Übungen (10)

1) Ein radioaktives Präparat aus Strontium 90 zerfällt ungefähr nach dem Gesetz $m(t) = m_0 \cdot 0{,}9753^t$ (für die Zeit t gemessen in Jahren).
a) Wieviel Prozent der Anfangsmasse m_0 sind in 10 [50;100] Jahren zerfallen?
b) Bestimmen Sie die Halbwertszeit t_H von Strontium 90.
c) Stellen Sie $m(t)$ in der Form $a \cdot 2^{-\frac{t}{b}}$ dar. Welche Bedeutung haben die Parameter a und b?

2) Das Element U232 zerfällt mit der Halbwertszeit $t_H = 71{,}7$ Jahre.
a) Bestimmen Sie den Anteil des noch nicht zerfallenen Urans als Funktion der Zeit t (gemessen in Jahren).
b) Innerhalb welcher Zeit sind 10% [20%;30%;40%;50%] des Urans zerfallen?

3) Ein Medikament sei im menschlichen Körper 6 Stunden nach der Einnahme zur Hälfte abgebaut.
a) Bestimmen Sie die Zerfallsfunktion $m(t)$ bei einer Ausgangsmenge m_0.
b) In welchen zeitlichen Abständen und in welcher Menge ist das Medikament einzunehmen, wenn im Körper ein Mindestniveau von $0{,}8m_0$ aufrechterhalten werden soll?

4) Eine Bakterienkultur wächst exponentiell. Innerhalb von 48 Stunden hat sich die Zahl der Individuen von 5000 auf 100000 vermehrt.
a) Bestimmen Sie die Zahl der Bakterien N als Funktion der Zeit t (in Stunden) (wir nehmen ungehindertes Wachstum an).
b) In welcher Zeit hat sich die anfängliche Zahl der Bakterien verdoppelt? In welcher Zeit hat sich die Zahl auf das 4-fache bzw. 16-fache vergrößert?

5) Die Bevölkerung des Staates A wachse jährlich um 0,9% und habe von Anfang 1995 bis Anfang 2000 um 3 Millionen zugenommen.
a) Stellen Sie die Wachstumsfunktion auf. Wie groß war die Bevölkerungszahl in den Jahren 1995 und 2000?
b) Die Bevölkerung des Landes B beträgt im Jahre 2000 81 Millionen und wächst halb so stark wie die des Landes A. Wann haben beide Staaten gleich viel Einwohner?

6) Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab, und zwar bei einem Aufstieg von 1000 m um (etwa) 12% (konstante Temperatur unterstellt). Auf Meereshöhe herrsche der Luftdruck $p_0 = 1013\,\text{hPa}$.
a) Wie hoch ist der Luftdruck in einer Höhe von 100 m [2 km; 8 km] über dem Meeresspiegel?
b) In welcher Höhe ist der Luftdruck auf die Hälfte gefallen?

Übungen (10) — Lösungen

1) a) Der Anteil des zerfallenen Präparates ist

$$\frac{m_0 - m(t)}{m_0} = 1 - 0{,}9753^t\,.$$

Wir berechnen diesen Wert für die angegebenen t-Werte:

$$1 - 0{,}9753^{10} = 0{,}2213\,, \quad 1 - 0{,}9753^{50} = 0{,}7136\,, \quad 1 - 0{,}9753^{100} = 0{,}918\,.$$

Also sind nach 10 [50;100] Jahren 22,13% [71,36% ; 91,8%] des Materials zerfallen.
b) Die Halbwertszeit t_H ist charakterisiert durch

$$\frac{m(t+t_H)}{m(t)} = \frac{1}{2} \iff 0{,}9753^{t_H} = \frac{1}{2} \iff t_H = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}9753} = 27{,}71\,.$$

Die Halbwertszeit beträgt also 27,7 Jahre.
c) Wir setzen an:

$$m(t) = a \cdot 2^{-\frac{t}{b}} \iff m_0 \cdot 0{,}9753^t = a \cdot 2^{-\frac{t}{b}}\,.$$

Für $t = 0$ ergibt sich $m_0 = a$ und für $t \neq 0$ ergibt sich dann

$$0{,}9753^t = 2^{-\frac{t}{b}} \iff t \cdot \log 0{,}9753 = -\frac{t}{b} \cdot \log 2 \iff b = \frac{-\log 2}{\log 0{,}9753} = 27{,}71\,.$$

Die Bedeutung der Konstanten a in $f(t) = a \cdot 2^{-\frac{t}{b}}$ ist klar: $a = f(0)$ ist der Startwert. Dagegen ist b die Halbwertszeit, denn

$$\frac{f(t+b)}{f(t)} = \frac{2^{-\frac{t+b}{b}}}{2^{-\frac{t}{b}}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}\,.$$

2) a) Für die Zerfallsfunktion $m(t) = m_0 \cdot a^t$ gilt nach Definition der Halbwertszeit

$$\frac{1}{2} = \frac{m(t_H)}{m_0} = a^{t_H} \iff a = 2^{-1/t_H} = 2^{-1/71{,}7} \approx 0{,}990379$$

b) Der Anteil des noch nicht zerfallenen Urans nach t Jahren beträgt daher

$$\frac{m(t)}{m_0} = 2^{-t/t_H} = 2^{-t/71{,}7}\,.$$

Wenn 10% zerfallen, also 90% noch vorhanden sind, muss gelten

$$0{,}9 = 2^{-t_{10}/t_H} \iff \log 0{,}9 = -\frac{t_{10}}{t_H} \cdot \log 2 \iff t_{10} = \frac{-71{,}7}{\log 2} \cdot \log 0{,}9 \approx 10{,}9\,.$$

Entsprechend erhält man für 20% [30% ; 40%] Zerfall die Zeiten

$$
\begin{aligned}
t_{20} &= \frac{-71{,}7}{\log 2} \cdot \log 0{,}8 \approx 23{,}08\,, \\
t_{30} &= \frac{-71{,}7}{\log 2} \cdot \log 0{,}7 \approx 36{,}89\,, \\
t_{40} &= \frac{-71{,}7}{\log 2} \cdot \log 0{,}6 \approx 52{,}84\,,
\end{aligned}
$$

während $t_{50} = 71{,}7$ nichts anderes ist als die vorgegebene Halbwertszeit.

3) a) Die Halbwertszeit beträgt 6 (Stunden), also gilt für die Zeit t (in Stunden) ab Einnahme des Medikamentes

$$m(t) = m_0 \cdot a^t \quad \text{mit} \quad a^6 = \frac{1}{2} \iff a = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} = 2^{-1/6}$$

und damit

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{6}}\,.$$

b) Wir bestimmen zunächst die Zeit, in der der Medikamentenpegel auf 80% absinkt:

$$0{,}8 = 2^{-\frac{t}{6}} \iff t = \frac{-6}{\log 2} \cdot \log 0{,}8 \approx 1{,}93$$

Nach etwa 2 Stunden muss also der Medikamentenpegel wieder auf m_0 angehoben werden, d. h. 20% von m_0 eingenommen werden.

4) a) Die Bakterienanzahl nach t Stunden beträgt

$$N(t) = N_0 \cdot a^t\,.$$

Laut Vorgabe gilt $N_0 = 5000$ und $N(48) = 100000$, also

$$a^{48} = \frac{N(48)}{N_0} = 20 \iff a = 20^{1/48} \approx 1{,}0644\,.$$

b) Als Verdopplungszeit T erhalten wir so

$$2 = a^T \iff T = \frac{\log 2}{\log a} = \frac{\log 2}{\frac{1}{48}\log 20} \approx 11{,}11\,.$$

Nach der Zeit $2T \approx 22{,}21$ hat sich die Bakterienzahl erneut verdoppelt, ist insgesamt also auf $4N_0$ gestiegen. In weiteren $2T \approx 22{,}21$ Stunden wächst die Zahl erneut auf das 4-fache, insgesamt ist also in der Zeit $4T \approx 44{,}42$ die Bakterienzahl auf $16 \cdot N_0$ gewachsen. In der vierfachen Verdopplungszeit $4T$ wächst $N(t)$ mit dem Faktor $2^4 = 16$.

5) Es sei $N_A(t)$ die Bevölkerungszahl des Staates A nach t Jahren (ab 1995 gerechnet). Also gilt

$$N_A(t) = N_A(0) \cdot 1{,}009^t$$

und es gilt

$$3\cdot 10^6 = N_A(5) - N_A(0) = N_A(0)\cdot(1{,}009^5 - 1) \iff N_A(0) = \frac{3 \cdot 10^6}{1{,}009^5 - 1} \approx 65{,}5\cdot 10^6\,.$$

Die Bevölkerungszahl im Jahr 1995 betrug also 65,5 Millionen, im Jahr 2000 folglich 68,5 Millionen.
b) Für die Bevölkerungszahl $N_B(t)$ des Landes B gilt (bei gleicher Bedeutung von t!):

$$N_B(t) = N_B(0) \cdot 1{,}0045^t$$

mit $N_B(5) = 81 \cdot 10^6$. Also

$$81 \cdot 10^6 = N_B(5) = N_B(0) \cdot 1{,}0045^5 \implies N_B(0) = 81 \cdot 10^6 \cdot 1{,}0045^{-5} \approx 79{,}2 \cdot 10^6 \,.$$

Insgesamt also

$$N_B(t) = 81 \cdot 10^6 \cdot 1{,}0045^{t-5} \approx 79{,}2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}0045^t \,.$$

Zur Beantwortung der Frage müssen wir also die folgende Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} N_A(t) = N_B(t) &\iff \frac{3}{1{,}009^5 - 1} \cdot 1{,}009^t = 81 \cdot 1{,}0045^{t-5} \\ &\iff \log(\frac{3}{1{,}009^5 - 1}) + t \log 1{,}009 = \log 81 + (t-5) \log 1{,}0045 \\ &\iff t = \frac{\log 81 - 5 \log 1{,}0045 - \log 3 + \log(1{,}009^5 - 1)}{\log 1{,}009 - \log 1{,}0045} \approx 42{,}57 \end{aligned}$$

Also etwa im Laufe des Jahres $1995 + 42 = 2037$ werden beide Staaten die gleiche Bevölkerungszahl haben.

6) a) Es sei $p(h)$ der Luftdruck in der Höhe h (gemessen in km) über dem Meeresspiegel. Dann gilt gemäß den Vorgaben

$$p(h) = p_0 \cdot 0{,}88^h$$

und man erhält für den Luftdruck in 100 m Höhe

$$p(0{,}1) = 1013 \cdot 0{,}88^{0{,}1} \approx 1000 \,\mathrm{hPa}\,.$$

Für 2 und 8 km Höhe ergibt sich entsprechend

$$p(2) = p_0 \cdot 0{,}88^2 \approx 784{,}47\,, \quad p(8) = p_0 \cdot 0{,}88^8 \approx 364{,}31\,.$$

b) Eine Halbierung des Luftdruckes ergibt sich in der Höhe h (gemessen in km), mit

$$\frac{1}{2} = 0{,}88^h \iff h = \frac{-\log 2}{\log 0{,}88} \approx 5{,}4\,,$$

also etwa 5400 m über dem Meeresspiegel.