstelliger natürlicher Zahlen. Wir beachten zunächst nur die *führenden* Terme in  $f(x)$  bzw.  $g(x)$  und dividieren diese:

$$3x^5 : x^2 = 3x^3.$$

Dann multiplizieren wir den Divisor  $g(x)$  mit  $3x^3$  und subtrahieren dies vom Dividenten  $f(x)$ :

$$\begin{array}{r} (3x^5 + 4x^4 \quad -x^2 + 3x - 1) : (x^2 + 2x - 3) = 3x^3 + \dots \\ -(3x^5 + 6x^4 - 9x^3) \\ \hline -2x^4 + 9x^3 - x^2 + 3x - 1 \end{array}$$

Entscheidend ist, dass bei dieser Subtraktion der führende Term  $3x^5$  gerade *verschwindet*. Es entsteht so ein neues Polynom (wir nennen es  $f_1(x)$ )

$$f_1(x) = f(x) - 3x^3 \cdot g(x) = -2x^4 + 9x^3 - x^2 + 3x - 1,$$

dessen Grad *kleiner* ist als der Grad von  $f$ .

Man arbeitet nun mit  $f_1(x)$  an Stelle von  $f(x)$  weiter: Wieder dividiert man den führenden Term (jetzt  $-2x^4$ ) durch den führenden Term  $x^2$  von  $g(x)$  und erhält als Ergebnis  $-2x^2$ . Damit multipliziert man den Divisor  $g(x)$  und subtrahiert das Produkt von  $f_1(x)$ :

$$\begin{array}{r} (3x^5 + 4x^4 \quad -x^2 + 3x - 1) : (x^2 + 2x - 3) = 3x^3 - 2x^2 + \dots \\ -(3x^5 + 6x^4 - 9x^3) \\ \hline -2x^4 + 9x^3 - x^2 + 3x - 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 6x^2) \\ \hline 13x^3 - 7x^2 + 3x - 1 \end{array}$$

Wieder entsteht ein neues Polynom

$$f_2(x) = f_1(x) - (-2x^2) \cdot g(x) = f(x) - (3x^3 - 2x^2) \cdot g(x) = 13x^3 - 7x^2 + 3x - 1,$$

dessen Grad wiederum wenigstens um 1 niedriger ist. Man verfährt nun weiter wie oben beschrieben bis

$$\begin{array}{r}
 (3x^5 + 4x^4 - x^2 + 3x - 1) : (x^2 + 2x - 3) = 3x^3 - 2x^2 + 13x - 33 + \dots \\
 -(3x^5 + 6x^4 - 9x^3) \\
 \hline
 -2x^4 + 9x^3 - x^2 + 3x - 1 \\
 -(-2x^4 - 4x^3 + 6x^2) \\
 \hline
 13x^3 - 7x^2 + 3x - 1 \\
 -(13x^3 + 26x^2 - 39x) \\
 \hline
 -33x^2 + 42x - 1 \\
 -(-33x^2 - 66x + 99) \\
 \hline
 108x - 100
 \end{array}$$

An dieser Stelle kann man das Verfahren nicht mehr weiterführen, da das *Restpolynom*

$$r(x) = 108x - 100$$

den Grad 1 hat, der führende Term also nicht mehr durch den führenden Term  $x^2$  von  $g(x)$  teilbar ist:

Der Grad des Restpolynoms  $r(x)$  ist *kleiner* als der Grad des Divisors  $g(x)$ .

Dieses ‘Restpolynom’  $r(x)$  ist entstanden, indem wir sukzessive gewisse Vielfache des Divisors  $g(x)$  von  $f(x)$  subtrahiert haben, nämlich

$$r(x) = f(x) - 3x^3 \cdot g(x) - (-2x^2) \cdot g(x) - 13x \cdot g(x) - (-33) \cdot g(x) = f(x) - (3x^3 - 2x^2 + 13x - 33) \cdot g(x).$$

Dabei ist der Faktor vor  $g(x)$  (wir wollen ihn  $q(x)$  nennen)

$$q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 13x - 33$$

gerade der bei der obigen Rechnung gefundene ‘Quotient’. Unsere Polynomdivision hat also zu den beiden Polynomtermen  $f(x)$  und  $g(x)$  zwei Polynomterme  $q(x)$  und  $r(x)$  geliefert mit den folgenden beiden Eigenschaften:

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x) \tag{*}$$

und

$$\text{Grad von } r(x) < \text{Grad von } g(x). \tag{**}$$

Dieses Verfahren der Polynomdivision mit Rest ist allgemein anwendbar. Zwar war in obigem Beispiel der Polynomterm  $g(x)$  ‘normiert’, d. h. der führende Koeffizient von  $g(x)$  war 1. Dies hat die Rechnung erleichtert (es traten keine Brüche auf), aber das Verfahren ist auch anwendbar, wenn etwa der führende Term in  $g(x)$  die Form  $2x^2$  o. ä. gehabt hätte. Man hätte dann immer durch diesen Term (einschließlich des Koeffizienten) dividieren müssen. Wir fassen nun die Überlegungen zusammen in dem folgenden

**Satz:** (Polynomdivision) *Zu je zwei Polynomtermen  $f(x)$  und  $g(x)$  gibt es Polynomterme  $q(x)$  und  $r(x)$  mit den Eigenschaften*

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x) \tag{*}$$

und

$$r(x) \text{ ist der Term } 0 \text{ oder Grad von } r(x) < \text{Grad von } g(x). \tag{**}$$

*Man berechnet diese Polynome  $q(x)$  und  $r(x)$  mit Hilfe des oben beschriebenen Verfahrens.*

**d. Nullstellen und Linearfaktoren.** Eine wichtige Konsequenz der Polynomdivision ist der fundamentale Zusammenhang zwischen Nullstellen und Linearfaktoren. Wie wir bereits oben bemerkt haben, liefert ein Linearfaktor  $x - a$  stets die Nullstelle  $a$ :

$$f(x) = (x - a) \cdot h(x) \implies f(a) = 0.$$

Von dieser Aussage gilt auch die Umkehrung:

**Satz:** (Nullstellen und Linearfaktoren)  
 Ist  $f(x)$  ein Polynomterm vom Grad  $n$  und  $a$  eine Nullstelle,  
 so gilt  $f(x) = (x - a) \cdot h(x)$  mit einem Polynomterm  $h(x)$  vom Grad  $n - 1$ .  
 Man sagt, aus dem Funktionsterm  $f(x)$  lässt sich der Linearfaktor  $x - a$  ‘abspalten’.

Zum *Beweis* dieses Satzes und zur *Berechnung* von  $h(x)$  dividiert man  $f(x)$  durch  $(x - a)$ . Dies ergibt

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x),$$

wobei das Restpolynom  $r(x)$  entweder 0 ist oder einen Grad  $< 1$  (=Grad von  $(x - a)$ ), also den Grad 0 hat. Folglich ist der Polynomterm  $r(x)$  eine Konstante  $c$  und damit

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + c.$$

Diese Gleichung gilt nun für alle  $x$  (!). Setzt man nun in diese Termgleichung  $a$  ein, so folgt

$$f(a) = 0 \cdot q(a) + c = c.$$

Die Konstante  $c$  ist also gleich dem Wert  $f(a)$ . Ist nun  $a$  eine Nullstelle von  $f$ , so ist die Konstante  $c = f(a) = 0$  und es folgt wie behauptet

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x).$$

Der durch Polynomdivision gefundene Quotient  $q(x)$  ist gerade der gesuchte Polynomterm  $h(x)$ . Sein Grad ist um 1 kleiner als der von  $f$ .

Da man aus einem Polynomterm vom Grad  $n$  höchstens  $n$ -mal einen Linearfaktor abspalten kann, kann ein solcher Term auch nur höchstens  $n$  Nullstellen haben:

Ein Polynomterm  $f(x)$  vom Grad  $n$  hat höchstens  $n$  Nullstellen.

**e. Rationale Nullstellen ganzrationaler Funktionen.** Die bisherigen Überlegungen hängen entscheidend davon ab, dass man zu gegebenem Polynomterm  $f(x)$  eine Nullstelle *findet*. Nun kennen Sie für *normierte quadratische* Polynomterme  $x^2 + px + q$  ein *Verfahren* zur Berechnung der Nullstellen, die sog.  $p, q$ -Formel (oder für beliebige quadratische Polynomterme  $ax^2 + bx + c$  die  $a, b, c$ -Formel). Für Polynomterme höheren Grades gibt es eine solche Auflösungsformel i. a. *nicht*. Genauer gilt: Für Grad 3 und 4 gibt es zwar (komplizierte) Auflösungsformeln, ist jedoch der Grad  $\geq 5$ , so gibt es *nachweislich* keine allgemeingültigen Auflösungsformeln.

Beschränkt man sich jedoch auf ganz-rationale Funktionen, deren Koeffizienten rationale Zahlen sind — wie dies in unserem Unterricht sehr oft der Fall sein wird —, so kann man zumindest *die* Nullstellen bestimmen, die *rationale* Zahlen sind. Sind die Koeffizienten  $a_i$  in dem Polynomterm

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

rationale Zahlen, so kann man durch Multiplikation mit dem Hauptnenner die Koeffizienten ganzzahlig machen, ohne dass sich dabei die Nullstellen ändern. Wir werden also im folgenden nur Polynomterme mit Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  betrachten! Dann gilt der folgende

**Satz:** (Rationale Nullstellen ganz-rationaler Funktionen)  
 Gegeben sei ein Polynomterm

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}(!)$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $a_0 \neq 0$ .

Ist  $r = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$  eine rationale Nullstelle von  $f$  mit zueinander teilerfremden Zähler  $b \in \mathbb{Z}$  und Nenner  $c \in \mathbb{N}$ , so muss notwendig gelten:

$$b \text{ teilt } a_0 \quad \text{und} \quad c \text{ teilt } a_n.$$

Als rationale Nullstellen von  $f$  kommen also nur Zahlen in Frage, deren *Zähler* ein Teiler von  $a_0$  und deren *Nenner* ein Teiler von  $a_n$  ist! Dafür gibt es nur endlich viele Möglichkeiten. Diese kann man bestimmen und dann durch Einsetzen feststellen, welche davon Nullstellen sind. Hat man eine Nullstelle gefunden, so spaltet man den entsprechenden Linearfaktor aus  $f(x)$  ab und arbeitet mit dem verbleibenden Polynomterm kleineren Grades weiter.

*Übungsaufgabe* für Interessierte: Was gilt im Falle  $a_0 = 0$ ?

Als *Spezialfälle* des obigen Resultates seien erwähnt:

- 1) Als ganzzahlige Nullstellen  $b$  (Nenner  $c = 1!$ ) kommen nur Teiler von  $a_0$  in Frage!
- 2) Ist  $a_n = 1$ , so muss der Nenner  $c = 1$  sein; alle rationalen Nullstellen  $\frac{b}{c}$  sind notwendig ganzzahlig.

Den einfacheren Beweis für den Spezialfall 1) haben wir im Unterricht besprochen. Hier der allgemeine *Beweis*: Es sei — wie angegeben —  $0 = f(\frac{b}{c})$ , also

$$0 = a_n \frac{b^n}{c^n} + a_{n-1} \frac{b^{n-1}}{c^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{b}{c} + a_0.$$

Nach Multiplikation mit  $c^n$  erhält man:

$$0 = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} c + a_{n-2} b^{n-2} c^2 + \dots + a_1 b c^{n-1} + a_0 c^n. \quad (*)$$

Löst man dies nach  $-a_0 c^n$  auf, so erhält man:

$$\begin{aligned} -a_0 c^n &= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} c + \dots + a_1 b c^{n-1} \\ &= b \cdot (a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} c + \dots + a_1 c^{n-1}). \end{aligned}$$

Da der Ausdruck in Klammern eine ganze Zahl ist (die Koeffizienten  $a_i$  liegen in  $\mathbb{Z}(!)$  und  $b, c$  ebenfalls), ist  $b$  ein Teiler von  $-a_0 c^n$ . Da  $b$  und  $c$  aber teilerfremd sind, muss  $b$  ein Teiler von  $a_0$  sein.

Löst man nun (\*) nach  $-a_n b^n$  auf, so erhält man entsprechend aus

$$-a_n b^n = c(a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} c + \dots + a_1 b c^{n-2} + a_0 c^{n-1}),$$

dass  $c$  ein Teiler von  $-a_n b^n$  sein muss. Wie oben folgt wieder:  $c$  ist Teiler von  $a_n$ . Damit ist der obige Satz vollständig bewiesen.

**f. Zerlegung in Linearfaktoren.** Wir gehen aus von einem Polynomterm  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . Gesucht sind alle Nullstellen und damit verbunden eine möglichst weitgehende Zerlegung des Terms  $f(x)$  in Linearfaktoren. Beachten Sie, dass jede *Faktorisierung* zugleich eine *Aufspaltung* des Problems in zwei Teilprobleme liefert, auf die man alle Methoden erneut anwenden kann. Wir wollen nun alle uns zur Verfügung stehenden Mittel zusammenstellen:

- 1) Faktorisieren durch *Ausklammern* einer  $x$ -Potenz. Dies ist genau dann möglich, wenn das absolute Glied 0 ist. In diesem Falle ist 0 eine Nullstelle des Polynomterms.
- 2) Faktorisieren durch *binomische Formeln*.
- 3) Für *quadratische* Terme wende man die  $p, q$ -Formel oder quadratische Ergänzung zur Berechnung aller Nullstellen an. Sind Nullstellen vorhanden, so liefern diese dann auch eine Faktorisierung:

**Satz:** (Vieta) Für einen *normierten* quadratischen Term  $x^2 + px + q$  und Zahlen  $a, b$  sind folgende Aussagen äquivalent:  
 A)  $a, b$  sind *sämtliche* Nullstellen von  $x^2 + px + q$ .  
 B)  $x^2 + px + q = (x - a)(x - b)$ .  
 C)  $-p = a + b$  und  $q = ab$ .

Die Äquivalenz von B) und C) erhält man durch Ausmultiplizieren

$$x^2 + px + q = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

und Vergleich der Koeffizienten. B)  $\implies$  A) ist klar. Die entscheidende Aussage A)  $\implies$  B) wird in der Einführungsphase mit Hilfe der  $p, q$ -Formel bewiesen, folgt aber hier aus unserem Abspaltungssatz: Ist  $a$  eine Nullstelle von  $x^2 + px + q$ , so lässt sich der Linearfaktor  $x - a$  abspalten:  $x^2 + px + q = (x - a) \cdot g(x)$ . Der verbleibende Faktor  $g(x)$  ist dann notwendig linear und hat ebenfalls eine Nullstelle. Diese muss dann  $b$  sein und  $g(x) = x - b$ .

- 4) Substitution:

Diese ist möglich, wenn im Polynomterm  $f(x)$  *alle* auftretenden *Exponenten* von  $x$  Vielfache einer festen Zahl  $k \geq 2$  sind (z. B.  $k = 3$  in  $x^6 + 2x^3 + 5 = 0$  oder  $k = 2$  in  $3x^6 - 2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ ). Man ersetzt (*substituiert*) dann  $x^k$  durch eine neue Variable  $z$  und erhält so eine Gleichung niederen Grades in der neuen Variablen  $z$  ( $z^2 + 2z + 5 = 0$  im ersten und  $3z^3 - 2z^2 - 3z + 1 = 0$  im zweiten Fall). Diese löse man unter Verwendung aller zur Verfügung stehenden Hilfsmittel – soweit dies möglich ist. Dies liefert dann auch eine Faktorisierung der Terme mit der Variablen  $z$ . Am Schluss muss man dann noch die *Substitution rückgängig* machen, indem man für jede gefundene Lösung  $z$  die Gleichung  $x^k = z$  (durch Wurzelziehen) löst bzw. in allen Faktorisierungen die Variable  $z$  wieder durch  $x^k$  ersetzt.

- 5) Polynomdivision:

Man suche eine *rationale* Nullstelle  $a$  (gemäß obigem Satz, S. 6) und spalte durch Polynomdivision den zugehörigen Linearfaktor  $x - a$  ab. Den entstehenden zweiten Faktor untersuche man dann mit allen zur Verfügung stehenden Mitteln.

Das hier skizzierte Verfahren bricht ab, wenn

- a) alle Nullstellen gefunden sind (!), oder
- b) eine Gleichung mindestens dritten Grades vorliegt, die
  - 1) nicht durch Substitution vereinfacht werden kann und
  - 2) keine *rationale* Nullstelle mehr hat.

**g. Nullstellenordnung und Vorzeichenwechsel.** Gelingt bei diesem Verfahren eine Bestimmung *aller* Nullstellen der ganzrationalen Funktion und damit eine *faktorierte* Form des Funktionsterms  $f(x)$ , so kann man daraus nicht nur unmittelbar die Nullstellen der Funktion  $f$  ablesen, sondern auch die Vorzeichenverteilung für die Funktionswerte  $f(x)$ . Gehen wir einmal von folgendem Beispiel

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 2)(x - 3). \quad (*)$$

aus. Die Nullstellen von  $f$  sind offensichtlich  $+1$  und  $-2, +3$ . Das Vorzeichen von  $f(x)$  wird nun durch das Vorzeichen der einzelnen Linearfaktoren bestimmt:

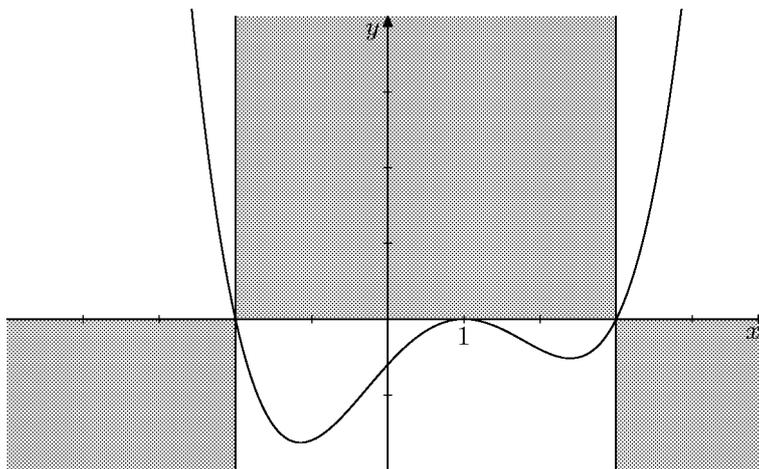
Ist eine *gerade* Anzahl von Linearfaktoren negativ, so ist das Produkt (und damit der Funktionswert  $f(x)$ ) positiv;

ist eine *ungerade* Anzahl von Linearfaktoren negativ, so ist auch der Funktionswert  $f(x)$  negativ.

Nun ist aber das Vorzeichen eines einzelnen Linearfaktors  $x - a$  für verschiedene Werte von  $x$  leicht abzulesen:

$$x - a \begin{cases} > 0 & \text{für } x > a, \\ < 0 & \text{für } x < a. \end{cases}$$

So sind für alle reelle Zahlen  $x$ , die größer als alle auftretenden Nullstellen sind, d. h. für  $x > 3$ , *alle* Linearfaktoren in (\*) positiv ( $x + 2 > 5$ ,  $x - 1 > 2$ ,  $x - 3 > 0$ ), das Produkt also auch. Liegt  $x$  zwischen der zweiten und dritten Nullstelle, also  $1 < x < 3$ , so ist nur der letzte Linearfaktor  $x - 3$  negativ, alle anderen sind positiv, also das Produkt  $f(x)$  negativ. Genauso untersucht man die anderen Bereiche zwischen den Nullstellen. Auf diese Art und Weise erhält man einen ersten groben Überblick über den Verlauf der Funktion  $f$  und kann eine vorläufige Skizze des Graphen entwerfen. Der in der nachfolgenden Skizze angedeutete Graph ist ein *denkbarer* Verlauf, er kann in den Einzelheiten durchaus anders aussehen (siehe die spätere Diskussion in Kapitel III). Durch die obigen Überlegungen sind jedoch gewisse Bereiche der Koordinatenebene bestimmt, in denen der Graph *mit Sicherheit nicht* verlaufen kann. Diese sind in der nachfolgenden Skizze schraffiert.



Wir wollen an diesem Beispiel auch das wichtige Phänomen des *Vorzeichenwechsels* an einer Nullstelle studieren. Die Funktionswerte  $f(x)$  ändern offenbar bei den Nullstellen  $x = -2$  und  $x = +3$  ihr Vorzeichen, bei  $+1$  hingegen nicht. Betrachten wir einmal die Nullstelle  $+3$ : Hier ändert der Linearfaktor  $x - 3$  sein Vorzeichen, für  $x < 3$  hat er negative Werte und für  $x > 3$  positive. Da die anderen Linearfaktoren bei  $+3$  ihr Vorzeichen nicht ändern, ergibt sich insgesamt ein Vorzeichenwechsel für  $f(x)$ . Anders bei  $+1$ : Hier ändert zwar der Linearfaktor  $x - 1$  ebenfalls sein Vorzeichen, sein Quadrat  $(x - 1)^2$  aber natürlich nicht. Es ergibt sich also *kein* Vorzeichenwechsel für  $f(x)$ . Wir erkennen so einen Zusammenhang zwischen Vorzeichenwechsel an einer Nullstelle  $a$  und der Häufigkeit, mit der der zugehörige Linearfaktor  $x - a$  in der Zerlegung von  $f(x)$  vorkommt. Ein Vorzeichenwechsel bei  $a$  liegt dann vor, wenn der Linearfaktor  $x - a$  in *ungerader* Anzahl in der Produktzerlegung von  $f(x)$  vorkommt. Kommt er dagegen in *gerader* Anzahl vor, so kann sich das Vorzeichen nicht ändern.

Diese Häufigkeit eines Linearfaktors  $x - a$  in der Zerlegung von  $f(x)$  nennt man die *Vielfachheit* (oder *Ordnung*) der entsprechenden Nullstelle  $a$ :

**Definition:** Die *Vielfachheit* einer Nullstelle  $a$  einer ganzrationalen Funktion  $f$  gibt an, wie oft der Linearfaktor  $x - a$  insgesamt aus dem Polynomterm  $f(x)$  abgespalten werden kann.

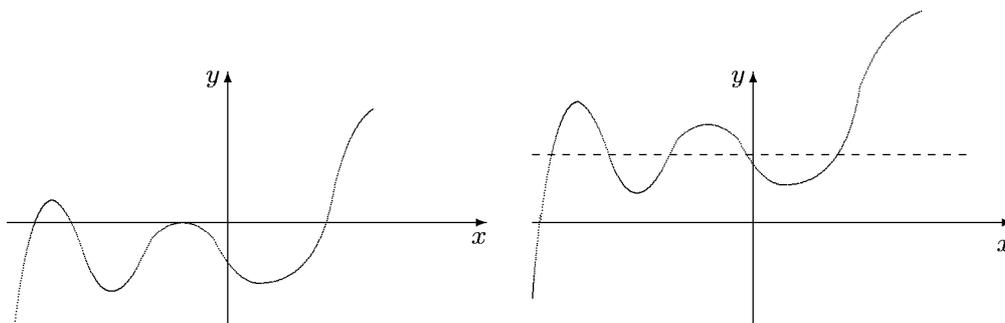
Ist  $k$  die Vielfachheit der Nullstelle  $a$ , so sagt man auch ' $a$  ist eine  $k$ -fache Nullstelle von  $f$ '.

Wie wir oben gesehen haben, können wir an der Vielfachheit einer Nullstelle erkennen, ob die Funktion  $f$  dort einen Vorzeichenwechsel hat oder nicht:

**Satz:** (Vorzeichenwechsel und Nullstellenordnung)  
 Eine ganz-rationale Funktion  $f$  hat genau an den Stellen einen Vorzeichenwechsel, wo sie eine Nullstelle *ungerader* Ordnung hat.

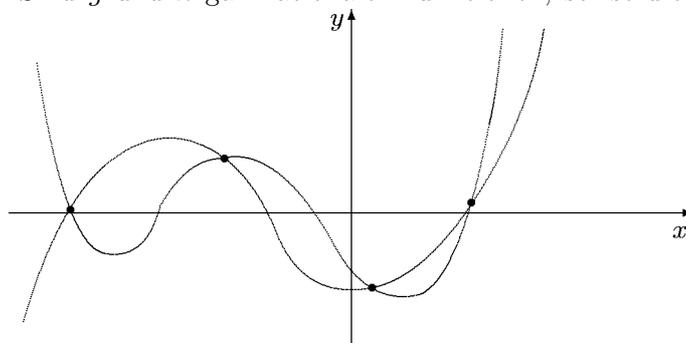
Wir haben uns dieses Ergebnis klar gemacht für ganz-rationale Funktionen, deren Funktionsterm  $f(x)$  sich *vollständig* in Linearfaktoren zerlegen lässt. Der Satz gilt aber in der formulierten Allgemeinheit: Wir zerlegen  $f(x) = (x - a)^k \cdot g(x)$ , wobei  $k$  die Nullstellenordnung von  $f$  an der Stelle  $a$  ist. Dies bedeutet, dass sich der Faktor  $x - a$  nicht noch ein weiteres Mal abspalten lässt, also  $g(a) \neq 0$  ist. Aus  $g(a) \neq 0$  werden wir später folgern, dass die ganzrationale Funktion  $g$  ‘in der Nähe’ von  $a$  ihr Vorzeichen *nicht* ändert. Ob also  $f$  bei  $a$  einen Vorzeichenwechsel hat, liegt ausschließlich am Verhalten von  $(x - a)^k$ , und damit daran, ob  $k$  ungerade oder gerade ist.

**h. Grad und Graph.** Ist der Graph einer ganzrationalen Funktion gegeben, so kann man aus der Zahl der Nullstellen entnehmen, wie groß der Grad mindestens sein muss. In dem linken Beispiel hat die Funktion  $f$  vier Nullstellen, von denen mindestens eine doppelt ist, da dort kein Vorzeichenwechsel vorliegt. Also kann man aus dem Polynomterm  $f(x)$  mindestens  $1+1+1+2=5$  Linearfaktoren abspalten und  $f$  muss *mindestens* den Grad 5 haben.



Diese Überlegungen kann man auch auf den rechten Graphen anwenden, der nur eine Nullstelle hat. Verschiebt man den Graphen geeignet in  $y$ -Richtung, so erhält man 5 Nullstellen. Bei einer solchen Verschiebung verändert sich lediglich das absolute Glied  $a_0$  des Funktionsterms, aber nicht der Grad. Man kann nun die obigen Überlegungen auf den verschobenen Graphen anwenden und so feststellen, dass der Grad mindestens 5 sein muss.

Man kann obige Überlegungen ausweiten auf die Zahl der Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen. Die Schnittstellen zweier Graphen  $G(g)$  und  $G(h)$  sind die Nullstellen der Differenzfunktion  $f = g - h$ . Sind  $g$  und  $h$  ganzrationale Funktionen, so ist die Differenz  $f$  ebenfalls



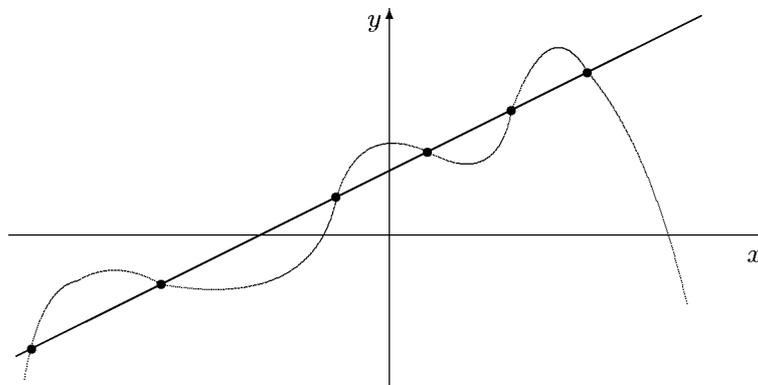
ganzrational und der Grad von  $f$  ist *höchstens* so groß, wie der größere der beiden Grade von  $g$  und  $h$ . Es gibt also höchstens so viele Lösungen, und damit Schnittpunkte, wie der größere der beiden Grade von  $g$  und  $h$  angibt! Die obige Skizze zeigt ein Beispiel mit den Graphen zweier ganz-rationaler Funktionen vom Grade 3 bzw. 4.

Betrachten wir nun einmal den Spezialfall, dass eine der Kurven eine Gerade ist, also zu einer ganzrationalen Funktion vom Grad  $\leq 1$  gehört. Dann ist die Anzahl der Schnittpunkte höchstens so groß wie der Grad der anderen Kurve. Wir erhalten so aus obigen Überlegungen:

Schneidet eine beliebige Gerade den Graphen einer ganz-rationalen Funktion  $g$  in  $r$  Punkten,  $r \geq 2$ , so muss  $g$  mindestens den Grad  $r$  haben.

Dieses Kriterium verallgemeinert unsere obigen Überlegungen: Dort hatten wir gesehen, dass der Grad mindestens so groß ist wie die Zahl der Nullstellen. Die Zahl der Nullstellen ist aber nichts anderes als die Anzahl der Schnittpunkte des Graphen der Funktion mit der  $x$ -Achse. In dem jetzt formulierten Kriterium kann man nun statt der  $x$ -Achse *jede beliebige Gerade* betrachten, die den Graphen in mindestens 2 Punkten schneidet: Die Anzahl der Schnittpunkte gibt dann die Mindestgröße des Grades an.

In dem folgenden Beispiel ist eine Gerade eingezeichnet, die den Graphen  $G(g)$  in 6 Punkten schneidet. Also muss der Grad von  $g$  mindestens 6 sein.



## §2 Rationale Funktionen, Grenzwerte

**a. Rationale Funktionen.** In diesem ersten Abschnitt wollen wir zunächst unsere Überlegungen zur Vorzeichenverteilung von den ganzrationalen Funktionen auf die *rationalen Funktionen* übertragen. So wie man die rationalen Zahlen definiert hat als die Quotienten ganzer Zahlen (mit von 0 verschiedenem Nenner), so definiert man:

Eine *rationale Funktion*  $f$  ist der Quotient zweier ganzrationaler Funktionen, wobei die Nennerfunktion nicht die Nullfunktion ist:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Dabei sind  $g(x)$  und  $h(x)$  Funktionsterme beliebiger ganzrationaler Funktionen, für  $h(x)$  ist lediglich der Term '0' ausgeschlossen.

### Anmerkungen:

- 1) Unsere bisherigen ganzrationalen Funktionen sind natürlich auch rationale Funktionen im Sinne dieser Definition, da man als Nenner die konstante Funktion  $h$  vom Wert 1 ( $h(x) = 1$ ) wählen kann.
- 2) Anders als die ganzrationalen Funktionen sind rationale Funktionen im allgemeinen nicht auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, sie haben *Definitionslücken*. Diese sind gegeben durch die Nullstellen des Nenners  $h(x)$ : An Stellen  $a \in \mathbb{R}$  mit  $h(a) = 0$  ist  $f(a) = \frac{g(a)}{h(a)}$  *nicht definiert*, die Funktion

$f$  besitzt dort eine Definitionslücke. Der Definitionsbereich einer rationalen Funktion  $f$  mit Nennerterm  $h(x)$  besteht also aus allen reellen Zahlen mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{a \in \mathbb{R} \mid h(a) = 0\}.$$

$f$  besitzt also nur endlich viele Definitionslücken; ihre Anzahl ist höchstens so groß wie der Grad des Nenners  $h(x)$ .

3) Die Vorzeichenverteilung einer rationalen Funktion bestimmt man genauso wie bei einer ganzrationalen Funktion. Man zerlegt Zähler *und* Nenner in Linearfaktoren. Auf das Vorzeichen von  $f(x)$  haben die Linearfaktoren des Zählers denselben Einfluss wie die des Nenners. Als mögliche Stellen für Vorzeichenwechsel kommen also die Nullstellen des Zählers *und* die Nullstellen *des Nenners* in Frage. Nun wechselt ein Quotient sein Vorzeichen aber nur dann, wenn der Zähler oder der Nenner, *aber nicht beide* (!) ihr Vorzeichen wechseln. Damit erhalten wir das folgende Resultat:

**Satz:** a) Rationale Funktionen können ihr Vorzeichen nur an ihren Nullstellen oder ihren Definitionslücken wechseln.  
 b) Eine rationale Funktion  $f$  wechselt bei  $a$  ihr Vorzeichen genau dann, wenn dort der Zähler oder der Nenner, *aber nicht beide*, eine Nullstelle ungerader Ordnung haben.

Wir haben im Unterricht an einfachen Beispielen ( $f(x) = \frac{1}{x}$  bzw.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ) gesehen, dass bei rationalen Funktionen gegenüber den ganzrationalen Funktionen neuartige Phänomene auftraten. So gilt etwa für die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ :

1. Nähert sich  $x$  der Definitionslücke 0 an, so wachsen die Funktionswerte  $f(x)$  betragsmäßig über alle Grenzen.
2. Wächst  $x$  über alle Grenzen, so nähern sich die Werte  $f(x)$  immer mehr der Zahl 0.

Beide Phänomene werden durch den Begriff des *Grenzwertes* und der *Konvergenz* erfasst.

**b. Grenzwerte im Unendlichen.** Wir betrachten zunächst die Situation 2., in der  $x$  über alle Grenzen wächst, man sagt ‘ $x$  strebt gegen  $\infty$ ’ und schreibt  $x \rightarrow \infty$ . Was soll es nun bedeuten, dass sich die Funktionswerte  $f(x)$  einer Zahl  $a$  beliebig annähern? Die Nähe zu einer Zahl  $a$  beschreibt man durch den *Abstand*:  $f(x)$  ist ‘nahe’ bei  $a$ , wenn der Abstand  $|f(x) - a|$  ‘klein’ ist. Man gibt also eine positive Zahl  $\varepsilon > 0$  vor (etwa  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{100}$ , ...) und verlangt, dass die Funktionswerte  $f(x)$  von der Zahl  $a$  weniger als  $\varepsilon$  Abstand haben:

$$|f(x) - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - a < +\varepsilon \iff a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon.$$

Aber für welche  $x$  soll dies gelten? Da diese Annäherung erfolgen soll, wenn  $x$  über alle Grenzen wächst ( $x \rightarrow \infty$ ), verlangt man die obige Abschätzung für *hinreichend große*  $x$ . Das bedeutet, es muss eine von  $\varepsilon$  abhängige Schranke  $x(\varepsilon)$  geben, von der ab die Abschätzung gilt:

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für } x > x(\varepsilon), \quad x(\varepsilon) \text{ geeignet.}$$

Damit haben wir beschrieben, was wir unter ‘näher kommen’ verstehen wollen. Um aber zu erfassen, dass die Funktionswerte  $f(x)$  der Zahl  $a$  *beliebig* nahe kommen, muss man die obige Bedingung nicht für ein (wenn auch noch so kleines)  $\varepsilon > 0$  fordern, sondern *für alle!*

Damit kommen wir zur allgemeinen Definition des Grenzwertes von Funktionen (für den Grenzübergang  $x \rightarrow \infty$ ):

**Definition:** Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  ist Grenzwert einer Funktion  $f$  für den Grenzübergang  $x \rightarrow \infty$ , wenn folgendes gilt:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $x(\varepsilon)$  mit:  $|f(x) - a| < \varepsilon$  für alle  $x > x(\varepsilon)$ .

Ist dies der Fall, so schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \quad (\text{in Worten: Limes } f(x) \text{ für } x \text{ gegen } \infty \text{ ist gleich } a).$$

Auf der Basis dieser Definition kann man nun Konvergenznachweise führen, vorausgesetzt man hat einen ‘Kandidaten’  $a$  für den Grenzwert. Man muss dann für beliebiges  $\varepsilon > 0$  die Ungleichung  $|f(x) - a| < \varepsilon$  für große  $x$  ( $x \rightarrow \infty$ ) untersuchen und zeigen, dass sie *schließlich* gilt. Das heißt, dass von einer geeigneten (von  $\varepsilon$  abhängigen) Zahl  $x(\varepsilon)$  ab alle Funktionswerte  $f(x)$  ( $x > x(\varepsilon)$ ) die Abschätzung  $|f(x) - a| < \varepsilon$  erfüllen.

**Beispiel:** Wir führen dies einmal für die Funktion  $f(x) = \frac{2x+5}{7x-9}$  durch und zeigen, dass für  $x \rightarrow \infty$  der Grenzwert  $\frac{2}{7}$  ist:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{7x-9} = \frac{2}{7}.}$$

Entsprechend der Definition geben wir ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  vor und untersuchen die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x+5}{7x-9} - \frac{2}{7} \right| < \varepsilon &\iff \left| \frac{7(2x+5) - 2(7x-9)}{(7x-9) \cdot 7} \right| < \varepsilon \\ &\iff \left| \frac{14x+35 - 14x+18}{49x-63} \right| < \varepsilon \\ &\iff \frac{|53|}{|49x-63|} < \varepsilon \end{aligned} \quad (*)$$

Wählt man  $x$  groß genug (nämlich  $x > \frac{63}{49}$ ), so ist  $49x - 63 > 0$  und daher  $|49x - 63| = 49x - 63$ . Obige Umformung kann also fortgesetzt werden durch

$$\begin{aligned} (*) &\iff \frac{53}{49x-63} < \varepsilon \quad \left| \cdot \frac{49x-63}{\varepsilon} > 0 \text{ (!)} \right. \\ &\iff \frac{53}{\varepsilon} < 49x - 63 \\ &\iff \frac{53}{\varepsilon} + 63 < 49x \\ &\iff \frac{53}{49\varepsilon} + \frac{9}{7} < x. \end{aligned}$$

Wählt man nun  $x(\varepsilon) = \frac{53}{49\varepsilon} + \frac{9}{7}$ , so gilt für  $x > x(\varepsilon)$  die gewünschte Abschätzung  $\left| f(x) - \frac{2}{7} \right| < \varepsilon$ . Da diese Überlegung für jedes  $\varepsilon > 0$  gültig ist, ist gezeigt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{7x-9} = \frac{2}{7}.$$

Durch die explizite Bestimmung von  $x(\varepsilon)$  ist sogar mehr gezeigt. Man kann z. B. für  $\varepsilon = 0,001$  angeben, von welcher Stelle ab die Abweichung zwischen Funktionswert  $f(x)$  und Grenzwert  $a = \frac{2}{7}$  geringer als 0,001 ist:

$$\varepsilon = 0,001 \implies x(\varepsilon) = \frac{53}{49 \cdot 0,001} + \frac{9}{7} = \frac{53}{49} \cdot 1000 + \frac{9}{7} \approx 1082,92.$$

Wenn  $x$  oberhalb dieser Schranke liegt, dann ist  $f(x)$  von  $a = \frac{2}{7}$  um weniger als 0,001 entfernt. (Numerische Beispielwerte:  $f(1083) \approx 0,2867142$ ,  $\frac{2}{7} = 0,285714 \approx 0,2857143$ ).

**Anmerkung:** Alle bisherigen Überlegungen und Definitionen übertragen sich analog auf den Grenzübergang  $x \rightarrow -\infty$ , bei dem die  $x$ -Werte unter alle (negativen) Schranken fallen. Man kann aber den Grenzübergang  $x \rightarrow -\infty$  folgendermaßen auf den Grenzübergang  $x \rightarrow \infty$  zurückführen:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(-x)}$$

**c. Grenzwertsätze.** Das obige Beispiel zeigt, dass der Nachweis der Konvergenz auf der Basis der Definition mühsam ist. Außerdem hat man das Problem, erst einen Kandidaten  $a$  für den Grenzwert finden zu müssen. Statt nun immer wieder ähnliche Überlegungen anstellen zu müssen, ist es sinnvoll, die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten zu erforschen. Dazu gehören die folgenden Grenzwertsätze, die es ermöglichen, aus bekannten Konvergenzaussagen neue zu gewinnen. Ein besonders einsichtiges Beispiel ist der

**Schachtelungssatz:** Haben zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  denselben Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

und ist  $h(x)$  eine Funktion mit  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  für hinreichend große  $x$ , so ist auch  $h(x)$  konvergent mit demselben Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = a.$$

Zum *Beweis* betrachten wir ein beliebiges  $\varepsilon > 0$ . Wegen der vorausgesetzten Konvergenz von  $f$  und  $a$  gilt von einem geeigneten  $x(\varepsilon)$  ab  $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$  und dasselbe für  $g(x)$ . Da  $h(x)$  zwischen  $f(x)$  und  $g(x)$  liegt, folgt natürlich

$$a - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < a + \varepsilon$$

und die Behauptung  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = a$  folgt.

Nicht so einfach ist der Nachweis der folgenden

**Grenzwertsätze:** Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien für  $x \rightarrow \infty$  konvergent mit den Grenzwerten  $a$  bzw.  $b$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b.$$

Dann gelten für  $x \rightarrow \infty$  die folgenden Aussagen:

a) (Summe) Die Summen-/Differenzfunktion  $f(x) \pm g(x)$  ist ebenfalls konvergent mit dem Grenzwert  $a \pm b$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b.$$

b) (Produkt) Die Produktfunktion  $f(x) \cdot g(x)$  ist ebenfalls konvergent mit dem Grenzwert  $ab$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x)) = ab.$$

c) (Quotient) Wenn zusätzlich für hinreichend große  $x$  die Funktionswerte  $g(x) \neq 0$  sind und außerdem der Grenzwert  $b \neq 0$  ist (!), dann ist auch die Quotientenfunktion  $\frac{f(x)}{g(x)}$  konvergent mit Grenzwert  $\frac{a}{b}$ :

$$g(x) \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b \neq 0 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Dieser Satz erlaubt es nun, aus bereits bekannten Grenzwertaussagen neue herzuleiten. Ausgangspunkt ist dabei oft die folgende sehr einfache, aber grundlegende Grenzwertaussage:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Deren Nachweis auf der Basis der Definition ist wesentlich einfacher als bei obigem Beispiel. Wie oben starten wir mit einem beliebigen  $\varepsilon > 0$  und untersuchen, wann  $|\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$  ist. Wegen  $x \rightarrow \infty$  können wir  $x > 0$  voraussetzen und erhalten

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < x.$$

Wählt man also  $x(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ , so gilt für alle  $x > x(\varepsilon)$  die geforderte Abschätzung. Da diese Überlegung für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, haben wir bewiesen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

**1. Beispiel:** Wir berechnen erneut – jetzt mit den Grenzwertsätzen – den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{7x - 9}.$$

Dazu formen wir zunächst den Funktionsterm so um, dass er aus Teiltermen aufgebaut ist, deren Grenzwerte wir kennen. Dies geschieht bei allen rationalen Funktionen, indem man in Zähler und Nenner die höchste  $x$ -Potenz ausklammert:

$$f(x) = \frac{2x + 5}{7x - 9} = \frac{x(2 + \frac{5}{x})}{x(7 - \frac{9}{x})} = \frac{2 + 5 \cdot \frac{1}{x}}{7 - 9 \cdot \frac{1}{x}}.$$

Nun betrachtet man den Aufbau dieses Terms und untersucht schrittweise auf Konvergenz. Wie erwähnt, hat die Funktion  $\frac{1}{x}$  den Grenzwert 0. Nach den Grenzwertsätzen folgt, dass dann auch  $5 \cdot \frac{1}{x}$  den Grenzwert 0 und daher der Zähler  $2 + 5 \cdot \frac{1}{x}$  den Grenzwert 2 hat. Genauso folgert man aus den Grenzwertsätzen, dass der Nenner den Grenzwert 7 hat. *Da der Grenzwert des Nenners  $\neq 0$  ist*, konvergiert der Quotient gegen  $\frac{2}{7}$ , und der Konvergenzbeweis (einschließlich der Bestimmung des Grenzwertes!) ist vollständig.

Man erkennt, dass der Grenzwert durch die führenden Koeffizienten von Zähler und Nenner bestimmt wird. Jedoch gilt dies nur, wenn – wie in diesem Falle – Zähler und Nenner *denselben Grad* haben.

**2. Beispiel:** (Zählergrad < Nennergrad) Wir berechnen – wieder mit Hilfe der Grenzwertsätze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 7}{5x^2 + 10x - 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(3 + \frac{7}{x})}{x^2(5 + \frac{10}{x} - \frac{9}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{3 + \frac{7}{x}}{5 + \frac{10}{x} - \frac{9}{x^2}} = 0 \cdot \frac{3}{5} = 0.$$

Man sieht: Unabhängig von den führenden Koeffizienten ergibt sich am Ende der Grenzwert 0, wenn der Nennergrad *größer* ist als der Zählergrad.

**3. Beispiel:** (Zählergrad > Nennergrad) Wir untersuchen mit Hilfe der üblichen Umformungen den Grenzwert von

$$f(x) = \frac{5x^2 + 10x - 9}{3x + 7} = \frac{x^2(5 + \frac{10}{x} - \frac{9}{x^2})}{x(3 + \frac{7}{x})} = x \cdot \frac{5 + 10 \cdot \frac{1}{x} - 9 \cdot \frac{1}{x^2}}{3 + 7 \cdot \frac{1}{x}}.$$

Mit den Grenzwertsätzen zeigt man wieder, dass der als zweiter Faktor auftretende Bruch den Grenzwert  $\frac{5}{3}$  hat. Der erste Faktor ( $x$ ) hat aber keinen Grenzwert, er wächst über alle Grenzen:  $x \rightarrow \infty$ . Dann muss auch der gesamte Term über alle Grenzen wachsen. Man schreibt dafür

$$\frac{5x^2 + 10x - 9}{3x + 7} \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow \infty.$$

Es hat sich eingebürgert hierfür auch das  $\lim$ -Symbol zu verwenden, *obwohl kein Grenzwert in  $\mathbb{R}$  existiert(!)*, und schreibt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 10x - 9}{3x + 7} = \infty.$$

Diese Aussage besagt, dass die Funktionswerte *schließlich jede Schranke übersteigen*. Genauer vereinbart man folgende

**Definition:** Es ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , wenn folgendes gilt:

Für jede Schranke  $M$  gibt es ein  $x(M)$  mit:  $f(x) > M$  für alle  $x > x(M)$ .

Sinngemäß definiert man  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  und entsprechende Aussagen für  $x \rightarrow -\infty$ .

**d. Asymptoten rationaler Funktionen.** Wir fassen alle unsere Ergebnisse über die Grenzwerte rationaler Funktionen im Unendlichen zusammen in folgendem

**Satz:** Sei  $f$  eine rationale Funktion mit dem Funktionsterm

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

und  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ . (Also sind  $n$  der *Zählergrad* und  $m$  der *Nennergrad* von  $f$ ,  $a_n$  der führende Koeffizient des Zählers und  $b_m$  der führende Koeffizient des Nenners.)

a) Ist der Zählergrad  $n$  kleiner als der Nennergrad  $m$ ,  $n < m$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0,$$

und wir sagen: Die  $x$ -Achse ist Asymptote (Schmiegegerade) für  $f$ .

b) Stimmen Zähler- und Nennergrad überein,  $n = m$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m},$$

und wir sagen: Die Parallele zur  $x$ -Achse mit der Gleichung  $y = \frac{a_n}{b_m}$  ist Asymptote für  $f$ .

c) Ist der Zählergrad  $n$  größer als der Nennergrad  $m$ ,  $n > m$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für } \frac{a_n}{b_m} > 0, \\ -\infty & \text{für } \frac{a_n}{b_m} < 0, \end{cases}.$$

Ist  $n - m$  gerade, so gelten für  $x \rightarrow -\infty$  dieselben Grenzwertaussagen, während bei  $n - m$  ungerade sich die Vorzeichen umkehren:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} + \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) & \text{für } n - m \text{ gerade,} \\ - \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) & \text{für } n - m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis: Wir klammern im Zähler  $x^n$  und im Nenner  $x^m$  aus und erhalten

$$f(x) = \frac{x^n}{x^m} \cdot \frac{a_n + a_{n-1}x^{-1} + \dots + a_1x^{1-n} + a_0x^{-n}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + \dots + b_1x^{1-m} + b_0x^{-m}}. \quad (*)$$

Aus den Grenzwertsätzen erhält man wegen  $b_m \neq 0$ : Der zweite Bruch konvergiert gegen  $a_n/b_m$ . Das Verhalten des ersten Faktors  $x^n/x^m$  hängt nur von  $n$  und  $m$  ab:  
 Ist  $\underline{n = m}$ , so ist dieser Faktor 1, und  $f(x)$  strebt gegen  $a_n/b_m$ , wie in b) behauptet.  
 Ist  $\underline{n < m}$ , so ist  $m - n > 0$  eine natürliche Zahl und es gilt

$$\frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow \pm\infty.$$

Aus (\*) ergibt sich die Behauptung von Teil a).  
 Ist schließlich  $\underline{n > m}$ , so ist  $n - m > 0$  eine natürliche Zahl und daher

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} = \infty.$$

Da  $\frac{a_n}{b_m}$  nicht Null ist, folgt daraus gemäß (\*) die erste Aussage von c). Für  $x \rightarrow -\infty$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \infty & \text{für } n - m \text{ gerade,} \\ -\infty & \text{für } n - m \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und die zweite Behauptung von c) folgt.

Eine besonders kompakte Fassung dieses Satzes ist die folgende Aussage:

**Satz:** Ist  $f$  rational und sind  $a_n x^n$  bzw.  $b_m x^m$  die führenden Terme von Zähler bzw. Nenner, so gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}.$$

Die Grenzwerte einer rationalen Funktion im Unendlichen werden allein durch die führenden Terme von Zähler und Nenner bestimmt; man muss lediglich das Verhalten von reinen Potenzen  $x^{n-m}$  ermitteln.

Wir wollen nun den Fall c) (Zählergrad größer als Nennergrad) noch etwas genauer untersuchen, und zwar mit Hilfe der Polynomdivision: Ist  $f$  eine rationale Funktion, so kann man den Zähler mit Rest durch den Nenner dividieren. Betrachten wir einmal das Beispiel

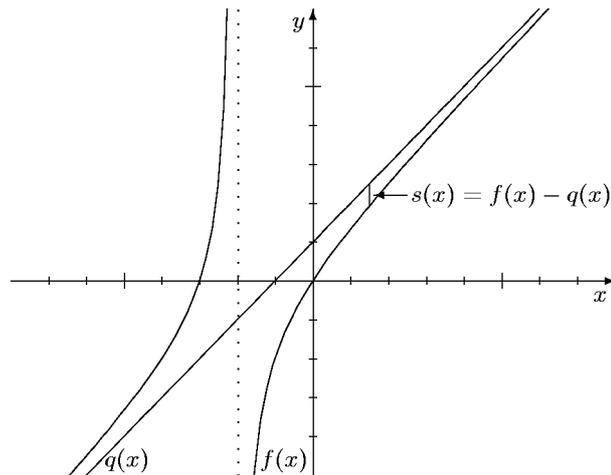
$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 2}.$$

Dividiert man den Zähler  $g(x) = x^2 + 3x$  durch den Nenner  $h(x) = x + 2$ , so erhält man als Quotient  $q(x) = x + 1$  und als Rest  $r(x) = -2$ , also

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 2} = x + 1 + \frac{-2}{x + 2}.$$

Damit haben wir  $f(x)$  dargestellt als Summe aus einem Polynomterm  $q(x) = x + 1$  und einem gebrochen-rationalen Term  $s(x) = \frac{r(x)}{h(x)} = -\frac{2}{x + 2}$ , bei dem der Zählergrad (= Grad von  $r(x)$ ) kleiner ist als der Nennergrad (gleich Grad von  $h(x)$ ). Gemäß obigem Satz a) konvergiert  $s(x)$  gegen 0 für  $x \rightarrow \pm\infty$ . Wegen  $f(x) = x + 1 + s(x)$  bedeutet dies, dass der Abstand zwischen

$f(x)$  und  $x + 1$  gegen 0 strebt: Der Graph von  $f$  schmiegt sich immer mehr der Geraden mit



der Gleichung  $y = x + 1$  an;  $f$  hat damit eine Asymptote, ihre Gleichung ist gegeben durch  $y = x + 1$ .

Wir halten unsere anschauliche Vorstellung einer Schmiegegeraden in der folgenden Definition fest:

**Definition:** Eine *Asymptote* für eine Funktion  $f$  ist eine Gerade, die Graph einer linearen Funktion  $q$  ist mit der Eigenschaft:  
 Der Abstand zwischen  $f(x)$  und  $q(x)$  konvergiert gegen 0 für  $x \rightarrow \pm\infty$ .  
 In Formeln:  

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - q(x)) = 0.$$

Diese Überlegungen kann man allgemein für beliebige rationale Funktionen  $f$  durchführen, deren Zählergrad größer ist als der Nennergrad. Division mit Rest ergibt  $f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)} = q(x) + s(x)$  mit ganzrationaler Funktion  $q$  vom Grad  $n - m$ . Da der Grad von  $r$  kleiner als der Grad von  $h$  ist, hat  $s(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$  den Grenzwert 0 für  $x \rightarrow \pm\infty$ . Dies ergibt den folgenden

**Satz:** Sei  $f(x)$  eine rationale Funktion und  $q(x)$  der durch Division mit Rest bestimmte ganzrationale Anteil. Dann gilt:  

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - q(x)) = 0.$$
  
 Der Graph der rationalen Funktion  $f$  schmiegt sich also für  $x \rightarrow \pm\infty$  dem Graphen der ganzrationalen Funktion  $q$  an.  
 Dabei hat  $q$  als Grad die Differenz  $n - m$  von Zähler- und Nennergrad von  $f$  und als führenden Koeffizienten den Quotienten  $\frac{a_n}{b_m}$  der führenden Koeffizienten von Zähler und Nenner von  $f$ :  

$$q(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \dots$$

Auf diese Weise hat man eine weitere Methode, mit der man das Verhalten einer rationalen Funktion  $f$  im Unendlichen bestimmen kann: Man dividiert den Zähler von  $f$  durch den Nenner mit Rest und untersucht den gefundenen Quotienten  $q(x)$ . Das Verhalten der rationalen Funktion

$f$  im Unendlichen stimmt dann mit dem von  $q$  überein. Da  $q$  ganz-rational ist, ist letzteres bekannt. ( $q$  hat den Grad  $n - m$  und den führenden Koeffizienten  $\frac{a_n}{b_m}$ .)

Mit diesen Überlegungen können wir nun genau angeben, wann eine rationale Funktion eine Asymptote besitzt, nämlich dann, wenn der durch Division mit Rest bestimmte Quotient  $q(x)$  linear ist, also den Grad  $n - m \leq 1$  hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Zählergrad  $n$  von  $f$  um höchstens 1 größer ist als der Nennergrad  $m$ :

**Folgerung:** Eine rationale Funktion  $f$  hat genau dann eine Asymptote, wenn der Zählergrad  $n$  um höchstens 1 größer ist als der Nennergrad  $m$ :  $n \leq m + 1$ .  
 Im Falle  $n = m + 1$  ist die Asymptote *schräg* mit Anstieg  $\frac{a_n}{b_m}$ ,  
 im Falle  $n = m$  ist die Asymptote eine Parallele zur  $x$ -Achse mit der Gleichung  $y = \frac{a_n}{b_m}$  und  
 im Falle  $n < m$  ist die  $x$ -Achse Asymptote.

**e. Grenzwerte an endlichen Stellen.** Ein weiteres neues Phänomen bei rationalen Funktionen war das Auftreten von Lücken und die dadurch notwendig werdende Untersuchung von Grenzwerten an Stellen  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Man definiert nun den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  ähnlich wie bei  $x \rightarrow \infty$ . Man kommt so zu folgender

**Definition:** Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  ist Grenzwert einer Funktion  $f$  für den Grenzübergang  $x \rightarrow x_0$ , wenn folgendes gilt:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit:  $|f(x) - a| < \varepsilon$  falls  $0 < |x - x_0| < \delta$ .

Ist dies der Fall, so schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad (\text{in Worten: Limes } f(x) \text{ für } x \text{ gegen } x_0 \text{ ist gleich } a).$$

Anschaulich gesprochen: Die Werte  $f(x)$  kommen dem Grenzwert  $a$  beliebig nahe (beschrieben durch den Abstand  $\varepsilon$ ), wenn nur  $x$  nahe genug bei  $x_0$  ist (beschrieben durch den Abstand  $\delta$ ), wobei  $x = x_0$  außer Betracht bleibt.

Die in Abschnitt c. formulierten **Grenzwertsätze** gelten für Grenzübergänge  $x \rightarrow x_0$  genauso wie für  $x \rightarrow \infty$ . Aus ihnen ergibt sich die besonders einfache Berechnung von Grenzwerten an Stellen  $x_0$  im Definitionsbereich. Es gilt dann nämlich:

**Satz/Definition:** Für alle rationalen Funktionen  $f$  gilt:

$$(S) \quad x_0 \in \mathcal{D}_f \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Für rationale Funktionen ist der Grenzwert an *Definitionsstellen* nichts anderes als der Funktionswert an dieser Stelle, oder anders formuliert:  
 Strebt  $x$  gegen  $x_0$ , so strebt  $f(x)$  gegen  $f(x_0)$  – vorausgesetzt  $f$  ist bei  $x_0$  definiert!  
 Funktionen mit dieser Eigenschaft (S) heißen *stetig*.

Alle rationalen Funktionen sind stetig.

Zur Bestimmung der *Grenzwerte* rationaler Funktionen an *Definitionslücken* geht man folgendermaßen vor. Ist  $x_0$  eine Lücke von  $f$ , also eine Nullstelle des Nenners, so unterscheidet man folgende Fälle:

1. Fall:  $x_0$  ist *keine* Nullstelle des Zählers. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty,$$

denn aus  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  mit  $h(x_0) = 0$ ,  $g(x_0) \neq 0$  folgt wegen der Stetigkeit von Zähler und Nenner  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h(x_0) = 0$  und daher mit dem Grenzwertsatz für Quotienten ( $g(x_0) \neq 0$ !)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{0}{g(x_0)} = 0, \text{ also } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty.$$

2. Fall:  $x_0$  ist Nullstelle des Nenners *und* des Zählers von  $f$ . Dann spaltet man in Zähler und Nenner den Linearfaktor  $x - x_0$  so oft wie möglich ab und kürzt:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{(x - x_0)^k \cdot g_1(x)}{(x - x_0)^l \cdot h_1(x)} = (x - x_0)^{k-l} \cdot \frac{g_1(x)}{h_1(x)} =: \tilde{f}(x) \text{ für } x \neq x_0.$$

Hierbei sind  $k$  bzw.  $l$  die Vielfachheiten von  $x_0$  als Nullstelle des Zählers bzw. des Nenners und folglich  $g_1(x_0) \neq 0$ ,  $h_1(x_0) \neq 0$  (andernfalls könnte man weitere Linearfaktoren abspalten). Da  $f$  und  $\tilde{f}$  außerhalb von  $x_0$  übereinstimmen, haben sie bei  $x_0$  denselben Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x)$ . Zur Berechnung des Grenzwertes von  $\tilde{f}$  unterscheiden wir:

Fall 2.1  $k < l$ : In diesem Fall ist  $l - k \geq 1$  und  $\tilde{f}(x) = \frac{g_1(x)}{(x - x_0)^{l-k} h_1(x)}$  hat somit ebenfalls bei  $x_0$  eine Lücke. Da aber  $x_0$  keine Nullstelle des Zählers  $g_1$  von  $\tilde{f}$  ist, folgt gemäß dem 1. Fall:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |\tilde{f}(x)| = \infty.$$

Fall 2.2  $k \geq l$ : In diesem Fall ist  $k - l \geq 0$  und  $\tilde{f} = \frac{(x - x_0)^{k-l} g_1(x)}{h_1(x)}$ . Wegen  $h_1(x_0) \neq 0$  ist  $\tilde{f}$  bei  $x_0$  definiert und (wegen der Stetigkeit)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Im Fall 2.2 hat  $f$  einen endlichen Grenzwert bei  $x_0$ .  $\tilde{f}$  ist dann eine stetige Fortsetzung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  und man nennt daher  $x_0$  eine *stetig hebbare* Lücke von  $f$ .

Wir fassen zusammen:

**Satz:** Es sei  $f$  eine rationale Funktion und  $x_0$  eine Definitionslücke von  $f$ .

a) Ist die Lücke  $x_0$  keine Nullstelle des Zählers von  $f$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty.$$

Man nennt dann  $x_0$  einen *Pol* von  $f$ .

b) Ist  $x_0$  Nullstelle von Nenner *und* Zähler, so spalte man in beiden den Linearfaktor  $x - x_0$  so oft wie möglich ab (durch Polynomdivision) und kürze. Man erhält so eine rationale *Ersatzfunktion*  $\tilde{f}$  und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x).$$

b1) Ist  $x_0$  auch Lücke von  $\tilde{f}$ , so ist  $x_0$  ein Pol von  $f$ .

b2) Ist  $\tilde{f}$  bei  $x_0$  definiert, so ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \tilde{f}(x_0) \in \mathbb{R}$$

und  $x_0$  ist *stetig hebbare* Lücke von  $f$ .

**f. Einseitige Grenzwerte.** In manchen Fällen benötigt man neben dem oben definierten Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  noch die sogenannten *einseitigen* Grenzwerte:

linksseitiger Grenzwert  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$  und rechtsseitiger Grenzwert  $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ .

Ihre Definition ist wörtlich die des gewöhnlichen (*beidseitigen*) Grenzwertes, nur dass die Variable  $x$  wie angegeben auf Werte  $x < x_0$  bzw.  $x > x_0$  eingeschränkt wird.

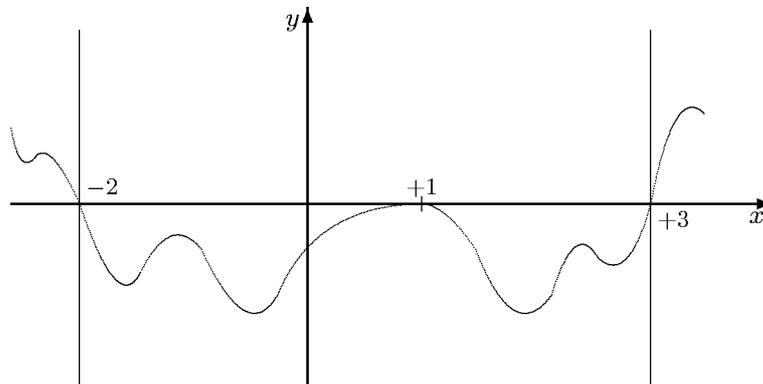
Für die einseitigen Grenzwerte gelten die **Grenzwertsätze** uneingeschränkt. Außerdem gilt: Der (beidseitige) Grenzwert an einer Stelle  $x_0$  existiert genau dann, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte existieren und *übereinstimmen*:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = a.$$

## II. Differentialrechnung

### §3 Der Ableitungsbegriff

Unsere bisherigen Diskussionen in Kapitel II ermöglichen nur die Bestimmung der Nullstellen und Lücken rationaler Funktionen und des *Vorzeichens der Funktionswerte*. Welchen *Verlauf* jedoch die Funktion dort hat, kann aus den bisherigen Überlegungen nicht entnommen werden. So lassen die Berechnungen des Beispiels (\*) auf S. 8f. nicht nur den dort skizzierten Verlauf, sondern etwa auch den folgenden zu:

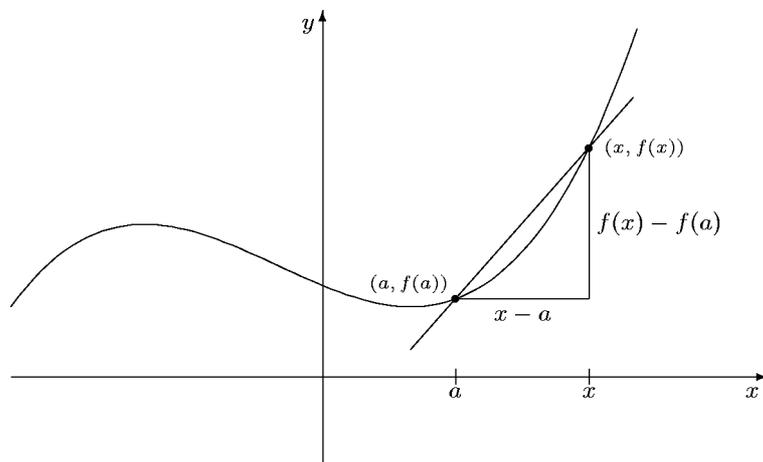


Um nun den Verlauf zwischen zwei Nullstellen bzw. Lücken genauer zu erfassen, wollen wir den Begriff des *Anstiegs* des Funktionsgraphen präzisieren. Wenn uns dies gelingt und wir entscheiden können, in welchen Bereichen der Funktionsgraph *steigt* und wo er *fällt*, so können wir den Verlauf des Graphen schon recht genau bestimmen.

**a. Sekantensteigung, Differenzenquotient, Ableitung, Tangente.** Der Begriff des *Anstiegs* eines Funktionsgraphen ist für lineare Funktionen bekannt. Eine lineare Funktion, d. i. eine ganz-rationale Funktion vom Grade  $\leq 1$ , ist gegeben durch einen Funktionsterm der Form  $f(x) = mx + b$  mit reellen Zahlen  $m, b \in \mathbb{R}$ . Ihr Graph ist eine Gerade mit dem *y-Achsenabschnitt*  $b$  und dem *Anstieg*  $m$ . Dieser ergibt sich aus den Koordinaten zweier verschiedener Punkte  $P_1 = (x_1, y_1)$  und  $P_2 = (x_2, y_2)$  auf der Geraden durch

$$\text{Geradenanstieg } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Will man nun für einen beliebigen Funktionsgraphen den Anstieg bestimmen, so hat man zunächst das Problem, dass der Anstieg an verschiedenen Stellen verschieden ist. Wir müssen also zunächst eine *Stelle*  $a$  fixieren und untersuchen den Graphen in der Nähe des Punktes  $P = (a, f(a))$ . Dazu wählen wir in der Nähe von  $P$  einen weiteren Punkt  $Q = (x, f(x))$  auf  $G(f)$  ( $x \neq a$ ) und verbinden beide durch eine Gerade. Eine solche *Gerade durch zwei Punkte des Graphen*  $G(f)$  nennt man eine *Sekante*.



Der Anstieg dieser Sekante ist gegeben durch

$$D(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Man nennt diesen *Sekantenanstieg* wegen der Form des Terms auch *Differenzenquotient*. Dieser ist (bei fixierter Stelle  $a$ ) von  $x$  abhängig: Er stellt eine *Funktion* von  $x$  dar. Ändert man  $x$ , so ändert sich in der Regel der Sekantenanstieg. Etwa für die Funktion  $f$  gegeben durch  $f(x) = x^2$  und die Stelle  $a$  ist der Differenzenquotient dann gegeben durch

$$D(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a}.$$

Will man den Anstieg von  $G(f)$  an der Stelle  $a$ , d. h. beim Punkt  $P = (a, f(a))$  erfassen, so nähert man sich mit dem Punkt  $Q = (x, f(x))$  immer mehr  $P$ , d. h.  $x$  nähert sich immer mehr  $a$ . Man untersucht dann das Verhalten der Sekantenanstiege  $D(x)$  bei Annäherung von  $x$  an  $a$ , d. h. man führt den Grenzübergang  $x \rightarrow a$  durch. Existiert dann der Grenzwert von  $D(x)$  für  $x \rightarrow a$ , so definiert man diesen als *Anstieg* von  $f$  an der Stelle  $a$  und bezeichnet ihn mit  $f'(a)$ :

**Definition:** Es sei  $f$  eine Funktion und  $a$  eine Stelle im Definitionsbereich. Dann definiert man:

a)  $f$  ist an der Stelle  $a$  differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

in  $\mathbb{R}$  existiert.

b) Ist dies der Fall, so nennen wir den Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

den *Anstieg von  $f$  an der Stelle  $a$* .

c) Indem man jeder Stelle  $a$ , an der  $f$  differenzierbar ist, den Anstieg  $f'(a)$  zuordnet

$$a \mapsto f'(a)$$

erhält man eine neue Funktion  $f'$ , die sog. *Ableitung*(sfunktion). Ihr Definitionsbereich ist die Menge

$$\mathcal{D}(f') = \{a \in \mathcal{D}(f) \mid f \text{ ist bei } a \text{ differenzierbar}\}.$$

d) Man sagt  $f$  ist *differenzierbar*, wenn  $f$  an allen Stellen ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist.

Nachdem wir den Begriff des Anstiegs einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $a$  definiert haben, können wir nun auch den Begriff der Tangente präzise fassen:

**Definition:** Die Tangente an einen Graphen von  $f$  im Punkt  $(a, f(a))$  ist die Gerade durch diesen Punkt  $(a, f(a))$ , die denselben Anstieg hat wie  $f$  an dieser Stelle, deren Anstieg also  $f'(a)$  ist.

Die Tangente ist nur dann definiert, wenn  $f'(a)$  definiert ist, wenn also  $f$  an der Stelle  $a$  differenzierbar ist.

**Anmerkung:** Die Tangente an den Graphen von  $f$  an der Stelle  $a$ , das soll heißen im Punkte  $(a, f(a))$ , ist gegeben durch den Graphen der linearen Funktion

$$\text{Tangentenfunktion von } f \text{ zur Stelle } a: \quad t(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

*Beweis:* Da die Tangente den Anstieg  $f'(a)$  hat, ist sie Graph einer linearen Funktion  $t(x) = mx + b$  mit  $m = f'(a)$ . Man muss nun nur noch  $b$  bestimmen. Dazu verwenden wir die zweite Forderung bei der Tangentendefinition: Die Tangente soll durch den Punkt  $P = (a, f(a))$  verlaufen; das bedeutet, dass  $P$  auf dem Graphen von  $t$  liegen, also  $t(a) = f(a)$  sein muss:

$$f(a) = t(a) = f'(a) \cdot a + b, \quad \text{also } b = f(a) - f'(a) \cdot a.$$

Damit erhält man — wie behauptet — die Tangentenfunktion (von  $f$  zur Stelle  $a$ )

$$t(x) = f'(a)x + f(a) - f'(a) \cdot a = f(a) + f'(a)(x - a).$$

**b. Differenzierbarkeit und Stetigkeit.** Man beachte, dass die Existenz des Anstiegs  $f'(a)$  bzw. einer Tangente an einer Stelle  $a$  nicht selbstverständlich ist. Zunächst einmal kann eine Funktion nicht differenzierbar sein, wenn sie nicht wenigstens stetig ist:

**Satz:** Ist eine Funktion  $f$  an einer Stelle  $a$  differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

Differenzierbare Funktionen sind stetig.

*Beweis:* Wir müssen zeigen:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existiert in } \mathbb{R} \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Wir setzen voraus, dass der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert, und betrachten folgende Darstellung für  $f(x)$ :

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \quad \text{gültig für } x \neq a.$$

Aufgrund der Grenzwertsätze ergibt sich daraus

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\rightarrow f'(a)} \cdot \underbrace{(x - a)}_{\rightarrow 0} \rightarrow f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a) \quad \text{für } x \rightarrow a,$$

was zu beweisen war.

Aber auch stetige Funktionen sind nicht notwendig differenzierbar. Typisches Beispiel ist die Betragsfunktion:

**Beispiel:** Die Betragsfunktion  $f(x) = |x|$  ist an der Stelle  $a = 0$  nicht differenzierbar; sie besitzt an dieser Stelle keine eindeutige Tangente.

Zur *Begründung* untersuchen wir den Differenzenquotienten für die Stelle  $a = 0$ :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

Entsprechend der Definition des Betrages ergeben sich die *einseitigen* Grenzwerte

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-x}{x} = -1.$$

Wenn aber die beiden *einseitigen* Grenzwerte von  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  nicht übereinstimmen, kann der gesuchte (beidseitige) Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \dots$  nicht existieren:  $f(x) = |x|$  ist an der Stelle 0 *nicht* differenzierbar. Geometrisch erkennt man dies an dem *Knick*, den der Graph dort hat.

Anschaulich gesprochen liegt Differenzierbarkeit vor, wenn der Graph *glatt* ist und keinen *Knick* hat (wie bei der Betragsfunktion an der Stelle 0).

An allen anderen Stellen ist die Betragsfunktion jedoch differenzierbar. (Bestimmen Sie zur Übung die Ableitungsfunktion  $f'$  samt ihrem Definitionsbereich!)

Als Gegenstück zum obigen Beispiel wollen wir nun zeigen, dass alle rationalen Funktionen differenzierbar sind:

**Satz:** Rationale Funktionen sind differenzierbar.

*Beweis:* Sei  $f$  eine rationale Funktion und  $a$  eine Stelle im Definitionsbereich von  $f$ . Wir untersuchen den Differenzenquotienten

$$D(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Da  $f$  eine rationale Funktion ist, ist  $f(x) - f(a)$  und dann auch  $D(x)$  rational. Wegen des Nenners  $x - a$  ist  $D$  an der Stelle  $a$  *nicht* definiert,  $a$  ist eine Lücke von  $D$ . Der Zähler  $f(x) - f(a)$  ist jedoch bei  $a$  definiert und hat dort den Wert  $f(a) - f(a) = 0$ ; es lässt sich also im Zähler der Linearfaktor  $x - a$  abspalten:  $f(x) - f(a) = (x - a)q(x)$ , wobei  $q$  eine bei  $a$  definierte (!) rationale Funktion ist. Damit lässt sich in  $D(x)$  der Linearfaktor kürzen und man erhält

$$D(x) = \frac{(x - a)q(x)}{x - a} = q(x) \quad \text{für } x \neq a.$$

Da  $q$  bei  $a$  definiert und als rationale Funktion stetig ist, existiert

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} q(x) = q(a) \in \mathbb{R}.$$

Dies bedeutet:  $f$  ist an der Stelle  $a$  differenzierbar. (Beachten Sie:  $q$  ist nichts anderes als die Ersatzfunktion  $\tilde{D}$  und die Lücke  $a$  von  $D$  hat sich als hebbare Lücke von  $D$  erwiesen.)

In den Übungen haben Sie Gelegenheit, diesen Beweis an konkreten Beispielen nachzuarbeiten und dabei dann *explizite Formeln* für  $f'(a)$  herzuleiten (siehe auch Abschnitt c.).

**c. Die Ableitung der Potenzfunktionen.** Wir wollen hier nun allgemein für *beliebige* Potenzfunktionen die Ableitungsfunktion  $f'$  *explizit* bestimmen.

**Potenzregel:** Alle Potenzfunktionen  $f(x) = x^n$  ( $n \geq 1$ ) sind differenzierbar; die Ableitung ist  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

*Beweis:* Wir betrachten eine beliebige Stelle  $a$  und untersuchen den Differenzenquotienten

$$D(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a}.$$

Dieser lässt sich folgendermaßen darstellen

$$D(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}. \quad (*)$$

Diese Formel haben Sie in Spezialfällen in den Übungen selbst ermittelt. Man beweist (\*) am besten durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} (x - a) & (x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \\ &= x^n + ax^{n-1} + \dots + a^{n-2}x^2 + a^{n-1}x \\ & \quad - ax^{n-1} - a^2x^{n-2} - \dots - a^{n-1}x - a^n \\ &= x^n - a^n \end{aligned}$$

Folglich erhält man für  $f(x) = x^n$  als Ableitungswert

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + aa^{n-2} + a^2a^{n-3} + \dots + a^{n-2}a + a^{n-1} \\ &= n \cdot a^{n-1}. \end{aligned}$$

Dies gilt für alle  $a \in \mathbb{R} = \mathcal{D}(f)$  und die Behauptung ist bewiesen.

Bei sinnvoller Interpretation ist die Potenzregel auch richtig für  $n = 0$ . Für  $n = 0$  erhält man die konstante Funktion  $f(x) = x^0 = 1$ . Ihr Graph ist eine Gerade parallel zur  $x$ -Achse, ihre Ableitung also an allen Stellen 0. Allgemein gilt:

**Bemerkung:** Konstante Funktionen  $f(x) = c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) haben die Ableitung  $f'(x) = 0$ .

$$\boxed{f(x) = c \text{ konstant} \implies f'(x) = 0.}$$

Wir wollen nun die Potenzregel sogar ausdehnen auf negative Exponenten, d. h. auf die Kehrwerte  $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$  von Potenzfunktionen. Wieder müssen wir den Differenzenquotienten von  $f$  untersuchen. Sei also  $a$  eine Stelle des Definitionsbereiches von  $f$ , d. h.  $a \neq 0$ . Dann gilt für den Differenzenquotienten (wieder unter Benutzung der oben hergeleiteten Formel (\*))

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{a^n}}{x - a} &= \frac{a^n - x^n}{x^n a^n (x - a)} = \left(-\frac{1}{x^n a^n}\right) \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \left(-\frac{1}{x^n a^n}\right) (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}), \end{aligned}$$

so dass man den Grenzwert bestimmen kann:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ \left(-\frac{1}{x^n a^n}\right) (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \right] \\ &= \left(-\frac{1}{a^n a^n}\right) (a^{n-1} + aa^{n-2} + a^2a^{n-3} + \dots + a^{n-2}a + a^{n-1}) \\ &= -\frac{na^{n-1}}{a^{2n}} = -\frac{n}{a^{n+1}}. \end{aligned}$$

Beschreibt man nun die Ausgangs- und Ableitungsfunktion nicht durch Brüche, sondern durch Potenzen mit *negativen* Exponenten, so erhält man

$$f(x) = x^{-n} \implies f'(x) = -nx^{-n-1}$$

und erkennt, dass die Potenzregel in der angegebenen Form auch richtig ist für negative Exponenten:

Potenzfunktionen  $f(x) = x^n$  sind auch für  $n \in \mathbb{Z}$  differenzierbar mit  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

Wir erwähnen ohne Beweis, dass dieser Satz sogar für *gebrochene* Exponenten (allerdings mit einer kleinen Einschränkung) richtig bleibt. Setzt man in der Potenzregel  $n = 1/2$ , so erhält man für  $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$  die Ableitung  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Für diese Aussage wollen wir ad hoc einen Beweis geben und zugleich auf die dabei auftretende Problematik hinweisen:

**Satz:** Die Wurzelfunktion  $f(x) = \sqrt{x}$  ist an allen Stellen  $x > 0$  differenzierbar, und die Ableitungsfunktion ist gegeben durch

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

An der Stelle  $x = 0$  ist die Wurzelfunktion *nicht* differenzierbar.

Zum *Beweis* untersuchen wir wieder den Differenzenquotienten:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}. \quad (*)$$

Damit können wir an Stellen  $a > 0$  den Grenzübergang  $x \rightarrow a$  durchführen:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Beachten Sie, dass wir beim vorletzten Gleichheitszeichen die Konvergenz  $\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{a}$ , also die Stetigkeit<sup>1)</sup> der Wurzelfunktion benutzt haben sowie die Tatsache, dass  $a \neq 0$  ist.

Für die Stelle  $a = 0$  muss man den Differenzenquotienten

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

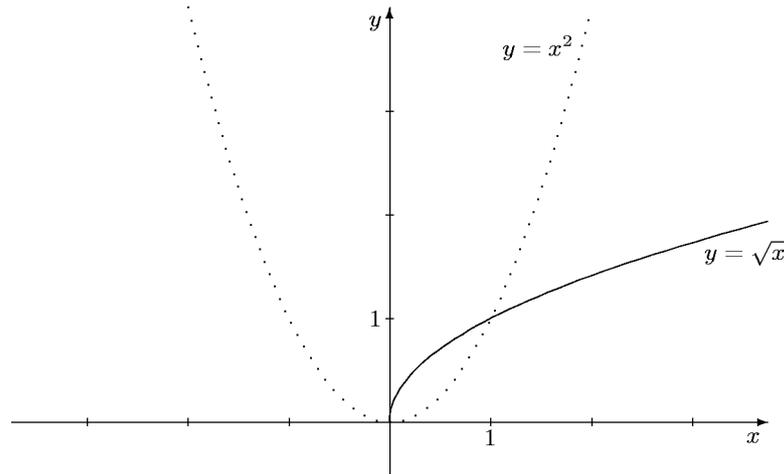
untersuchen. Für  $x \rightarrow 0$  hat aber  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  keinen Grenzwert in  $\mathbb{R}$ , sondern wächst über alle Grenzen:  $f'(0)$  existiert nicht!

Diese Resultate lassen sich auch deutlich am Verlauf des Graphen der Wurzelfunktion erkennen. Dieser Graph ist die obere Hälfte der an der Winkelhalbierenden des I./III. Quadranten

---

<sup>1)</sup> Die Stetigkeit der Wurzelfunktion haben wir hier nicht nachgewiesen, man kann sie jedoch ebenfalls aus der Beziehung (\*) folgern: Man benutzt, dass die rechte Seite immer  $\leq 1/\sqrt{a}$  ist und damit der Differenzenquotient beschränkt bleibt. Dies ist nur möglich, wenn mit dem Nenner  $x - a$  auch der Zähler  $\sqrt{x} - \sqrt{a}$  gegen 0 strebt.

gespiegelten Normalparabel mit Scheitel  $(0, 0)$  (siehe Skizze). Die Normalparabel hat in ihrem



Scheitelpunkt die  $x$ -Achse als Tangente. Bei der Spiegelung geht diese in die  $y$ -Achse über. Die  $y$ -Achse berührt also im Koordinatenursprung den Graphen der Wurzelfunktion. Für die  $y$ -Achse ist aber keine Steigung definiert. Dies entspricht genau dem obigen Resultat, dass für die Wurzelfunktion an der Stelle 0 der Anstieg  $f'(0)$  nicht existiert.

**d. Erste Ableitungsregeln.** Nachdem wir die Ableitungsfunktionen aller Potenzfunktionen kennen, wollen wir nun allgemein ganzrationale Funktionen *ableiten*. Wichtiges Hilfsmittel sind dafür die folgenden Ableitungsregeln.

**Satz:** (Erste Ableitungsregeln)

a) (Faktorregel) Ist eine Funktion  $u$  an einer Stelle  $a$  differenzierbar und ist  $c \in \mathbb{R}$  eine beliebige Konstante, so ist auch  $f = c \cdot u$  (definiert durch  $f(x) = c \cdot u(x)$ ) auch die Funktion  $f = cg$ , die durch den Funktionsterm  $f(x) = c \cdot g(x)$  gegeben ist, bei  $a$  differenzierbar und es gilt

$$f'(a) = (c \cdot u)'(a) = c \cdot u'(a).$$

b) (Summenregel) Sind  $u$  und  $v$  an einer Stelle  $a$  differenzierbar, so ist auch ihre *Summenfunktion*  $f = u + v$  (definiert durch  $f(x) = u(x) + v(x)$ ) bei  $a$  differenzierbar und es gilt

$$f'(a) = (u + v)'(a) = u'(a) + v'(a).$$

*Beweis:* a) Wir müssen den Differenzenquotienten von  $f = c \cdot u$  zur Stelle  $a$  untersuchen. Dieser ist gegeben durch

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{c \cdot u(x) - c \cdot u(a)}{x - a} = c \cdot \frac{u(x) - u(a)}{x - a}.$$

Da  $u$  bei  $a$  differenzierbar ist, ergibt sich aus den Grenzwertsätzen

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = c \cdot u'(a).$$

Ad b): Wieder betrachten wir den Differenzenquotienten von  $f$ :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{(u(x) + v(x)) - (u(a) + v(a))}{x - a} = \frac{u(x) + v(x) - u(a) - v(a)}{x - a} \\ &= \underbrace{\frac{u(x) - u(a)}{x - a}}_{\rightarrow u'(a)} + \underbrace{\frac{v(x) - v(a)}{x - a}}_{\rightarrow v'(a)}. \end{aligned}$$

Gemäß den Grenzwertsätzen erhält man daraus dann

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x) - v(a)}{x - a} = u'(a) + v'(a).$$

Damit ist Teil b) bewiesen.

Beliebige ganzrationale Funktionen werden durch Addition und Multiplikation mit Zahlen aus den Potenzfunktionen  $f(x) = x^n$  aufgebaut. Dabei sind für  $n$  beliebige natürliche Zahlen oder 0 zulässig. Aus Potenz-, Faktor- und Summenregel ergibt sich daher die folgende allgemeine Ableitungsformel für alle ganzrationalen Funktionen:

**Satz:** Die Ableitung einer ganzrationalen Funktionen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ist wieder ganzrational:

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1.$$

Der Grad von  $f'$  ist um 1 kleiner als der Grad von  $f$  (wenn letzterer  $\geq 1$  ist).

**e. Produkt- und Quotientenregel.** Bisher haben wir nur für Potenzfunktionen und darauf aufbauend mittels der Faktor- und Summenregel für alle ganz-rationale Funktionen die Ableitungen bestimmen können. Wir wissen zwar, dass auch alle rationalen Funktionen differenzierbar sind (vgl. S. 24); um aber ihre Ableitungen allgemein berechnen zu können, benötigen wir Ableitungsregeln für Produkte und vor allem für Quotienten von Funktionen:

**Satz:** a) (Produktregel) Sind die Funktionen  $u, v$  an der Stelle  $a$  differenzierbar, so ist auch ihre *Produktfunktion*  $f = u \cdot v$  (definiert durch  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ ) bei  $a$  differenzierbar und es gilt

$$f'(a) = (uv)'(a) = u'(a) \cdot v(a) + u(a) \cdot v'(a).$$

b) (Quotientenregel) Sind die Funktionen  $u, v$  an der Stelle  $a$  differenzierbar, so ist auch ihre *Quotientenfunktion*  $f = \frac{u}{v}$  (definiert durch  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ ) bei  $a$  differenzierbar - vorausgesetzt,  $a$  gehört zum Definitionsbereich von  $f$ , d. h.  $v(a) \neq 0$ ! Die Ableitung berechnet sich dann als

$$f'(a) = \left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}.$$

**Merkregeln:**

Ableitung eines Produktes: ‘*Ableitung des ersten Faktors mal zweiter Faktor plus erster Faktor mal Ableitung des zweiten Faktors.*’

Ableitung eines Quotienten: ‘*Ableitung des Zählers mal Nenner minus Zähler mal Ableitung des Nenners, und das Ganze dividiert durch das Quadrat des Nenners.*’

Manch einer wird sich fragen, warum gilt für die Ableitung des Produktes nicht eine so einfache Formel<sup>1)</sup> wie für die Summe? Dazu schauen wir uns einmal den *Beweis* an. Wieder müssen

---

<sup>1)</sup> Überprüfen Sie selbst am Beispiel  $u(x) = x^3, v(x) = x^4$ , dass die Ableitung des Produktes nicht das Produkt der einzelnen Ableitungen sein kann! Beachten Sie dabei insbesondere die Grade!

wir den Differenzenquotienten  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  berechnen und den Grenzwert für  $x \rightarrow a$  untersuchen. Dabei benutzen wir einen beliebigen kleinen mathematischen Trick (siehe (\*)) in nachfolgender Umformung). Ähnlich wie bei der quadratischen Ergänzung fügt man einen Term hinzu, der die Umformung erleichtert – und zieht ihn sogleich wieder ab. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{u(x)v(x) - u(a)v(a)}{x - a} \\ &= \frac{u(x)v(x) - \overbrace{u(a)v(x) + u(a)v(x)}^{=0} - u(a)v(a)}{x - a} \\ &= \frac{u(x)v(x) - u(a)v(x)}{x - a} + \frac{u(a)v(x) - u(a)v(a)}{x - a} \\ &= \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \cdot v(x) + u(a) \cdot \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \end{aligned} \quad (*)$$

Durch diese Umformungen haben wir den Differenzenquotienten von  $f$  durch die Differenzenquotienten von  $u$  und  $v$  ausgedrückt. Deren Verhalten für  $x \rightarrow a$  ist bekannt, da  $u$  und  $v$  differenzierbar sind: Ihre Differenzenquotienten streben gegen den jeweiligen Ableitungswert  $u'(a)$  bzw.  $v'(a)$ . Da  $v$  bei  $a$  differenzierbar, also erst recht stetig ist (siehe S. 23), gilt  $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = v(a)$  und man erhält aus den Grenzwertsätzen insgesamt

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} v(x) + u(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \\ &= u'(a)v(a) + u(a)v'(a). \end{aligned}$$

Für die Quotientenregel geht man genauso vor, man beachte aber, dass  $a$  zum Definitionsbereich von  $f$  gehört, also  $v(a) \neq 0$  ist. Wir formen zunächst den Zähler  $f(x) - f(a)$  des Differenzenquotienten wie oben um:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{u(x)}{v(x)} - \frac{u(a)}{v(a)} = \frac{u(x)v(a) - u(a)v(x)}{v(x)v(a)} \\ &= \frac{1}{v(x)v(a)} \cdot (u(x)v(a) - \overbrace{u(a)v(a) + u(a)v(a)}^{=0} - u(a)v(x)) \\ &= \frac{1}{v(x)v(a)} \cdot ((u(x) - u(a))v(a) - u(a)(v(x) - v(a))), \end{aligned}$$

und nach Division durch  $x - a$  erhält man

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{v(x)v(a)} \cdot \left( \frac{u(x) - u(a)}{x - a} v(a) - u(a) \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \right).$$

Wieder gilt  $v(x) \rightarrow v(a)$  und wegen  $v(a) \neq 0$  erhält man aus den Grenzwertsätzen,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{v(a)v(a)} \cdot (u'(a)v(a) - u(a)v'(a)),$$

was zu beweisen war.

Aus der Quotientenregel folgt nun, dass die rationalen Funktionen nicht nur differenzierbar sind, sondern sogar gilt:

Ableitungen rationaler Funktionen sind wieder rational.

Denn: Rationale Funktionen  $f$  sind Quotienten ganzrationaler Funktionen:  $f = \frac{u}{v}$ . Die Ableitungen von  $u, v$  sind wieder ganzrational (s. S. 28), also ist die Ableitung

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Quotient von ganzrationalen Funktionen, d. h. eine rationale Funktion.

Beachten Sie: Während bei ganzrationalen Funktionen die Ableitungen 'einfacher' als die Ausgangsfunktionen sind (der Grad sinkt), gilt dies für rationale Funktionen nicht; hier sind die Ableitungsterme in der Regel komplizierter als die Ausgangsfunktionsterme.

#### §4 Monotonie und Extrema

**a. Extremstellen und stationäre Stellen.** Nachdem wir nun in der Lage sind, beliebige rationale Funktionen abzuleiten, wollen wir uns jetzt wieder der Frage zuwenden, was wir aus der Kenntnis der Ableitung  $f'$  über die Funktion  $f$  selbst erfahren können.

**Definition:** Sei  $f$  eine Funktion und  $a$  eine Stelle im Definitionsbereich von  $f$ .

a) Wir sagen:  $f$  hat bei  $a$  ein (lokales) *Maximum*, wenn in einer (kleinen) Umgebung von  $a$   $f(x) \leq f(a)$  gilt, d. h. genauer: es gilt  $f(x) \leq f(a)$  für alle  $x \in \mathbb{D}_f$ ,  $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$  mit einem (kleinen)  $\varepsilon > 0$ .

b) Entsprechend spricht man von einem (lokalen) *Minimum*, wenn  $f(a) \leq f(x)$  in einer Umgebung von  $a$  gilt.

c)  $f$  hat bei  $a$  ein *Extremum*, wenn dort ein Maximum oder Minimum vorliegt.

Wir nennen  $a$  entsprechend *Maximal-*, *Minimal-* oder einfach *Extremstelle*, und den zugehörigen Punkt  $(a, f(a))$  des Graphen von  $f$  nennen wir dementsprechend *Hoch-*, *Tief-* bzw. Extrempunkt.

$$a \text{ lokale } \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximalstelle} \\ \text{Minimalstelle} \end{array} \right\} \text{ von } f \iff f(x) \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \end{array} \right\} f(a) \text{ für } x \text{ nahe genug bei } a.$$

$$a \text{ Extremstelle von } f \iff a \text{ Maximal- oder Minimalstelle von } f.$$

**Satz:** (Notwendiges Extremstellenkriterium) Es sei  $f$  eine Funktion und  $a \in \mathbb{D}_f$ .

a) Ist  $a$  eine Extremstelle von  $f$  im *Innern* des Definitionsbereiches und ist  $f$  bei  $a$  differenzierbar, so ist  $a$  eine Nullstelle von  $f'$ .

$$a \text{ lokale Extremstelle von } f \wedge f \text{ differenzierbar bei } a \implies f'(a) = 0.$$

b) Aber **Achtung:** Nullstellen von  $f'$  sind nicht unbedingt auch Extremstellen!

Der *Beweis* von a) ergibt sich unmittelbar aus der Definition von  $f'(a)$ . Wir nehmen einmal an, dass  $f'(a) > 0$  ist. Dann muss auch der Differenzenquotient  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ , der sich dem positiven Wert  $f'(a)$  ja immer mehr annähert, schließlich für  $x$  nahe bei  $a$  ebenfalls positiv sein. Für ein geeignetes (kleines)  $\varepsilon > 0$  gilt dann

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{D}_f, x \text{ nahe genug bei } a.$$

Dies bedeutet, dass der Zähler  $f(x) - f(a)$  und der Nenner  $x - a$  in der Nähe von  $a$  stets dasselbe Vorzeichen haben. Ist also  $x \in \mathbb{D}_f$  nahe genug bei  $a$  und  $x < a$ , so ist  $f(x) < f(a)$ , und ist  $x > a$ , so ist  $f(x) > f(a)$ . Da  $a$  im *Innern* des Definitionsbereiches liegt, gibt es Stellen  $x \in \mathbb{D}_f$  nahe genug bei  $a$  mit  $x < a$  und solche mit  $x > a$ . Damit erkennt man, dass für  $x$  in der Nähe von  $a$  sowohl Werte  $f(x)$  ober- wie unterhalb von  $f(a)$  auftreten;  $a$  kann also keine Extremstelle sein. Genauso schließt man für  $f'(a) < 0$  und erhält insgesamt: Ist  $f'(a) \neq 0$ , so ist  $a$  keine Extremstelle von  $f$ , womit der obige Satz bewiesen ist.

Der Beweis zeigt, dass an Stellen  $a$  mit  $f'(a) > 0$  die Funktion  $f$  wächst, während sie an Stellen  $a$  mit  $f'(a) < 0$  fällt. Ist dagegen  $f'(a) = 0$ , so kann man nichts Allgemeingültiges über Wachstum oder Abnahme bei  $a$  sagen. Man nennt die Nullstellen von  $f'$  auch *stationäre Stellen* von  $f$ . Den zugehörigen Punkt  $(a, f(a))$  auf dem Graphen von  $f$  nennen wir entsprechend einen *stationären Punkt*. Die stationären Punkte eines Graphen sind also die Punkte, an denen die Tangente *waagerecht* verläuft.

Stationäre Stelle von  $f$  = Stelle mit waagerechter Tangente = Nullstelle von  $f'$ .

Damit kann man das notwendige Extremstellenkriterium für differenzierbare Funktionen so formulieren:

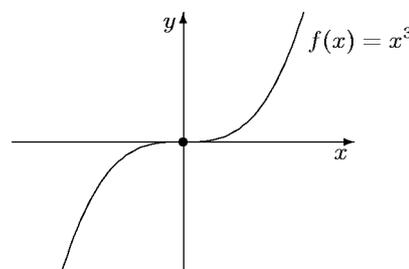
Innere Extremstellen sind notwendig stationäre Stellen.

Dieses Kriterium ist aber nicht *hinreichend*, d. h. aus  $f'(a) = 0$  kann man *nicht* folgern, dass  $a$  eine Extremstelle ist:

Es gibt Nullstellen von  $f'$ , die keine Extremstellen von  $f$  sind.

Dies zeigt der nebenstehend skizzierte Graph der Funktion  $f(x) = x^3$ : An der Stelle  $a = 0$  gilt  $f'(a) = 3a^2 = 0$ , also ist  $a$  stationäre Stelle von  $f$ . Aber der Punkt  $(0, 0)$  ist kein Extrempunkt von  $f$ .

Man nennt einen solchen Punkt einen *Sattelpunkt*.



Um also die Extremstellen einer differenzierbaren Funktion zu ermitteln, muss man zunächst die Nullstellen von  $f'$  bestimmen. Ob aber bei einer Nullstelle  $a$  der Ableitung  $f'$  tatsächlich ein Extremum von  $f$  vorliegt, und welcher Art es ist (Maximum oder Minimum), hängt nun davon ab, welches Verhalten  $f$  *vor* und *hinter* der Stelle  $a$  hat. Dies wollen wir im nächsten Abschnitt genauer untersuchen.

## b. Monotonieintervalle

**Definition:** (Monotonie) Es sei  $f$  eine Funktion und  $I$  ein Intervall im Definitionsbereich.

a) Wir definieren:

$f$  monoton  $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$  über  $I \iff f(x_1) \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \end{array} \right\} f(x_2)$  für alle  $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ .

b) Wir nennen eine Funktion  $f$  über  $I$  *monoton*, wenn sie entweder über ganz  $I$  monoton wachsend oder über ganz  $I$  monoton fallend ist.

c) Gilt in den Abschätzungen der Funktionswerte sogar  $f(x_1) \left\{ \begin{array}{l} < \\ > \end{array} \right\} f(x_2)$ , so spricht man von *strenger Monotonie*.

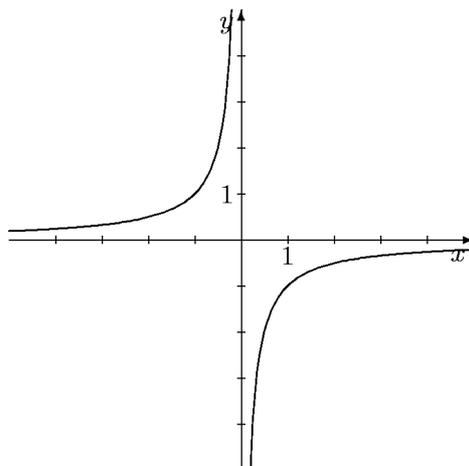
Das entscheidende Mittel zur Untersuchung der Monotonie von Funktionen ist der folgende

**Satz:** (Schwacher Monotoniesatz) Ist  $f$  über einem Intervall  $I$  differenzierbar und hat die Ableitung  $f'$  über  $I$  nur positive Werte:  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in I$ , so ist  $f$  über  $I$  streng monoton wachsend.

$f'(x) > 0$  für alle  $x \in I \implies f$  ist streng monoton wachsend über  $I$ .

**Warnung:** Die Aussage des Monotoniesatzes gilt nur über *Intervallen*, also zusammenhängenden Bereichen der Zahlengerade. Sie gilt *nicht*, wenn die Funktion im Bereich  $I$  eine Definitionslücke hat! Als Gegenbeispiel betrachte man die Funktion  $f(x) = -\frac{1}{x}$  (siehe Skizze). Ihre

Ableitung  $f'(x) = \frac{1}{x^2}$  ist positiv über dem ganzen Definitionsbereich von  $f$ , aber  $f$  ist nicht über dem ganzen Definitionsbereich monoton wachsend, sondern nur über den Teilintervallen  $] - \infty, 0[$  bzw.  $]0, \infty[$  (vgl. Skizze).



Der Monotoniesatz ist von fundamentaler Bedeutung für die Funktionsuntersuchungen. Aufgrund dieses Satzes ist die Untersuchung der *Monotonie* einer Funktion  $f$  gleichbedeutend mit der Untersuchung der *Vorzeichenverteilung* ihrer *Ableitungsfunktion*  $f'$ !

Monotonieuntersuchung von  $f =$  Vorzeichenuntersuchung von  $f'$ .

Wir können also unsere Überlegungen aus Kapitel I zur Vorzeichenverteilung einer Funktion auf die Ableitung  $f'$  anwenden und so die *Monotonieintervalle* der Ausgangsfunktion  $f$  bestimmen. Man geht dazu folgendermaßen vor:

- 1) Die Ableitung  $f'$  berechnen.
- 2) Die Vorzeichenverteilung von  $f'$  bestimmen (siehe Kapitel I, §1 g., §2 a.).
- 3) Dadurch sind *maximale Intervalle*  $I$  bestimmt, über denen  $f'$  nur positive bzw. nur negative Werte hat. Über diesen Intervallen ist  $f$  dann streng monoton steigend bzw. fallend.

Mit Hilfe der Monotonieintervalle kann man nun auch die Extremstellen ermitteln. Aufgrund des notwendigen Extremstellenkriteriums (s. S. 30) kommen nur Nullstellen von  $f'$  als innere Extremstellen in Frage. Der folgende Satz gibt ein *hinreichendes* Kriterium dafür, wann eine Nullstelle von  $f'$  tatsächlich Extremstelle ist.

**Satz:** (Hinreichendes Extremstellenkriterium)

Sei  $f$  differenzierbar und  $a$  eine Stelle im Innern des Definitionsbereiches.

' a) Hat  $f'$  bei  $a$  eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, so besitzt  $f$  bei  $a$  ein Extremum:

$a$  Nullstelle von  $f'$  mit Vorzeichenwechsel  $\implies a$  Extremstelle von  $f$ .

Genauer gilt: Wechselt  $f'$  bei  $a$  sein Vorzeichen von '−' zu '+', so hat  $f$  bei  $a$  ein Minimum, wechselt  $f'$  bei  $a$  sein Vorzeichen von '+' zu '−', so hat  $f$  bei  $a$  ein Maximum:

$a$  Nullstelle von  $f'$  mit Vorzeichenwechsel von − zu +  $\implies a$  Minimalstelle von  $f$ .  
 $a$  Nullstelle von  $f'$  mit Vorzeichenwechsel von + zu −  $\implies a$  Maximalstelle von  $f$ .

b) Ist  $a$  zwar eine Nullstelle von  $f'$ , aber die Werte von  $f'$  in der Nähe einheitlich positiv oder einheitlich negativ (liegt also kein Vorzeichenwechsel vor), so hat  $f$  bei  $a$  auch kein Extremum, sondern einen sog. *Sattelpunkt*:

$a$  Nullstelle von  $f$  ohne Vorzeichenwechsel  $\implies a$  Sattelstelle von  $f$ .

*Beweis:* a) folgt aus Satz (7.4): Gilt ‘kurz vor’  $a$ , d. h. in einem kleinen Intervall  $]a - \varepsilon, a]$  (mit  $\varepsilon > 0$ )  $f'(x) < 0$ , so ist  $f$  in diesem Bereich gemäß Satz (7.4) streng monoton fallend, also  $f(a)$  der kleinste Wert von  $f$  in diesem Bereich; gilt ‘kurz nach’  $a$ , d. h. in einem kleinen Intervall  $[a, a + \varepsilon[$  (mit  $\varepsilon > 0$ )  $f'(x) > 0$ , so ist die Funktion  $f$  in diesem Bereich streng monoton steigend, also auch hier  $f(a)$  der kleinste Wert. Damit hat man eine kleine ‘Umgebung’  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  von  $a$  gefunden, in der  $f(a)$  der kleinste auftretende Wert ist. Das heißt aber nichts anderes, als dass  $f$  bei  $a$  ein strenges lokales Minimum hat. Genauso argumentiert man für den anderen Vorzeichenwechsel und für b).

**Anmerkung:** Sieht man einmal von den Funktionen ab, deren Ableitungsfunktion  $f'$  überall den Wert 0 annimmt, so haben alle differenzierbaren Funktionen, die Ihnen üblicherweise im Mathematikunterricht begegnen werden, die folgende Eigenschaft: In der Nähe einer Nullstelle  $a$  von  $f'$  liegt keine weitere Nullstelle von  $f'$  (die Nullstellen von  $f'$  liegen *isoliert*) und einer der in a) oder b) genannten Fälle liegt vor.

Für differenzierbare Funktionen  $f$ , deren Ableitung nur isolierte Nullstellen hat, kann man kurz sagen:

Innere Extremstellen von  $f =$  Nullstellen von  $f'$  mit Vorzeichenwechsel.

**c. Der Monotoniesatz.** Die auf diese Weise nicht erfassten Funktionen  $f$  mit Ableitungsfunktion  $f'(x) = 0$  sind aber wohlbekannt, denn es gilt der folgende wichtige

**Satz:** Ist  $I$  ein Intervall (!) und  $f$  eine auf  $I$  differenzierbare Funktion, so gilt:

$f'(x) = 0$  für alle  $x \in I \iff f$  über  $I$  konstant:  $f(x) = c$  für alle  $x \in I$ .

Dass eine konstante Funktion überall die Ableitung 0 hat, ist klar. Entscheidend ist die Behauptung  $\implies$ . Diese scheint anschaulich genauso klar, aber **Vorsicht:** Die Stärke des Satzes liegt gerade darin, dass er für *jede beliebige* differenzierbare Funktion gilt, insbesondere für die, von denen wir eben noch keine *Anschauung* haben! Daher muss auch der Beweis frei von der Anschauung durchgeführt werden. Außerdem ist der Satz ohne die Voraussetzung, dass  $I$  ein Intervall ist, falsch!

Unterschätzen Sie die Bedeutung dieses Satzes nicht! Er ist grundlegend für die Berechnungsformel für *Integrale* wie auch für die Lösung von *Differentialgleichungen*, etwa für Wachstumsfunktionen oder Schwingungen.

Für den Beweis dieses Resultates benötigt man den *Monotoniesatz*. Hierbei genügt aber *nicht* der *schwache* Monotoniesatz (s. S. 31). Vielmehr muss dieser verschärft werden zum vollen Monotoniesatz, wie er nachfolgend formuliert ist.

**Satz:** (Monotoniesatz) Gegeben sei eine Funktion  $f$ , die über einem Intervall  $I$  differenzierbar ist. Dann gilt die folgende Äquivalenz:

$f'(x) \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} 0$  für alle  $x \in I \iff f$  ist monoton  $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$  über  $I$ .

Die Verschärfung gegenüber dem schwachen Monotoniesatz besteht darin, dass man als Voraussetzung nur benötigt, dass  $f'(x)$  stets größer *oder gleich* 0 ist. Man kann dann zwar nicht mehr die strenge Monotonie folgern, wohl aber die Monotonie. Und darüberhinaus erhält man hier eine *Äquivalenz*, statt nur einer hinreichenden Bedingung.

Mit Hilfe des Monotoniesatzes wird der *Beweis* des obigen Satzes über die Konstanz differenzierbarer Funktionen sehr einfach: Ist  $f'(x) = 0$  auf ganz  $I$ , so ist natürlich  $f'(x) \geq 0$  und  $f'(x) \leq 0$  auf ganz  $I$ , so dass nach dem Monotoniesatz für alle  $b > a$  sowohl  $f(b) \geq f(a)$  als auch  $f(b) \leq f(a)$ , also  $f(b) = f(a)$  gilt. Damit ist  $f$  konstant.

#### d. Beweise.

**Bemerkung:** a) Eine Funktion  $f$  ist genau dann über einem Intervall  $I$  monoton wachsend, wenn alle Differenzenquotienten  $\geq 0$  sind:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \text{ für alle } x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2.$$

Und  $f$  ist streng monoton wachsend, wenn alle Differenzenquotienten  $> 0$  sind.

b) Entsprechend ist  $f$  über  $I$  monoton fallend, wenn alle Differenzenquotienten  $\leq 0$  sind bzw. streng monoton fallend, wenn alle Differenzenquotienten  $< 0$  sind.

Wir *beweisen* nur eine der vier Aussagen. Die übrigen Beweise verlaufen analog. Wir haben folgende Äquivalenzen:

$f$  ist streng monoton wachsend über  $I$

$$\iff f(x_2) > f(x_1) \text{ für alle } x_1, x_2 \in I, x_2 > x_1$$

$$\iff f(x_2) - f(x_1) \text{ und } x_2 - x_1 \text{ haben gleiches Vorzeichen für alle } x_1, x_2 \in I$$

$$\iff \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \text{ für alle } x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$$

Zum Beweis des schwachen Monotoniesatzes (s. S. 31) müssen wir gemäß obiger Bemerkung zeigen:

Gilt auf einem Intervall  $I$  überall  $f'(x) > 0$ , so sind *alle* Differenzenquotienten  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$  ( $a, b \in I, a \neq b$ ).

Oder anders gewendet

Ist einer der Differenzenquotienten  $\leq 0$ , so muss an wenigstens einer Stelle  $z$  des Intervalls der Ableitungswert  $f'(z) \leq 0$  sein.

Für den Beweis ist entscheidend, dass wir ein Intervall zugrundegelegt haben, und wir werden wesentlich die *Vollständigkeit* der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  benutzen!

Wir gehen also davon aus, dass wenigstens ein Differenzenquotient  $\leq 0$  ist. Es existieren daher  $a, b \in I, a < b$  mit  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$ , also  $f(b) \leq f(a)$ . Wir betrachten nun den Mittelpunkt  $c$  zwischen  $a$  und  $b$ . Da  $I$  ein Intervall ist, liegt  $c$  in  $I$  (!) und  $f(c)$  ist definiert. Nun gibt es 2 Möglichkeiten:

Entweder 1)  $f(a) \geq f(c)$ : Dann ist  $a < c$  und  $f(a) \geq f(c)$ .

oder 2)  $f(c) > f(a)$ : Dann ist  $c < b$  und  $f(c) > f(a) \geq f(b)$ .

In jedem Falle haben wir im Intervall  $[a, b]$  ein halb so langes Intervall  $[a_1, b_1]$  gefunden (nämlich  $[a, c]$  oder  $[c, b]$ ), bei dem wiederum  $f(a_1) \geq f(b_1)$  gilt. Wir können nun dieses Verfahren der Intervallteilung fortsetzen und erhalten eine *Intervallschachtelung*

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots,$$

wobei stets  $f(a_n) \geq f(b_n)$  ist. Aufgrund der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  enthält diese Intervallschachtelung genau eine reelle Zahl, die wir  $z$  nennen wollen:  $a_n \leq z \leq b_n$  für alle  $n$  und  $z$  ist der Grenzwert der Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$ .

Wir wollen daraus nun *eine* Folge  $c_n$  konstruieren, die gegen  $z$  konvergiert und für die alle Differenzenquotienten

$$\frac{f(c_n) - f(z)}{c_n - z} \leq 0 \quad (*)$$

sind. Wir definieren das Folgenglied  $c_n$  als  $a_n$  oder  $b_n$ , jenachdem welcher der folgenden Fälle vorliegt:

1)  $z = a_n$ : Setzen wir dann  $c_n = b_n$ , so gilt  $f(c_n) - f(z) = f(b_n) - f(a_n) \leq 0$  und  $c_n - z = b_n - a_n > 0$ , also ist (\*) erfüllt.

2)  $z = b_n$ : Hier setzen wir  $c_n = a_n$ , und wieder gilt (\*).

3)  $f(a_n) \geq f(z)$  und  $a_n < z$ : Dann gilt  $\frac{f(a_n) - f(z)}{a_n - z} \leq 0$ , und wir setzen  $c_n = a_n$ .

4)  $f(z) \geq f(b_n)$  und  $z < b_n$ : Dann ist  $\frac{f(b_n) - f(z)}{b_n - z} \leq 0$ , und wir setzen  $c_n = b_n$ .

Wegen  $f(a_n) \geq f(b_n)$  und  $a_n \leq z \leq b_n$  muss einer der 4 Fälle eintreten. Wir erhalten so eine Folge  $c_n$ , die wie  $a_n$  und  $b_n$  ebenfalls gegen  $z$  konvergiert, und für die alle Differenzenquotienten

$$\frac{f(c_n) - f(z)}{c_n - z} \leq 0$$

sind. Wegen  $c_n \rightarrow z$  folgt dann durch Grenzübergang (wegen der Differenzierbarkeit von  $f$  an allen Stellen von  $I$ , also insbesondere auch an der Stelle  $z$ )

$$f'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(c_n) - f(z)}{c_n - z} \leq 0.$$

Damit ist eine Stelle  $z \in I$  gefunden mit  $f'(z) \leq 0$ , und der schwache Monotoniesatz ist bewiesen.

Wir kommen nun zum Beweis des Monotoniesatzes (s. S. 33): Die Richtung  $\Leftarrow$  beweist man mittels obiger Bemerkung: Ist  $f$  monoton wachsend, so sind für alle  $x \neq a$  die Differenzenquotienten

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Damit muss auch der Ableitungswert  $f'(a)$ , gegen den diese Differenzenquotienten konvergieren (für  $x \rightarrow a$ ), ebenfalls  $\geq 0$  sein.

Die umgekehrte Richtung  $\Rightarrow$  folgern wir aus dem schwachen Monotoniesatz. Sei also  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in I$ . Dann gilt für jede negative Zahl  $m < 0$  natürlich  $f'(x) > m$  ( $x \in I$ ). Wir fixieren  $m < 0$  und ein beliebiges  $a \in I$  und betrachten die

$$\text{Hilfsfunktion } g(x) = f(x) - f(a) - m(x - a) :$$

Nun gilt nach den Ableitungsregeln  $g'(x) = f'(x) - m$  für alle  $x \in I$ . Wegen  $f'(x) > m$  ergibt sich dann für die Hilfsfunktion  $g$

$$g'(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in I.$$

Man kann also auf  $g$  den schwachen Monotoniesatz (s. S. 31) anwenden und erhält:  $g$  ist über  $I$  streng monoton wachsend, also gilt für alle  $b \in I, b \neq a$

$$0 < \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a) - m(b - a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - m.$$

(Beachten Sie  $g(a) = 0$ .) Wir erhalten also für *jede negative* Zahl  $m$ :

$$m < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dies bedeutet, dass die Zahl  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  oberhalb *aller negativen* Zahlen  $m$  liegt, also selbst *nicht* negativ sein kann. Das heißt:

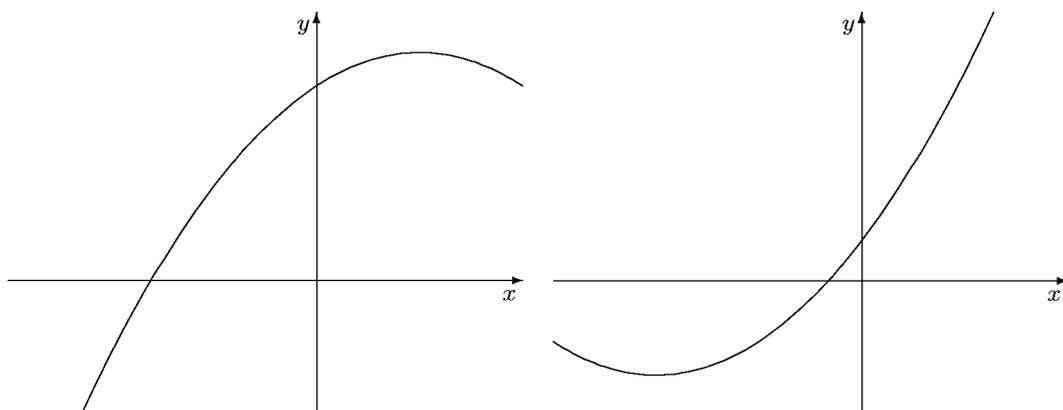
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0.$$

Da diese Überlegungen für jedes  $a \in I$  und für jedes  $b \in I, b \neq a$  gelten, ist damit gemäß Bemerkung (7.8) der Monotoniesatz bewiesen.

## §5 Höhere Ableitungen

Wir haben im vorhergehenden Paragraphen gesehen, dass man das Monotonieverhalten einer differenzierbaren Funktion  $f$  mit Hilfe ihrer Ableitung  $f'$  studieren kann. Und zwar ist das *Monotonieverhalten der Funktion  $f$*  durch die *Vorzeichenverteilung der Ableitungsfunktion  $f'$*  bestimmt. Insbesondere kann man dadurch die *Extremstellen der Funktion  $f$*  als die *Vorzeichenwechselstellen der Ableitungsfunktion  $f'$*  charakterisieren. Wir wollen uns nun mit weiteren Charakteristika des Graphen  $G(f)$  einer Funktion  $f$  beschäftigen:

**a. Krümmung und Wendestellen.** Wir wollen den Begriff der *Krümmung* eines Funktionsgraphen mathematisch präzisieren. Wir veranschaulichen uns dazu einmal verschieden gekrümmte Funktionsgraphen:

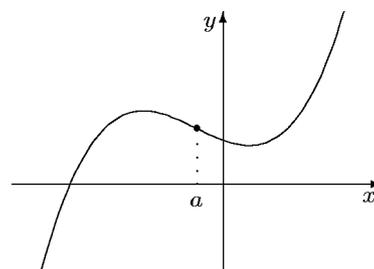


Der erste Graph hat offenbar eine *Rechtskrümmung*, während der zweite *linksgekrümmt* ist. Wenn man nun einmal die Änderung des Anstiegs bei beiden Funktionen vergleicht, so erkennt man: Bei dem rechtsgekrümmten Graphen wird (mit zunehmendem  $x$ -Wert) der Anstieg immer geringer, schließlich sogar negativ! Beim linksgekrümmten zweiten Graphen hingegen wächst der Anstieg (bei zunehmender  $x$ -Koordinate). Dies führt zu der folgenden mathematisch präzisen Definition des Krümmungsbegriffes:

**Definition:** a) Wir nennen eine differenzierbare Funktion  $f$  über einem Teilintervall ihres Definitionsbereiches *rechtsgekrümmt*, wenn ihre Ableitung  $f'$  über diesem Bereich monoton fällt, und *linksgekrümmt*, wenn  $f'$  in diesem Bereich monoton wächst.

Graph von $f$ ist	$\left\{ \begin{array}{l} \text{rechts-} \\ \text{links-} \end{array} \right.$	gekrümmt	$\iff$	$f'$ ist monoton	$\left\{ \begin{array}{l} \text{fallend} \\ \text{steigend} \end{array} \right.$
-------------------	--	----------	--------	------------------	--

b) Unter einer *Wendestelle* einer Funktion  $f$  versteht man solche Stellen  $a$  im Definitionsbereich, an denen die Funktion ihr Krümmungsverhalten ändert, das heißt: In einem kleinen Bereich 'vor'  $a$  ist  $f$  rechts- und kurz 'nach'  $a$  linksgekrümmt, oder umgekehrt.



Wir halten fest: Das *Krümmungsverhalten einer Funktion  $f$*  ist durch das *Monotonieverhalten ihrer Ableitung  $f'$*  bestimmt. Dementsprechend sind *Wendestellen einer Funktion  $f$*  solche Stellen  $a$ , an denen die Ableitung  $f'$  ihr Monotonieverhalten ändert, also *Extremstellen der Ableitung  $f'$* .

$\text{Wendestellen von } f = \text{Extremstellen von } f'.$
--

Ist nun die Funktion  $f'$  selbst auch differenzierbar, so sind gemäß §4b. die Extremstellen von  $f'$  gerade die Vorzeichenwechselstellen der nächsten Ableitung  $(f')'$ .

Die Funktion  $f'' = (f')'$  ist die *zweite* Ableitung von  $f$ . Entsprechend definiert man die *höheren Ableitungsfunktionen*  $f^{(3)} = f''' = (f'')'$ ,  $f^{(4)} = (f^{(3)})'$  usw.

Formulieren wir die obigen Überlegungen mit Hilfe dieser höheren Ableitungen, so erhalten wir:

**Satz:** a) Eine zweimal differenzierbare Funktion  $f$  kann nur (muss aber nicht!) an solchen Stellen  $a$  eine Wendestelle haben, an denen die zweite Ableitung  $f''$  eine Nullstelle hat:  $f''(a) = 0$ :

$$a \text{ Wendestelle von } f \implies f''(a) = 0.$$

b) Wechselt die zweite Ableitung  $f''$  bei  $a$  ihr Vorzeichen, so besitzt die Ausgangsfunktion  $f$  bei  $a$  eine Wendestelle:

$$a \text{ Nullstelle von } f'' \text{ mit Vorzeichenwechsel} \implies a \text{ Wendestelle von } f.$$

c) Ist  $a$  zwar eine Nullstelle von  $f''$ , aber die Werte von  $f''$  in der Nähe einheitlich  $\geq 0$  oder einheitlich  $\leq 0$  (liegt also kein Vorzeichenwechsel von  $f''$  vor), so hat  $f$  bei  $a$  auch keine Wendestelle.

Für zweimal differenzierbare Funktionen  $f$ , deren zweite Ableitung nur isolierte Nullstellen hat, kann man kurz sagen:

$$a \text{ Wendestelle von } f \iff a \text{ Extremstelle von } f' \iff a \text{ Nullstelle von } f'' \text{ mit VZW.}$$

Die Funktion  $f$  hat genau dort ihre Wendestellen, wo die Ableitung  $f'$  Extremstellen hat, bzw. wo die zweite Ableitung  $f''$  eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat.

**b. Vorzeichenwechsel und Ableitungen.** Ob eine rationale Funktion  $f$  an einer Nullstelle  $a$  einen Vorzeichenwechsel hat, kann man an der Nullstellenordnung  $k$  (siehe Kap. I, S. 8) der Funktion  $f$  an der Stelle  $a$  erkennen. Diese Nullstellenordnung kann man leicht ablesen, wenn man *alle* Nullstellen von  $f$  bestimmt und den Funktionsterm in Linearfaktoren zerlegt hat. Kennt man jedoch nur diese eine Nullstelle  $a$ , so muss man gemäß der Definition den Funktionsterm  $f(x)$  von  $f$  so oft wie möglich durch den Linearfaktor  $x - a$  dividieren (mittels Polynomdivision) und so die Nullstellenordnung ermitteln. Wir wollen nun noch eine andere Methode kennenlernen, bei der man mit Hilfe der Ableitung Vorzeichenwechsel nachweisen kann. Diese Methode erfasst aber *nur einfache Nullstellen!* Sie benutzt die folgenden Tatsachen:

**Bemerkung:** Es sei  $f$  differenzierbar bei  $a$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(a) = 0 \wedge f'(a) \neq 0 &\implies f \text{ wechselt bei } a \text{ sein Vorzeichen,} \\ f(a) = 0 \wedge f'(a) > 0 &\implies f \text{ wechselt bei } a \text{ sein Vorzeichen von } - \text{ zu } +, \\ f(a) = 0 \wedge f'(a) < 0 &\implies f \text{ wechselt bei } a \text{ sein Vorzeichen von } + \text{ zu } -. \end{aligned}$$

**Achtung:** Ist  $f'(a) = 0$ , so kann man nichts über einen evtl. Vorzeichenwechsel von  $f$  an der Stelle  $a$  sagen. Die Bedingung  $f'(a) \neq 0$  ist nur eine *hinreichende* Bedingung für das Vorliegen eines Vorzeichenwechsels, sie ist nicht *notwendig*. Sie besagt gerade, dass die Nullstelle  $a$  von  $f$  von *erster* Ordnung ist (siehe d.). Vorzeichenwechsel an Nullstellen 3., 5. ... Ordnung werden also durch obige Bemerkung *nicht erfasst*.

[Wir werden in Abschnitt d. sehen, dass man jedoch mittels höherer Ableitungen auch die genaue Nullstellenordnung von  $f$  bei  $a$  bestimmen kann.]

Als Begründung für die obige Bemerkung erinnern wir uns an den Beweis des notwendigen Extremstellenkriteriums (s. S. 30): Ist  $f'(a) > 0$ , so steigt  $f$  an der Stelle  $a$ , d. h. 'kurz vor'  $a$  sind die Werte  $f(x)$  kleiner als  $f(a) = 0$  und 'kurz hinter'  $a$  gilt  $f(x) > f(a) = 0$ . Im Falle  $f'(a) < 0$  argumentiert man genauso.

**c. Hinreichende Kriterien für Extrem-/ Wendestellen mittels höherer Ableitungen.** Extremstellen sind ‘Vorzeichenwechselstellen’ der ersten Ableitung  $f'$ , während Wendestellen ‘Vorzeichenwechselstellen’ der zweiten Ableitung  $f''$  sind. Aufgrund obiger Bemerkung wissen wir, dass für eine Funktion bei  $a$  ein Vorzeichenwechsel sicherlich dann vorliegt, wenn die Funktion bei  $a$  den Wert 0 hat, ihre Ableitung aber nicht! Für die Anwendungen muss man nun aber genau im Auge behalten, für welche Funktion man einen Vorzeichenwechsel feststellen will; für  $f$  oder  $f'$  oder  $f''$ !

Beachtet man dies und kombiniert man nun die obige Bemerkung mit den Kriterien für Extrema (s. S. 33) bzw. für Wendestellen (s. S. 37), so erhält man die folgenden, notwendigen bzw. hinreichenden Kriterien für Extrem- und Wendestellen:

**Satz:** a) Es sei  $f$  2-mal differenzierbar und  $a \in \mathbb{D}_f$ . Dann gilt:

$a \text{ Extremstelle von } f \implies f'(a) = 0,$ $f'(a) = 0 \wedge f''(a) > 0 \implies a \text{ Minimalstelle von } f,$ $f'(a) = 0 \wedge f''(a) < 0 \implies a \text{ Maximalstelle von } f.$
---

b) Es sei  $f$  3-mal differenzierbar und  $a \in \mathbb{D}_f$ . Dann gilt:

$a \text{ Wendestelle von } f \implies f''(a) = 0,$ $f''(a) = 0 \wedge f'''(a) \neq 0 \implies a \text{ Wendestelle von } f,$
---

Diese Kriterien sind im Schulbereich sehr beliebt, haben aber im Vergleich mit unserem Vorzeichenwechselkriterium wesentliche Nachteile:

1. Im Falle  $f'(a) = f''(a) = 0$  erhält man *keine* Entscheidung über eine Extremstelle.
2. Ebenso erhält man im Falle  $f''(a) = f'''(a) = 0$  *keine* Entscheidung für Wendestellen.
3. Die Berechnung der dritten Ableitung  $f'''$  ist zwar für ganzrationale Funktionen problemlos, für gebrochen-rationale Funktionen dagegen kann die Berechnung einer dritten Ableitung bereits erhebliche Probleme bereiten. Dagegen erfordert die Bestimmung der Nullstellenordnung von  $f''$  bei  $a$  einen wesentlich geringeren Aufwand. (Man braucht nur die Funktion im Zähler zu untersuchen, und diese ist *ganzrational*! Siehe dazu die Beispiele für Kurvendiskussionen rationaler Funktionen.)

**Fazit:** In aller Regel ist die Untersuchung eines eventuellen Vorzeichenwechsels (bei  $f'$  bzw.  $f''$ ) vorteilhafter als die unreflektierte Anwendung der obigen Kriterien.

**d. Kettenregel.** Eine weitere wichtige Regel betrifft die Ableitung von Funktionen, die durch sog. *Verkettung* entstehen: Man führt zwei Funktionen  $u$  und  $f$  nacheinander aus:

$$x \mapsto u(x) \mapsto f(u(x)).$$

Für den Funktionsterm bedeutet dies, dass in den Term  $f(x)$  der Term  $u(x)$  eingesetzt wird.

**Satz:** (Kettenregel)  $u$  sei differenzierbar bei  $a$  und  $f$  sei differenzierbar bei  $u(a)$ . Dann ist die Verkettung  $g(x) = f(u(x))$  bei  $a$  differenzierbar und es gilt

$$g'(a) = f'(u(a)) \cdot u'(a).$$

Merkregel: Ableitung der Einsetzung einer (‘inneren’) Funktion  $u$  in eine (‘äußere’) Funktion  $f$ : ‘Äußere Funktion ableiten und innere einsetzen, mal innerer Ableitung’; noch prägnanter, aber auch unpräziser: ‘Äußere Ableitung mal innerer Ableitung’.

*Beweisidee:* Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass  $u(x) \neq u(a)$  ist für  $x$  nahe genug bei  $a$ . (Dies gilt für die schon früher betrachteten differenzierbaren Funktionen mit isolierten Nullstellen der Ableitung.) Wir erhalten unter dieser Annahme

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{f(u(x)) - f(u(a))}{x - a} = \frac{f(u(x)) - f(u(a))}{u(x) - u(a)} \cdot \frac{u(x) - u(a)}{x - a}.$$

Für  $x \rightarrow a$  konvergiert der zweite Faktor gegen  $u'(a)$ , während im ersten Faktor ein Ausdruck der Form  $\frac{f(z)-f(b)}{z-b}$  steht mit  $z = u(x)$  und  $b = u(a)$ . Wegen der Stetigkeit von  $u$  an der Stelle  $a$  folgt aus  $x \rightarrow a$  sofort  $z = u(x) \rightarrow u(a) = b$ . Für  $z \rightarrow b$  konvergiert dann aber der Differenzenquotient  $\frac{f(z)-f(b)}{z-b}$  gegen die Ableitung  $f'(b) = f'(u(a))$ . Also:

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(u(a)) \cdot u'(a).$$

**Folgerung:** (Nullstellenordnung und Ableitung)

- a) Es sei  $k \in \mathbb{Z}$  eine ganze Zahl,  $k \neq 0$  und  $f(x) = (x - a)^k g(x)$  mit einer differenzierbaren Funktion  $g$ . Dann ist  $f$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = (x - a)^{k-1} (kg(x) + g'(x)(x - a))$ .
- b) Hat eine rationale Funktion  $f$  bei  $a$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $k \geq 2$ , so hat  $f'$  bei  $a$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $k - 1$ .
- c) Hat  $f$  bei  $a$  eine einfache Nullstelle, so gilt  $f'(a) \neq 0$ .
- d) Hat eine rationale Funktion  $f$  bei  $a$  eine Polstelle der Vielfachheit  $k \geq 1$ , so hat  $f'$  bei  $a$  eine Polstelle der Vielfachheit  $k + 1$ .

Man kann dies etwa so zusammenfassen:

Beim Ableiten steigen die Polordnungen um 1,  
die Nullstellenordnungen  $\geq 1$  sinken um 1.  
Nullstellenordnung = 0 bedeutet, es liegt keine Nullstelle vor!

Zum *Beweis* von a) folgern wir zunächst aus der Ketten- und allgemeinen Potenzregel, dass  $(x - a)^m$  als Ableitung die Funktion  $m(x - a)^{m-1}$  hat (die Ableitung der inneren Funktion  $x - a$  ist 1!). Mit der Produktregel folgt dann

$$f'(x) = m(x - a)^{m-1} \cdot g(x) + (x - a)^m \cdot g'(x) = (x - a)^{m-1} (mg(x) + (x - a)g'(x)).$$

Für den Beweis von b)/c) wiederhole man zunächst die Definition der Vielfachheit einer Nullstelle (s. S. 8): Ist  $a$  eine Nullstelle von  $f$  von der Ordnung  $k$ , so gilt gemäß dieser Definition  $f(x) = (x - a)^k g(x)$  und es muss gelten  $g(a) \neq 0$  (denn andernfalls könnte man noch weitere Faktoren  $(x - a)$  aus  $g(x)$  abspalten.) Dann folgt nach a)  $f'(x) = (x - a)^{k-1} \cdot h(x)$ , wobei wir abkürzend  $h(x) = kg(x) + (x - a)g'(x)$  schreiben. Wegen  $h(a) = kg(a) + 0 \cdot g'(a) = kg(a) \neq 0$  hat dann für  $k - 1 \geq 1$  die Funktion  $f'(x) = (x - a)^{k-1} h(x)$  bei  $a$  eine Nullstelle der genauen Ordnung  $k - 1$ , während bei  $k - 1 = 0$  folgt  $f'(a) = h(a) \neq 0$ .

d) Hat die rationale Funktion  $f$  bei  $a$  eine Polstelle der Ordnung  $k$ , so gilt (nach evtl. Kürzen)  $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$  mit  $Z, N$  ganzrational und  $a$  ist  $k$ -fache Nullstelle von  $N$ , aber *keine* Nullstelle von  $Z$ . Also  $Z(a) \neq 0$  und  $N(x) = (x - a)^k N_1(x)$  mit  $N_1(a) \neq 0$  (siehe Argumentation am Anfang von b/c)). Also

$$f(x) = \frac{Z(x)}{(x - a)^k N_1(x)} = \frac{Z(x)/N_1(x)}{(x - a)^k} =: \frac{g(x)}{(x - a)^k},$$

wobei die rationale Funktion  $g(x) = \frac{Z(x)}{N_1(x)}$  bei  $a$  definiert ist (wegen  $N_1(a) \neq 0$ ) und dort einen Wert  $g(a) \neq 0$  hat (wegen  $Z(a) \neq 0$ ). Also gilt  $f(x) = \frac{g(x)}{(x - a)^k} = (x - a)^{-k} g(x)$  und folglich (siehe a))

$$f'(x) = (x - a)^{-k-1} ((-k)g(x) + (x - a)g'(x)) =: \frac{h(x)}{(x - a)^{k+1}}$$

mit  $h(a) = -kg(a) + 0 = -kg(a) \neq 0$ . Also hat  $f'$  bei  $a$  ebenfalls einen Pol, jetzt jedoch mit der Ordnung  $k + 1$ .

Als Konsequenz dieser Überlegungen erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen Nullstellenordnung und höheren Ableitungen:

**Satz:** Die Vielfachheit einer Nullstelle  $a$  einer ganzrationalen Funktion  $f$  ist die kleinste Zahl  $k \in \mathbb{N}$  mit  $f^{(k)}(a) \neq 0$  (zur Erinnerung:  $f^{(k)}$  ist die  $k$ -te Ableitung von  $f$ ):

$$\boxed{\begin{array}{l} a \text{ Nullstelle von } f \text{ mit der Vielfachheit } k \\ \iff 0 = f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) \quad \text{und} \quad f^{(k)}(a) \neq 0. \quad (*) \end{array}}$$

Die so gefundene Beschreibung (\*) der Nullstellenordnung kann man nun auf beliebige (nicht nur ganzrationale) Funktionen übertragen und legt für diese die obige Beschreibung als *Definition* zugrunde (siehe nachfolgende Abschnitte).

*Beweis* des Satzes: Zunächst folgt aus der Folgerung, b): Ist  $f(a) = 0$  und  $f'(a) \neq 0$ , so kann  $f$  bei  $a$  keine Nullstelle einer Ordnung  $\geq 2$  haben, also muss die Nullstelle einfach sein. Mit Teil c) der obigen Folgerung ergibt sich, dass  $f$  bei  $a$  genau dann eine einfache Nullstelle hat, wenn  $f(a) = 0$  und  $f'(a) \neq 0$  ist.

$$\boxed{a \text{ einfache Nullstelle von } f \iff f(a) = 0 \wedge f'(a) \neq 0.}$$

Damit ist der Satz für  $k = 1$  bewiesen.

Hat nun  $f$  bei  $a$  eine Nullstelle der Ordnung  $k \geq 2$ , so hat  $f'$  nach der Folgerung b) bei  $a$  eine Nullstelle der Ordnung  $k - 1$ ,  $f''$  dann eine Nullstelle der Ordnung  $k - 2$ , usw. bis:  $f^{(k-1)}$  hat bei  $a$  eine einfache Nullstelle, also  $f^{(k)}(a) \neq 0$ . Damit ist (\*) gezeigt.

**Warnung!** Teil b) der Folgerung ist nicht umkehrbar: Hat  $f'$  bei  $a$  eine Nullstelle der Ordnung  $k$ , so folgt *nicht*, dass  $f$  bei  $a$  eine Nullstelle der Ordnung  $k + 1$  hat. Vielmehr braucht  $f$  dort überhaupt keine Nullstelle zu haben!  $f(x) = 3x^4$  und  $g(x) = 3x^4 + 1$  bestimmen zwei verschiedene Funktionen mit derselben Ableitung  $f'(x) = g'(x) = 12x^3$ . Diese Ableitung hat bei 0 eine dreifache Nullstelle. Während zwar  $f$  bei 0 eine vierfache Nullstelle besitzt, hat  $g$  überhaupt keine Nullstelle, da alle Werte von  $g$  positiv sind. Hat  $f'$  bei  $a$  eine  $k$ -fache Nullstelle, so hat  $f$  bei  $a$  eine  $(k + 1)$ -fache Nullstelle, *nur wenn  $a$  auch wirklich Nullstelle von  $f$  ist!*

**Hinweis:** Die obige Charakterisierung einfacher Nullstellen zeigt, dass die *hinreichenden* Kriterien für Extrem- und Wendestellen mittels  $f''$  bzw.  $f'''$  (siehe S. 38) jeweils nur die *einfachen* Nullstellen von  $f'$  bzw.  $f''$  erfassen. Bei Nullstellen höherer Ordnung von  $f'$  bzw.  $f''$  liefern diese Kriterien keine Entscheidung über Extrem- bzw. Wendestellen! Dies zeigt die Grenzen dieser hinreichenden Kriterien auf und ist ein weiteres Argument dafür, die Vorzeichenwechsel von  $f'$  bzw.  $f''$  direkt zu untersuchen.

#### IV. Transzendente Funktionen

Bisher haben wir die folgenden Funktionenklassen studiert: die *ganzrationalen* Funktionen, dann die *rationalen* (definiert als Quotienten ganz-rationaler) und schließlich noch Funktionen, die aus Wurzelfunktionen zusammengesetzt waren (sie bezeichnet man auch als *algebraische* Funktionen). Wir wollen nun wichtige Vertreter der Klasse der transzendenten (= nicht algebraischen) Funktionen kennenlernen: die Exponentialfunktionen, insbesondere die Euler'sche Funktion, sodann damit verbunden die Logarithmusfunktionen und schließlich die ebenso wichtige Gruppe der trigonometrischen Funktionen (Sinus, Kosinus, Tangens und deren Umkehrfunktion Arkustangens, etc.). Ihnen allen ist gemein, dass man sie nicht durch algebraische Rechenoperationen definieren kann; zu ihrer Definition gehört untrennbar der Grenzwertbegriff.

## §6 Exponential- und Logarithmusfunktionen

**a. Wiederholung: Die Exponentialfunktionen.** Es sei im Folgenden  $b$  eine *positive* reelle Zahl. Dann haben Sie im 2. Semester Potenzen  $b^x$  von  $b$  für *beliebige reelle Exponenten*  $x$  definiert. Diese Definition erfolgte schrittweise:

1.  $x = n \in \mathbb{N}$ : Dann definierte man die Potenz  $b^n$  als das Produkt aus  $n$  gleichen Faktoren

$$b^n = \underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_{n\text{-mal}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Auf der Grundlage dieser Definition erkennt man unmittelbar die folgenden fundamentalen Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} \text{(P1): } & b^{n+m} = b^n \cdot b^m, \\ \text{(P2): } & (b^n)^m = b^{nm}, \\ \text{(P3): } & n < m \iff b^n < b^m \quad (\text{für } b > 1). \end{aligned}$$

2.  $x = n \in \mathbb{Z}$ : Man erweiterte die obige Definition durch die folgenden Festsetzungen:

$$b^0 = 1 \quad \text{und} \quad b^{-n} = \frac{1}{b^n} \quad \text{für } b \neq 0 \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Diese Definitionen waren nicht willkürlich, sondern *zwangsläufig*, wenn die Eigenschaft (P1) auch für nicht-positive Exponenten gültig bleiben sollte. Denn gemäß (P1) muss gelten

$$n = 0 \implies b^0 \cdot b^m = b^{0+m} = b^m \implies b^0 = 1 \quad (\text{Division durch } b^m \neq 0)$$

und

$$m = -n \implies b^n \cdot b^{-n} = b^{n+(-n)} = b^0 = 1, \text{ also } b^{-n} = \frac{1}{b^n}.$$

Man kann dann zeigen, dass mit dieser erweiterten Definition die Eigenschaften (P1) – (P3) gültig bleiben (für alle  $n, m \in \mathbb{Z}$ ).

3.  $x = r = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ : Für beliebige rationale Exponenten  $r = n/m$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  erweiterte man die Definition zu

$$b^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{b^n} \quad \text{für } b > 0 \text{ und } n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}.$$

Auch diese Definition war *zwangsläufig*, wenn die Eigenschaft (P2) gültig bleiben sollte, denn gemäß (P2) muss gelten

$$\left(b^{\frac{n}{m}}\right)^m = b^{\frac{n}{m} \cdot m} = b^n, \text{ also } b^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{b^n} \quad (\text{wegen } b > 0).$$

Da  $b$  als positiv vorausgesetzt war, existiert die  $m$ -te Wurzel stets. Man kann dann wieder zeigen, dass mit dieser erweiterten Definition die Eigenschaften (P1) – (P3) für beliebige Exponenten in  $\mathbb{Q}$  gültig bleiben.

4.  $x \in \mathbb{R}$ : Eine reelle Zahl  $x$  ist gegeben durch eine Intervallschachtelung<sup>1)</sup> von rationalen Zahlen  $r_i, s_i$ :

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4 \leq \dots \leq x \leq \dots \leq s_4 \leq s_3 \leq s_2 \leq s_1.$$

<sup>1)</sup> Siehe dazu das Einführungsskript, S. 44f.

Wegen der Eigenschaft (P3) bilden dann die Potenzen von  $b$  (wir setzen im Moment  $b > 1$  voraus)

$$b^{r_1} \leq b^{r_2} \leq b^{r_3} \leq b^{r_4} \leq \dots \leq b^x \leq \dots \leq b^{s_4} \leq b^{s_3} \leq b^{s_2} \leq b^{s_1}$$

eine Einschachtelung von  $b^x$ . Wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen, *existiert* eine solche Zahl. Man kann (und muss) nun zeigen, dass es *nur eine* Zahl in dieser Intervallschachtelung gibt, und definiert dann dadurch  $b^x$ . Außerdem zeigt man, dass wieder die drei fundamentalen Eigenschaften (P1) – (P3) gültig bleiben, jetzt für beliebige reelle Exponenten.

Den Fall  $b < 1$  führt man mittels  $b^x = (\frac{1}{b})^{-x}$  auf die Basis  $\frac{1}{b} > 1$  zurück.

Unter Verwendung des uns jetzt zur Verfügung stehenden Grenzwertbegriffes kann man den vierten Schritt der Definition von  $b^x$  auch so beschreiben: Jede reelle Zahl  $x$  ist Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen  $r_n$  (etwa der endlichen Abschnitte  $r_n$  der Dezimalzahldarstellung von  $x$ ). Dann ist  $b^x$  der Grenzwert der Folge der Potenzen  $b^{r_n}$ :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \implies b^x = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{r_n}.$$

Man sagt auch: Die auf  $\mathbb{Q}$  bereits definierte Funktion  $f(x) = b^x$  wird *stetig* auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt.

Auf diese Weise ist nun für jede positive Basis  $b > 0$  eine Funktion  $f$  definiert durch  $f(x) = b^x$ . Man nennt diese Funktion die *Exponentialfunktion zur Basis  $b$* . (Im Kontrast zu den Potenzfunktionen ist hier die Basis fest und der Exponent variabel.)

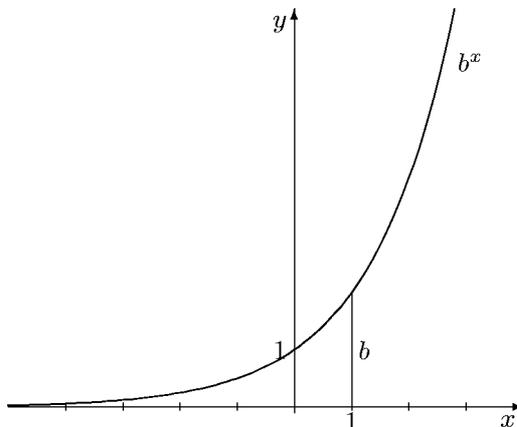
Bei den nun folgenden Untersuchungen der Exponentialfunktionen wird man nicht ständig die obige mehrstufige Definition benötigen, vielmehr benutzt man nur die folgenden Tatsachen (aus denen sich aber, wie wir bereits gesehen haben, die frühere Definition zwangsläufig ergibt):

**Satz:** Die Exponentialfunktion zur Basis  $b > 0$  ist definiert durch  $f(x) = b^x$  und hat die folgenden Eigenschaften:

- a)  $b^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , d. h. Exponentialfunktionen nehmen nur positive Werte an, haben insbesondere keine Nullstellen,
- b)  $b^0 = 1$ ,  $b^1 = b$ ,
- c)  $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ ,
- d)  $(b^x)^y = b^{xy}$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ ,
- e) für  $b > 1$  gilt:  $x < y \iff b^x < b^y$ ,  
d. h. für  $b > 1$  sind Exponentialfunktionen streng monoton wachsend,
- f) für  $b > 1$  gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = 0.$$

- g) Der Graph:



Die Eigenschaften a), b), c), d) und e) ergeben sich aus der Definition sowie der Gültigkeit der Potenzgesetze (P1) – (P3). Für f) brauchen wir nur die erste Behauptung zu überprüfen, denn

wenn  $b^x \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$  gilt, so folgt daraus  $\frac{1}{b^x} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ , also

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = \lim_{x \rightarrow \infty} b^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b^x} = 0.$$

Für die erste Behauptung in f) muss man wegen der Monotonie lediglich bemerken, dass bei  $b > 1$  die Folge der Potenzen ( $b^n$ ) unbeschränkt ist.

**Übung:** Formulieren Sie für  $b < 1$  die zu e) und f) analogen Aussagen und skizzieren Sie den Graphen. [Tipp:  $0 < b < 1 \implies a = \frac{1}{b} > 1$  und  $b^x = (\frac{1}{a})^x = a^{-x}$ .]

**Anmerkung:** Außer den beiden grundlegenden Potenzgesetzen c) und d) sind alle anderen oben formulierten Aussagen über die Exponentialfunktionen aus dem typischen Verlauf ihrer Graphen ablesbar. Prägen Sie sich also den unter g) skizzierten Verlauf gründlich ein!

**b. Wiederholung: Logarithmusfunktionen.** Wir betrachten im Folgenden der Einfachheit halber nur Basen  $b > 1$  (alle Resultate gelten in analoger Form auch für  $b < 1$ , nicht aber für  $b = 1$ ). Nach Teil e) des Satzes wissen wir, dass die Exponentialfunktion streng monoton wächst. Außerdem wissen wir aufgrund der Grenzwertaussagen f), dass  $b^x$  sowohl beliebig große positive Werte annimmt als auch positive Werte, die beliebig nahe bei 0 liegen (siehe Graph g)). Es ist also *jede positive Zahl  $y$*  als Potenz  $b^x$  von  $b$  darstellbar:  $y = b^x$ . Und wegen der strengen Monotonie ist dabei der Exponent  $x$  eindeutig bestimmt; dieser ist der sogenannte *Logarithmus von  $y$  zur Basis  $b$* :

Der Logarithmus  $\log_b(y)$  zur Basis  $b$  von  $y$  ist der (eindeutig) bestimmte Exponent  $x \in \mathbb{R}$  mit  $b^x = y$ :

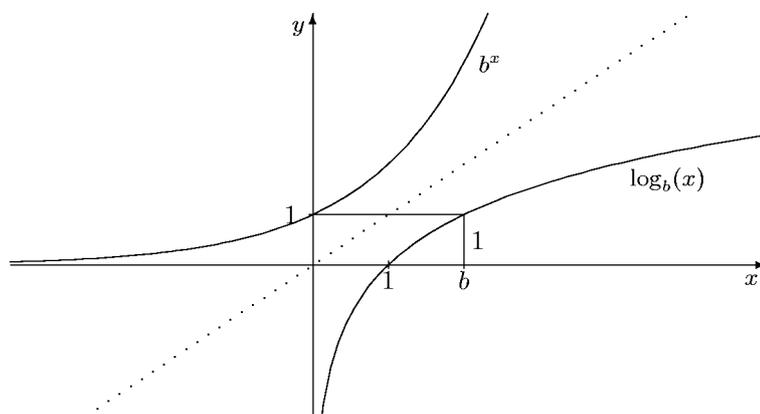
$$x = \log_b(y) \iff y = b^x.$$

Ist also  $y = b^x$ , so ist *umgekehrt*  $x = \log_b(y)$ ; die Logarithmusfunktion  $\log_b$  ist die *Umkehrfunktion* zur Exponentialfunktion  $f(x) = b^x$ .

Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktionen entnimmt man daher unmittelbar entsprechende Eigenschaften für die Logarithmusfunktionen:

**Satz:** Die Logarithmusfunktion  $\log_b$  zur Basis  $b > 1$  hat die folgenden Eigenschaften:

- a)  $\log_b$  hat den Definitionsbereich  $]0, \infty[$ .
- b)  $\log_b(1) = 0$ ,  $\log_b(b) = 1$ ,
- c)  $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$  für  $x, y > 0$ ,
- d)  $\log_b(x^r) = r \cdot \log_b(x)$  für  $x > 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,
- e) für  $x, y > 0$  gilt:  $x < y \iff \log_b(x) < \log_b(y)$ ,
- d. h.  $\log_b$  ist streng monoton wachsend,
- f)  $\lim_{x \searrow 0} \log_b(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_b(x) = \infty$ .
- g) Der Graph:



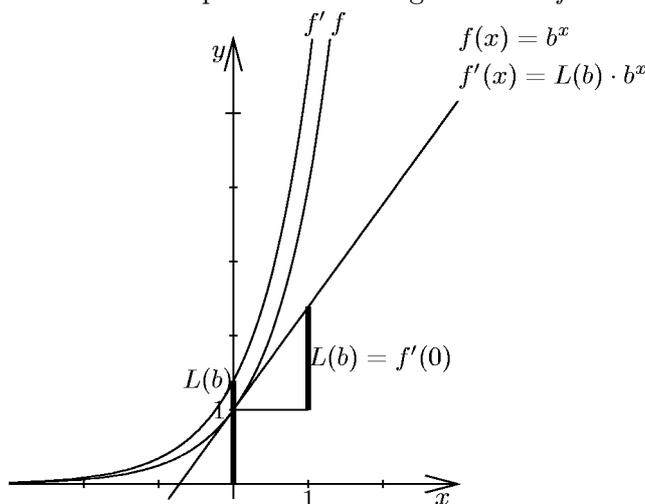
**c. Differenzierbarkeit der Exponentialfunktionen.** In diesem Abschnitt wollen wir die analytischen Eigenschaften der Exponential- und Logarithmusfunktionen (wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit) untersuchen.

**Satz:** Die Exponentialfunktionen  $f(x) = b^x$  ( $b > 0$ ) sind differenzierbar und ihre Ableitungsfunktion  $f'$  ist ein konstantes Vielfaches der Funktion selbst:

$$f'(x) = L(b) \cdot f(x).$$

Die Ableitung einer Exponentialfunktion ist proportional zur Ausgangsfunktion:  $f' \sim f$ . Der Proportionalitätsfaktor  $L(b)$  ist gleich  $f'(0)$ , der Ableitung von  $f$  an der Stelle 0.

Geometrisch bedeutet dies: Der Graph der Ableitungsfunktion  $f'$  entsteht aus dem Graphen



von  $f$  durch Streckung in  $y$ -Richtung mit dem Streckungsfaktor  $L(b) = f'(0)$ . Die beiden mit dickerer Strichstärke skizzierten Strecken haben die gleiche Länge: Das Steigungsdreieck der Tangente von  $f$  an der Stelle 0 hat eine Kathete der Länge 1 und die andere Kathete gibt den Tangentenanstieg  $f'(0) = L(b)$  an. Dies ist zugleich der Wert von  $f'$  an der Stelle 0, der  $y$ -Achsenabschnitt von  $f'$ . (Im skizzierten Beispiel ist  $b = 4$  und  $L(b) > 1$ ; es kann aber auch  $L(b) < 1$  gelten, dann liegt eine Stauchung vor.)

Beweisidee: Da keine unserer bisherigen Ableitungsregeln für Exponentialfunktionen anwendbar sind, müssen wir auf die Definition zurückgehen. Es sei  $f(x) = b^x$  und  $a$  eine beliebige Stelle, an der wir die Ableitung von  $f$  bestimmen wollen:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{b^x - b^a}{x - a}.$$

Um die nachfolgende Umformung besser erkennen zu können, wechseln wir die Bezeichnung ein wenig. Wir setzen  $h = x - a$ . Dann ist  $x = a + h$  und es gilt  $x \rightarrow a \iff h = x - a \rightarrow 0$ . Damit erhalten wir die folgende Beschreibung von  $f'$ :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^{a+h} - b^a}{h}.$$

Wir benutzen nun die fundamentale Potenzrechenregel  $b^{a+h} = b^a \cdot b^h$  und erhalten durch Ausklammern

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^a \cdot (b^h - 1)}{h}.$$

Hier ist nun wichtig, dass der Faktor  $b^a$  *nicht* von  $h$  abhängt, so dass wir den konstanten Faktor  $b^a$  aus dem Grenzprozess ausklammern können:

$$f'(a) = b^a \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}}_{=:L(b)}.$$

(Den Beweis der Existenz des Grenzwertes  $L(b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$  müssen wir hier schuldig bleiben.) Wir haben damit aber immerhin gezeigt: Wenn dieser Grenzwert existiert, dann ist die Exponentialfunktion  $f(x) = b^x$  an *jeder* Stelle  $a$  differenzierbar und es gilt:  $f'(a) = L(b) \cdot b^a = L(b) \cdot f(a)$  bzw.  $f'(x) = L(b) \cdot f(x)$  für alle  $x$ .

Die Ableitung  $f'$  der Exponentialfunktion  $f(x) = b^x$  ist ein konstantes Vielfaches der Funktion  $f$  selbst:  $f'(x) = L(b) \cdot f(x)$  für alle  $x$ ; oder anders formuliert:

$f'$  ist proportional zu  $f$ .

Spezialisiert man die Gleichung  $f'(x) = L(b) \cdot f(x)$  für  $x = 0$ , so erhält man wegen  $f(0) = b^0 = 1$  die Beziehung  $f'(0) = L(b) \cdot f(0) = L(b)$ ;  $L(b)$  ist der Anstieg der Exponentialfunktion  $f(x) = b^x$  an der Stelle 0.

**d. Die Eulersche Zahl  $e$  und der natürliche Logarithmus.** Von besonderem Interesse ist nun die Exponentialfunktion, für die der Proportionalitätsfaktor gleich 1 ist, die also mit ihrer Ableitung identisch ist:

**Satz/Definition:** Es gibt genau eine reelle Zahl  $e$  mit der Eigenschaft: Die Exponentialfunktion zur Basis  $e$  stimmt mit ihrer eigenen Ableitung überein:

$$f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x.$$

Diese Zahl  $e$  heißt *Eulersche Zahl*.

Beweis: Die gesuchte Zahl  $e$  muss also die Eigenschaft  $L(e) = 1$  haben. Wir machen den folgenden Ansatz  $e = 2^{\frac{1}{L(2)}}$ . Dadurch ist eine reelle Zahl wohldefiniert, denn  $L(2)$  kann nicht 0 sein, da sonst  $f(x) = 2^x$  also Ableitung  $f'(x) = L(2) \cdot 2^x = 0$  hätte und  $2^x$  konstant wäre. Mit Hilfe der obigen Ableitungsregel für Exponentialfunktionen und der Kettenregel folgt

$$e^x = \left(2^{\frac{1}{L(2)}}\right)^x = 2^{\frac{x}{L(2)}} \implies (e^x)' = \left(2^{\frac{x}{L(2)}}\right)' = L(2) \cdot 2^{\frac{x}{L(2)}} \cdot \frac{1}{L(2)} = 2^{\frac{x}{L(2)}} = e^x.$$

Damit ist die Existenz von  $e$  gesichert.

Aufgrund der Sonderstellung der  $e$ -Funktion verdient auch die zugehörige Logarithmusfunktion einen eigenen Namen:

**Definition:** Die Logarithmusfunktion  $\log_e$  zur Basis  $e$  wird *natürliche* Logarithmusfunktion genannt und mit  $\ln$  bezeichnet:

$$\ln(x) = \log_e(x) = y \iff e^y = x.$$

Nachdem die Existenz der Eulerschen Zahl gesichert ist, kann man im Nachhinein die Ableitungsregel für beliebige Exponentialfunktionen daraus herleiten und dabei zugleich die Bedeutung von  $L(b)$  klären. Die dabei verwendete Methode ist ganz allgemein anwendbar bei Funktionen, deren Funktionsterm die Funktionsvariable  $x$  im Exponenten enthalten.

**Satz:** Alle Exponentialfunktionen  $f(x) = b^x$  sind differenzierbar und es gilt

$$f(x) = b^x \implies f'(x) = b^x \cdot \ln(b).$$

Beweis: Wir stellen die Exponentialfunktion als Potenz von  $e$  dar:

$$b = e^{\ln(b)} \implies f(x) = b^x = e^{x \ln(b)}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel kann man nun die Ableitung von  $f$  bestimmen:

$$f'(x) = (e^{x \ln(b)})' = e^{x \ln(b)} \cdot \ln(b) = b^x \cdot \ln(b).$$

Wir wollen nun aus der Ableitungsregel für die  $e$ -Funktion die Ableitungsregel für den natürlichen Logarithmus herleiten:

**Satz:** Der natürliche Logarithmus  $\ln$  ist differenzierbar und es gilt

$$\ln' x = \frac{1}{x} \text{ für alle } x \in ]0, \infty[.$$

Beweis: Wir wollen die Differenzierbarkeit von  $\ln$  hier nicht nachweisen, sondern voraussetzen, und daraus dann die Ableitungsregel folgern.

Gemäß der Definition des natürlichen Logarithmus  $\ln(x)$  als Umkehrung der  $e$ -Funktion gilt  $f(x) = e^{\ln(x)} = x$  für alle  $x > 0$ . Wir leiten nun diese Funktion ab, und zwar die linke Seite mit der Kettenregel, während die Ableitung von  $x$  natürlich 1 ergibt. Also gilt

$$1 = f'(x) = e^{\ln(x)} \cdot \ln'(x) = x \cdot \ln'(x).$$

Löst man nun diese Gleichung nach  $\ln'(x)$  auf, so erhält man wie behauptet

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \text{ für alle } x > 0.$$

**e. Die Differentialgleichung der  $e$ -Funktion.** Die Definitionsforderung der Eulerschen Zahl  $e$ , dass die  $e$ -Funktion  $e^x$  ihre eigene Ableitung ist, ist durchaus bemerkenswert, erklärt aber nicht die fundamentale Bedeutung der  $e$ -Funktion. Diese beruht auf dem folgenden Satz über die Lösungen einer fundamentalen *Differentialgleichung*. Bei Differentialgleichungen werden nicht Zahlen, sondern differenzierbare *Funktionen* gesucht. In einer Differentialgleichung ist eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung gegeben und das Problem ist, die Funktionen zu finden, die diese Beziehung erfüllen. Viele physikalische, und allgemeiner naturwissenschaftliche, Gesetzmäßigkeiten lassen sich zunächst in Differentialgleichungen für eine gesuchte Größe formulieren, so dass die Lösung solcher Differentialgleichungen von grundlegender Bedeutung in vielen Naturwissenschaften ist.

Wir betrachten hier die Differentialgleichung  $f' = kf$ . Wir suchen also die differenzierbaren Funktionen  $f$ , deren Ableitung  $f'$  proportional ist zur Funktion  $f$  selbst, und zwar mit dem Proportionalitätsfaktor  $k$ :

**Satz:** (Die Differentialgleichung  $f' = k \cdot f$ )

Es sei  $k$  eine reelle Zahl und  $f$  eine Lösung der Differentialgleichung  $f' = k \cdot f$ , d. h.  $f$  ist eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft  $f'(x) = k \cdot f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\text{Es gibt eine reelle Zahl } c \in \mathbb{R} \text{ mit: } f(x) = c \cdot e^{kx}.$$

Alle Lösungen der Differentialgleichung  $f' = k \cdot f$  sind also Vielfache der Exponentialfunktion  $e^{kx} = (e^k)^x$ .

Dabei ist dann der Faktor  $c$  gerade der sog. *Anfangswert*  $f(0)$  von  $f$ :  $c = f(0)$ .

*Beweis:* Wir betrachten die Quotientenfunktion

$$g(x) := \frac{f(x)}{e^{kx}}.$$

Da die  $e$ -Funktion nur positive Werte annimmt, ist  $g$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert. Berechnet man (mit Quotienten- und Kettenregel) die Ableitung von  $g$ , so erhält man für alle  $x$

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^{kx} - f(x) \cdot ke^{kx}}{e^{2kx}} = \frac{f'(x) - f(x) \cdot k}{e^{kx}}.$$

Wegen  $f'(x) = k \cdot f(x)$  ist der letzte Term 0, also  $g'(x) = 0$  für alle  $x$ . Dann muss  $g$  aber über dem Intervall (!)  $\mathbb{R}$  konstant sein (s. S. 33). Also gibt es eine reelle Zahl  $c$  mit  $g(x) = c$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Das bedeutet:

$$f(x) = c \cdot e^{kx} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Setzt man in diese Gleichung  $x = 0$  ein, so erhält man  $f(0) = c$ , wie behauptet.

Dieser Satz ist die entscheidende Grundlage für die universelle Bedeutung der Exponentialfunktion. Bei allen Naturvorgängen, bei denen die momentane Änderungsrate ( $f'(x)$ ) einer Größe  $f(x)$  proportional zur Größe  $f(x)$  selbst ist, ergibt sich  $f$  als Vielfaches einer Exponentialfunktion. Beispiele sind radioaktive Zerfallsprozesse, elektrische Entladungsprozesse, Ausschaltvorgänge bei Spulen, aber auch Wachstumsprozesse in der Biologie oder Aufladungsvorgänge in der Elektrizitätslehre; überall werden die entscheidenden Größen durch die  $e$ -Funktion beherrscht.

Es ist schwer, die Bedeutung der  $e$ -Funktion inner- wie außerhalb der Mathematik zu überschätzen!

**f. Die Regeln von de l'Hospital.** Dies sind keine besonderen Regeln für Exponentialfunktionen, sondern sie stellen eine sehr allgemein anwendbare Methode zur Bestimmung von Grenzwerten dar. Sie werden hier behandelt, da sie bei der Untersuchung transzendenter Funktionen häufig benutzt werden.

Es geht um die Bestimmung von Grenzwerten von Funktionen der Form  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ . Sind  $g$  und  $h$  stetig und bei  $a$  definiert, so wissen wir aufgrund der Grenzwertsätze bereits:

$$h(a) \neq 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)}, \quad (1)$$

$$h(a) = 0, \quad g(a) \neq 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{g(x)}{h(x)} \right| = \infty. \quad (2)$$

Offen ist der Fall  $g(a) = h(a) = 0$ . Welchen Wert dann  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)}$  annimmt, haben wir bei ganzzahligem  $g$  und  $h$  mit Hilfe der Polynomdivision untersucht. Die Regeln von de l'Hospital

stellen eine weitgehende Verallgemeinerung dar; sie basieren auf der Differentialrechnung. Die folgenden Überlegungen enthalten die Grundidee der Regel von de l'Hospital im einfachsten Fall.

Unter der Voraussetzung  $g(a) = h(a) = 0$  gilt:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)} = \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{h(x) - h(a)} = \frac{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}{\frac{h(x) - h(a)}{x - a}}.$$

Wir erhalten also einen Quotienten der Differenzenquotienten von  $g$  und  $h$ . Sind nun  $g$  und  $h$  differenzierbar bei  $a$ , so strebt der Zähler gegen  $g'(a)$  und der Nenner gegen  $h'(a)$ . Der ganze Bruch strebt dann gegen  $\frac{g'(a)}{h'(a)}$  – vorausgesetzt  $h'(a) \neq 0$ ! Insgesamt ergibt sich so die folgende zusätzliche Regel für bei  $a$  differenzierbare  $g, h$ :

$$g(a) = h(a) = 0, h'(a) \neq 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(a)}{h'(a)}. \quad (3)$$

Anwendungsbeispiele:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{e^x - 1} &= -3 \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{-x} - e}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{-x}}{2x} = \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

Nun kann es aber sein, dass auch  $h'(a) = 0$  ist, wie in folgendem Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}.$$

Darauf ist (3) dann nicht anwendbar. Wohl aber die folgende umfassende Form der Regel von de l'Hospital, deren Beweis jedoch nicht so einfach wie der obige ist.

**1. Regel von de l'Hospital:** (Grenzwerte vom Typ  $\frac{0}{0}$ ) *Es sei  $a$  eine Stelle im oder am Rande des Definitionsbereichs von  $g$  und  $h$ . Beide Funktionen seien in einer Umgebung von  $a$  differenzierbar und dort gelte  $h'(x) \neq 0$ . Dann gilt:*

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{h'(x)}, \quad (4)$$

*vorausgesetzt der letztgenannte Grenzwert existiert in  $\mathbb{R}$  oder ist gleich  $\pm\infty$ .*

Die Vorteile dieser allgemeinen Form sind

1. Anwendbarkeit auch bei  $h'(a) = 0$ ,
2. rekursive Anwendbarkeit bei  $g'(a) = h'(a) = 0$ ,
3. Anwendbarkeit, wenn  $g, h$  bei  $a$  nicht definiert sind.

Die nächsten drei Beispiele belegen jeden dieser Vorteile:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x} \stackrel{(2)}{=} \pm\infty, & \lim_{x \searrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} &= \lim_{x \searrow 0} \frac{e^x}{2x} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 2e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - 2e^x}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{1 - e^x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{-e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-(x+1)e^x} = -1. \end{aligned}$$

Die zweite Regel von de l'Hospital betrifft Grenzwerte vom sog. Typ  $\frac{??}{\infty}$ , d. h.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)}$  im Falle  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \pm\infty$ . Aufgrund der Grenzwertsätze ist uns hierzu bekannt:

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \pm\infty, \quad g \text{ bei } a \text{ beschränkt} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0. \quad (5)$$

Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man weitere Fälle behandeln:

**2. Regel von de l'Hospital:** (Grenzwerte vom Typ  $\frac{??}{\infty}$ ) Es sei  $a$  eine Stelle im oder am Rande des Definitionsbereichs von  $g$  und  $h$ . Beide Funktionen seien in einer Umgebung von  $a$  differenzierbar und dort gelte  $h'(x) \neq 0$ . Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \pm\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{h'(x)}, \quad (6)$$

vorausgesetzt der letztgenannte Grenzwert existiert in  $\mathbb{R}$  oder ist gleich  $\pm\infty$ .

Als wichtigstes Anwendungsbeispiel dafür formulieren wir:

**Folgerung:** Die Exponentialfunktion wächst stärker als jede Potenz:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 \quad \text{für alle } k \geq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{e^x} = 0 \quad \text{für jede ganzrationale Funktion } h.$$

Entsprechend gilt: Die Logarithmusfunktion  $\ln$  wächst schwächer als jede Potenz:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = 0 \quad \text{für alle } k > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{h(x)} = 0 \quad \text{für jede nicht konstante ganzrationale Funktion } h.$$

**g. Wachstums- und Zerfallsfunktionen.** (Dieser Abschnitt wird bei der nächsten Überarbeitung vor Abschnitt e. eingefügt.) In vielen Anwendungsbezügen treten sog. *exponentielle* Wachstums- und Zerfallsfunktionen auf. Dies sind Vielfache von Exponentialfunktionen, also durch einen Funktionsterm folgender Art beschrieben:

$$f(x) = c \cdot a^x \quad (c \neq 0, a > 0).$$

Dabei ist  $c = f(0)$  der sog. *Anfangswert* und  $a = \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{f(x+1)}{f(x)}$  der *Änderungsfaktor* (bei Änderung von  $x$  um eine Einheit:  $\Delta x = 1$ ).  $a$  gibt also an, mit welchem Wert  $f(x)$  *multipliziert* wird um  $f(x+1)$  zu erhalten.

Ist  $a > 1$ , so handelt es sich um eine *Wachstumsfunktion*, bei  $0 < a < 1$  um eine *Zerfallsfunktion*. Den Änderungsfaktor nennt man dann auch Wachstums- bzw. Zerfallsfaktor.

Der Änderungsfaktor ist eng verknüpft mit der *relativen durchschnittlichen Änderungsrate*  $p$  (pro Einheit  $\Delta x$ ):

$$p = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{f(x+1)}{f(x)} - 1 = a - 1.$$

Die hier betrachteten Funktionen sind gerade die, bei denen diese Änderungsraten *unabhängig* sind von  $x$ ! An jeder Stelle  $x$  ist der Änderungsfaktor bzw. die relative durchschnittliche Änderungsrate (für den Zuwachs  $\Delta x = 1$ ) unverändert gleich  $a$  bzw. gleich  $p = a - 1$ .

Jede exponentielle Wachstums- bzw. Zerfallsfunktion  $f(x) = c \cdot a^x$  lässt sich durch die  $e$ -Funktion beschreiben:

$$f(x) = c \cdot a^x = c \cdot (e^{\ln a})^x = c \cdot e^{x \cdot \ln(a)} =: c \cdot e^{kx} \quad (k = \ln(a)).$$

Die hier bei auftretende Konstante  $k$  wird im Lehrbuch als *Wachstums-* bzw. *Zerfallskonstante* bezeichnet. Ihre Bedeutung erkennt man, indem man eine solche Wachstumsfunktion ableitet:

$$f'(x) = c \cdot e^{kx} \cdot k = k \cdot f(x).$$

Wir sehen wieder (vgl. unseren Einstieg in die Differentialrechnung der Exponentialfunktionen, S. 45), dass die Vielfachen von Exponentialfunktionen eine Ableitung  $f'$  haben, die proportional ist zur Ausgangsfunktion  $f$ . Und der Proportionalitätsfaktor ist gerade  $k = \ln a$ . Nach  $k$  aufgelöst erkennt man:

$$k = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ ist die relative momentane Änderungsrate von } f.$$

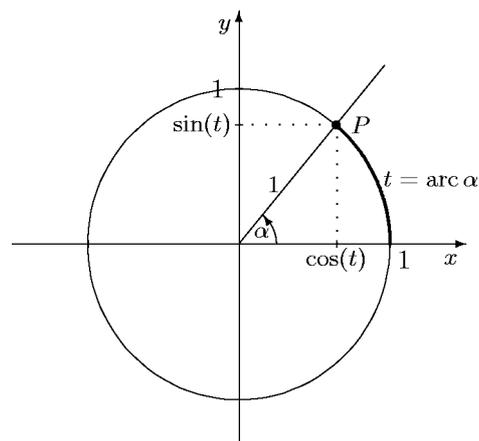
Die Wachstums-/Zerfallskonstante  $k = \ln a$  ist der natürliche Logarithmus des Änderungsfaktors  $a$  und gibt die relative momentane Änderungsrate der Funktion  $f$  an:  $k = \frac{f'(x)}{f(x)}$ . Dies ist das Verhältnis des momentanen Anstiegs  $f'(x)$  zum Bestand  $f(x)$ .

Die obigen Überlegungen zur Differentialgleichung  $f' = kf$  zeigen, dass eine Funktion mit konstantem  $k$  (mit konstanter relativer momentaner Änderungsrate  $k$ ) *notwendig* die obige Gestalt  $f(x) = c \cdot e^{kx} = c \cdot a^x$  ( $a = e^k$ ) haben *muss!* *Es gibt keine anderen Funktionen mit dieser Eigenschaft!*

## §7 Die trigonometrischen Funktionen

**a. Wiederholung: Definition am Einheitskreis.** Wir betrachten den sog. Einheitskreis, den Kreis vom Radius 1, in einem kartesischen Koordinatensystem und beliebige Punkte  $P$  darauf. Diese können auf verschiedene Weisen beschrieben werden (siehe Skizze):

1. Durch den Winkel  $\alpha$  zwischen positiver  $x$ -Achse und der Verbindung vom Zentrum zu  $P$ . Dieser Winkel wird mit einem Vorzeichen versehen, positiv bei Drehung gegen Uhrzeigersinn und negativ im umgekehrten Fall.
2. Durch die Maßzahl  $t$  der Länge des den Winkel beschreibenden Kreisbogens auf dem Einheitskreis, das sog. Bogenmaß  $t = \text{arc } \alpha$  des Winkels, wieder mit dem entsprechenden Vorzeichen je nach Drehrichtung.
3. Durch die beiden Koordinaten von  $P$ . In Abhängigkeit vom Bogenmaß  $t$  erhalten die Koordinaten von  $P$  einen Namen: Die  $x$ -Koordinate ist der Cosinus  $\cos(t)$ , die  $y$ -Koordinate ist der Sinus  $\sin(t)$ .



Auf diese Weise sind die *trigonometrischen Funktionen*  $\sin$  und  $\cos$  für beliebiges  $t \in \mathbb{R}$  definiert. Für  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ , d. h. für Winkel  $\alpha$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  erhält man aus dem Strahlensatz die bekannte Beschreibung von Sinus und Cosinus am rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

wobei präziser formuliert jeweils die Länge der entsprechenden Dreiecksseiten gemeint ist. Diese Beschreibung ist aber nur für spitze Winkel richtig, während die obige Definition am Einheitskreis allgemeingültig ist.

Aus der Definition am Einheitskreis entnimmt man unmittelbar die folgenden grundlegenden Eigenschaften:

$$\boxed{-1 \leq \sin(t) \leq +1, \quad -1 \leq \cos(t) \leq +1} \quad (1)$$

Genauer ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras:

$$\boxed{\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1} \quad (2)$$

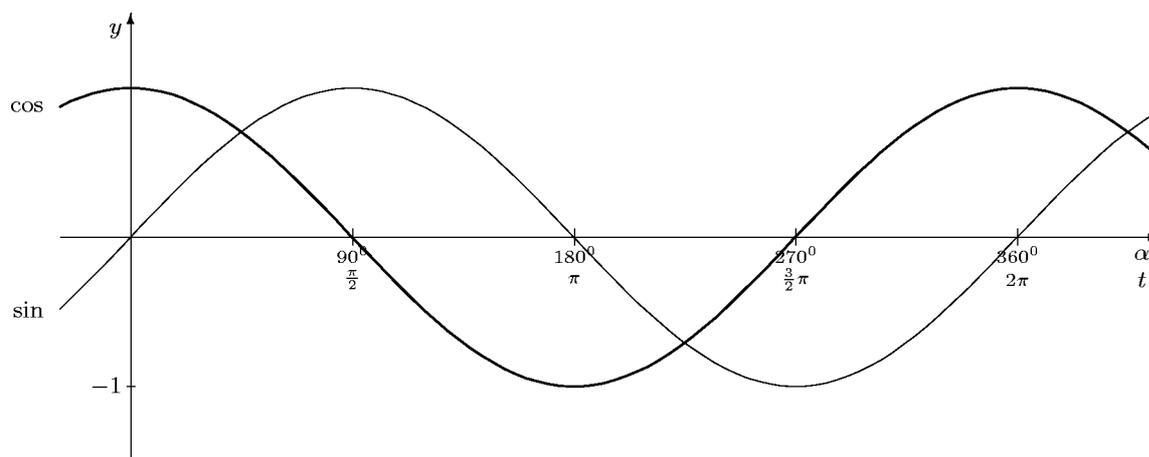
Weiter gilt:

$$\boxed{\sin \text{ und } \cos \text{ haben die Periode } 2\pi : \begin{cases} \sin(t + 2\pi) = \sin(t) \\ \cos(t + 2\pi) = \cos(t) \end{cases}} \quad (3)$$

Indem man den Punkt  $P$  mit dem an der  $x$ -Achse gespiegelten Punkt vergleicht, erkennt man:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos(-t) = \cos(t): & \cos \text{ ist achsensymmetrisch,} \\ \sin(-t) = -\sin(t): & \sin \text{ ist punktsymmetrisch.} \end{array}} \quad (4)$$

Mit Hilfe einer genauen Zeichnung des Einheitskreises erhält man etwa den folgenden Verlauf der Graphen der beiden trigonometrischen Funktionen:



In dieser Skizze erkennt man eine Reihe weiterer Symmetrien, die sich alle aus entsprechenden Symmetrien am Einheitskreis ergeben (siehe Skript EPhase, S. 64). Eine besonders wichtige wollen wir hier noch festhalten: Verschiebt man den Graphen der Cosinus-Funktion um  $\frac{\pi}{2}$  nach rechts, so erhält man den Graphen der Sinus-Funktion:  $\cos(t - \frac{\pi}{2}) = \sin(t)$ . Umgekehrt ergibt dieselbe Verschiebung beim Sinus-Graphen den Graphen von  $-\cos$ :  $\sin(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos(t)$ .

$$\boxed{\cos(t - \frac{\pi}{2}) = \sin(t), \quad \sin(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos(t)} \quad (5)$$

**b. Analytische Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen.** Wir bemerken zunächst, dass aufgrund der obigen Definition die trigonometrischen Funktionen *stetig* sind: Nähert sich nämlich das Bogenmaß  $t$  einem festen Wert  $t_0$ , so nähert sich der zugehörige Punkt  $P = (\cos(t), \sin(t))$  auf dem Einheitskreis dem Punkt  $(\cos(t_0), \sin(t_0))$ , insbesondere also  $\cos(t) \rightarrow \cos(t_0)$  und  $\sin(t) \rightarrow \sin(t_0)$ .

$$\boxed{\text{sin und cos sind stetig.}} \quad (6)$$

Wir wollen dies nun zur Differenzierbarkeit verschärfen. So wie die Ableitungsformel für die Exponentialfunktionen auf deren Funktionalgleichung  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$  beruhte, benutzen wir für die Ableitung der trigonometrischen Funktionen die

**Additionstheoreme:** Für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b), & \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b), \\ \sin(a + b) &= \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b), & \sin(a - b) &= \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b). \end{aligned}$$

Diese lassen sich durch elementar-geometrische Überlegungen beweisen.

Mit Hilfe der Additionstheoreme können wir die Differenzierbarkeit von sin und cos an einer beliebigen Stelle  $t_0$  zurückführen auf die Differenzierbarkeit an der Stelle 0: Setzt man in einem der Additionstheoreme  $a = t$  und  $b = t - t_0$ , so erhält man

$$\sin(t) = \sin(t_0) \cos(t - t_0) + \cos(t_0) \sin(t - t_0) \quad (A)$$

Sind nun cos und sin an der Stelle 0 differenzierbar, so sind nach der Kettenregel  $\cos(t - t_0)$  und  $\sin(t - t_0)$  an der Stelle  $t_0$  differenzierbar. Mit Faktor- und Summenregel folgt dann aus (A), dass auch  $\sin(t)$  an der Stelle  $t_0$  differenzierbar ist mit

$$\sin'(t_0) = \sin(t_0) \cos'(0) + \cos(t_0) \sin'(0) \quad \text{für jedes } t_0 \in \mathbb{R}.$$

oder in vertrauterer Darstellung:

$$\sin'(t) = \sin(t) \cos'(0) + \cos(t) \sin'(0). \quad (7)$$

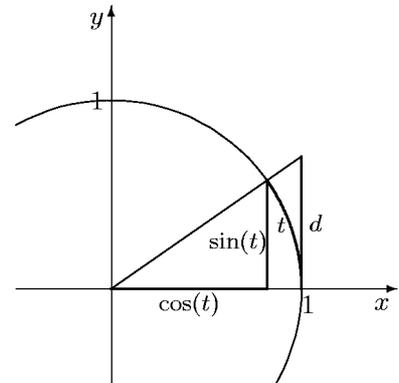
Damit braucht man nur noch die Differenzierbarkeit beider Funktionen an der Stelle 0 zu untersuchen. Wir zeigen nun, dass beide Ableitungswerte existieren, und zwar:

$$\sin'(0) = 1 \quad \text{und} \quad \cos'(0) = 0. \quad (8)$$

Die Bestimmung dieser Grenzwerte beruht auf der Abschätzung:

$$\cos(t) < \frac{\sin(t)}{t} < 1 \quad \text{für } t \neq 0. \quad (*)$$

Der nebenstehenden Skizze entnehmen wir:  $\sin(t) < t < d$  (bei  $t > 0$  und  $t < \frac{\pi}{2}$ ). (Diese anschaulich einsichtigen Tatsachen ergeben sich durch einen Längen- ( $\sin t < t$ ) und durch einen Flächenvergleich ( $t < d$ ). Eine präzise Begründung erfordert genaue Begriffe der Bogenlänge von Kurven und des Flächeninhalts von krummlinig begrenzten Flächenstücken, die wir im Rahmen der Integralrechnung behandeln werden.) Mit Hilfe des Strahlensatzes erhalten wir für die Größe  $d$ :  $\frac{d}{1} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \tan(t)$ . Insgesamt folgt also:



$$\sin(t) < t \quad \text{sowie} \quad t < \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

Mit den üblichen äquivalenten Umformungen erhält man dann (\*).

Im Fall  $t < 0$  argumentiert man sinngemäß.

Wegen  $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(t) = \cos(0) = 1$  folgt aus (\*) mit dem Schachtelungssatz die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

Also ist  $\sin$  an der Stelle 0 differenzierbar mit  $\sin'(0) = 1$ .

Da  $\cos(t)$  in einer Umgebung von 0 positiv ist, erhält man aus (2), dem Satz des Pythagoras,  $\cos(t) = \sqrt{1 - \sin^2(t)}$ . Da  $\sin$  an der Stelle 0 differenzierbar ist, erhalten wir mit bekannten Ableitungsregeln und der Kettenregel dann:  $\cos$  ist an der Stelle 0 differenzierbar und es gilt

$$\cos'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sin^2(0)}} \cdot (-2 \sin(0) \sin'(0)) = 0.$$

Insgesamt erhalten wir nun aus (7) und (8):  $\sin$  ist überall differenzierbar und es gilt  $\sin'(t) = \cos(t)$ . In gleicher Weise untersucht man die Differenzierbarkeit von  $\cos$ . Insgesamt folgt damit der fundamentale

**Satz:** Die trigonometrischen Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  sind differenzierbar, und es gilt:

$$\boxed{\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin.}$$

**c. Die Schwingungsdifferentialgleichung.** Die trigonometrischen Funktionen sind zunächst (schon dem Namen nach) mit geometrischen Fragen verknüpft. Ihre besondere universelle Bedeutung in der Physik und allgemein in den Naturwissenschaften verdanken sie aber einer anderen Tatsache. Aufgrund der obigen Ableitungsregeln erhalten wir  $\sin'' = -\sin$  und  $\cos'' = -\cos$ . Die beiden Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  sind also Lösungen der Gleichung  $f'' = -f$ . Man nennt dies eine *Differentialgleichung*, weil hier eine Beziehung zwischen  $f$  und deren Ableitungen hergestellt wird.

Das entscheidende Resultat ist nun: *Jede* Lösung dieser Differentialgleichung ist durch die beiden trigonometrischen Funktionen darstellbar. Dies hat zur Folge, dass überall, wo physikalische Größen der obigen (oder einer eng verwandten) Differentialgleichung genügen, notwendig

die trigonometrischen Funktionen in Erscheinung treten. Die physikalischen Größen verhalten sich also periodisch, es liegen harmonische Schwingungen vor. Daher nennt man diese Differentialgleichung (und eng verwandte) auch *Schwingungsdifferentialgleichung*.

**Satz:** (Die Differentialgleichung  $f'' = -f$ )

a) Ist  $f$  eine zweimal differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft  $f'' = -f$ , so gibt es geeignete Konstanten  $a, b \in \mathbb{R}$  mit

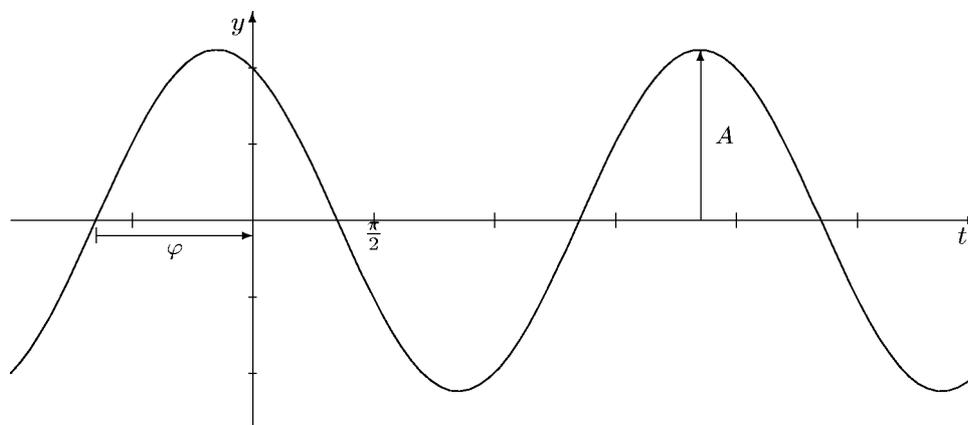
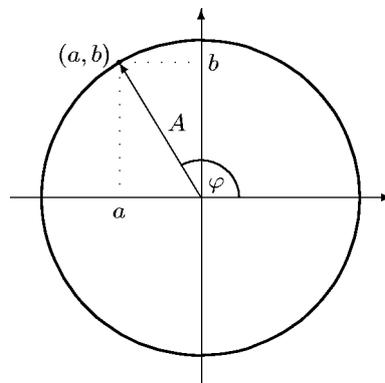
$$f(t) = a \sin(t) + b \cos(t).$$

Dabei sind  $a = f'(0)$  und  $b = f(0)$  die sog. Anfangswerte von  $f$ .

b) Jede solche Funktion lässt sich auch in folgender Form darstellen:

$$f(t) = A \sin(t + \varphi)$$

mit  $A \geq 0$ ,  $A^2 = a^2 + b^2$  und dem Winkel  $\varphi$  mit  $A \cos \varphi = a$  und  $A \sin \varphi = b$  (siehe nebenstehende Skizze, für  $A \neq 0$  ist  $\varphi$  eindeutig im Bereich  $] -\pi, \pi[$ ). Damit hat der Graph von  $f$  folgendes Aussehen:



$A$  gibt also den größten Wert von  $f$  an (physikalisch: die Amplitude der Schwingung) und  $\varphi$  die sog. Phase (oder den Phasenwinkel) der Schwingung im Start(zeit)punkt.

Beweis: a) Gesucht sind Zahlen  $a, b$  mit  $f(t) = a \sin(t) + b \cos(t)$ . Dies ist nur *eine* Gleichung für *zwei* Unbekannte. Da diese Gleichung aber für jedes  $t$  gelten soll, erhält man durch Ableiten daraus eine zweite:  $f'(t) = a \cos(t) - b \sin(t)$ . Damit hat man ein System von 2 Gleichungen für 2 Unbekannte:

$$\begin{aligned} f(t) &= a \sin(t) + b \cos(t) \\ f'(t) &= a \cos(t) - b \sin(t) \end{aligned}$$

Diese löse man wie üblich nach  $a, b$  auf. Multiplikation der ersten Gleichung mit  $\sin(t)$ , der zweiten mit  $\cos(t)$  und Addition ergibt

$$\begin{aligned} f(t) \sin(t) &= a \sin^2(t) + b \sin(t) \cos(t) \\ f'(t) \cos(t) &= a \cos^2(t) - b \sin(t) \cos(t) \\ \implies f(t) \sin(t) + f'(t) \cos(t) &= a(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = a. \end{aligned}$$

Genauso erhält man

$$b = f(t) \cos(t) - f'(t) \sin(t).$$

Man überprüft leicht, dass die so gefundenen Terme für  $a, b$  die behauptete Darstellung in a) liefern. Man muss aber noch zeigen, dass  $a, b$  tatsächlich Konstanten sind und nicht von  $t$  abhängen!

Erst hierfür wird die Voraussetzung an  $f$  benutzt:  $f'' = -f$ . Mit ihrer Hilfe zeigen wir, dass die für  $a, b$  gefundenen Funktionsterme die Ableitung 0 haben, also konstant sind:

$$\begin{aligned} (f(t) \sin(t) + f'(t) \cos(t))' &= f'(t) \sin(t) + f(t) \cos(t) + f''(t) \cos(t) + f'(t)(-\sin(t)) \\ &= f(t) \cos(t) + (-f(t)) \cos(t) = 0. \end{aligned}$$

Genauso zeigt man, dass  $b$  konstant ist. Setzt man in der Darstellung  $f(t) = a \sin(t) + b \cos(t)$   $t = 0$  ein, so erhält man  $f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b$ , und entsprechend gewinnt man aus der Darstellung für  $f'$  auch die letzte noch offene Behauptung von a):  $f'(0) = a$ .

Für die Darstellung b) benutzt man die Additionstheoreme:

$$A \sin(t + \varphi) = A \cdot (\sin(t) \cos(\varphi) + \cos(t) \sin(\varphi)) = A \cos(\varphi) \cdot \sin(t) + A \sin(\varphi) \cdot \cos(t).$$

Dies ist gleich  $f(t) = a \sin(t) + b \cos(t)$ , wenn folgendes gilt:

$$a = A \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad b = A \sin(\varphi).$$

Der Satz des Pythagoras ergibt  $a^2 + b^2 = A^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = A^2$  und der Winkel  $\varphi$  ist dann bestimmt durch

$$\frac{a}{A} = \cos(\varphi), \quad \frac{b}{A} = \sin(\varphi), \quad \text{bzw.} \quad (a, b) = (A \cos(\varphi), A \sin(\varphi)),$$

wie in der Skizze dargestellt.

Anmerkung (nicht nur für Physiker): Die allgemeine Schwingungsdifferentialgleichung lautet  $f'' = -kf$  mit *positivem*  $k$ . Setzt man  $\omega = \sqrt{k}$ , so erhält man die handlichere Form  $f'' = -\omega^2 f$ . Setzt man nun  $g(t) = f(\frac{t}{\omega})$ , so erfüllt  $g$  die Differentialgleichung  $g'' = -g$ , denn:

$$\begin{aligned} g(t) = f\left(\frac{t}{\omega}\right) &\implies g'(t) = \frac{1}{\omega} f'\left(\frac{t}{\omega}\right) \\ \implies g''(t) &= \frac{1}{\omega^2} f''\left(\frac{t}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^2} \cdot (-\omega^2 f\left(\frac{t}{\omega}\right)) = -g(t) \end{aligned}$$

Nach dem vorangehenden Satz folgt also  $g(t) = a \sin(t) + b \cos(t) = A \sin(t + \varphi)$ . Wegen  $f(t) = g(\omega t)$  ergibt sich damit der

**Satz:** Jede Lösung der sog. Schwingungsdifferentialgleichung  $f'' = -\omega^2 f$  ist von der Form

$$f(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) = A \sin(\omega(t + t_0))$$

mit  $f(0) = b$ ,  $f'(0) = \omega a$ ,  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  und  $(a, b) = (A \cos(\omega t_0), A \sin(\omega t_0))$ .