Übungen für Interessierte

1) Man definiert die *hyperbolischen* Funktionen *Cosinus hyperbolicus* cosh bzw. *Sinus hyperbolicus* sinh durch

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{bzw.} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,.$$

a) Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie, Nullstellen und zeigen Sie, dass sie gegenseitig Ableitungen voneinander sind: $\cosh' = \sinh$ und $\sinh' = \cosh$.
b) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle beider Funktionen.
c) Begründen Sie damit: Für jedes y hat die Gleichung $y = \sinh x$ genau eine Lösung x. Berechnen Sie diese Lösung x in Abhängigkeit von y. (Tipp: Substitution $z = e^x$. Kontrollergebnis: $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.)
d) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von y, wieviele Lösungen die Gleichung $y = \cosh x$ hat, und berechnen Sie sie ggf.
(Kontrollergebnis im Falle der Lösbarkeit $x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\,)$).

2) a) Zeigen Sie, dass cosh und sinh die Differentialgleichung $f'' = f$ erfüllen.
b) Es sei f eine *beliebige* Lösung der obigen Differentialgleichung, also eine Funktion mit der Eigenschaft $f'' = f$. Folgern Sie mit Hilfe der Ableitung, dass $f^2(x) - f'^2(x)$ konstant ist. (Welcher konstante Wert ergibt sich für $f(x) = \cosh x$?)
(Kontrollergebnis: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. In diesem speziellen Fall ist dies natürlich auch elementar algebraisch berechenbar.)
c) Gesucht sind a, b mit $f(x) = a\cosh x + b\sinh x$. Bestimmen Sie a, b mit folgender Überlegung: Aus obiger Gleichung folgt die zweite Gleichung $f'(x) = a\sinh x + b\cosh x$. Beide Gleichungen zusammen bilden ein lineares Gleichungssystem für a, b, das man mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren löst:

$$a = f(x)\cosh x - f'(x)\sinh x\,, \qquad -b = f(x)\sinh x - f'(x)\cosh x\,.$$

d) Zeigen Sie: Ist f eine Lösung der Differentialgleichung $f'' = f$, so sind die in c) bestimmten Funktionen a, b tatsächlich *konstant,* also Zahlen.
e) Fazit:

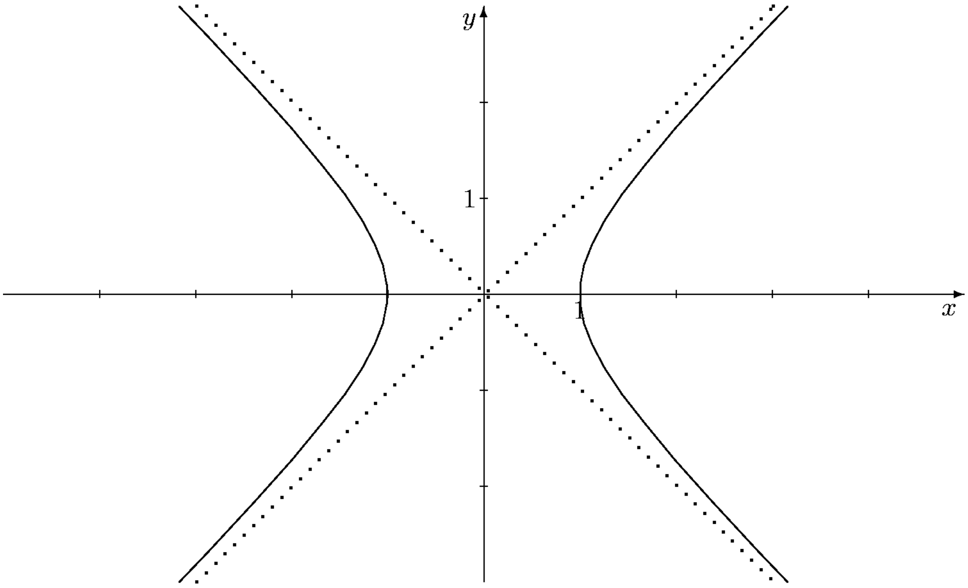
> Jede Lösung f der Differentialgleichung $f'' = f$ lässt sich als Linearkombination (=Vielfachsumme) von cosh und sinh darstellen:
>
> $$f'' = f \implies f(x) = a\cosh x + b\sinh x \quad \text{für geeignete Konstanten } a, b \in \mathbb{R}.$$

cosh und sinh sind zwei sog. *Basislösungen* der Differentialgleichung $f'' = f$: Jede Lösung lässt sich aus diesen beiden Basislösungen linear kombinieren.
(Andere Basislösungen sind e^x und e^{-x}.)

3) Beziehung der obigen Funktionen zu Hyperbeln:
Hyperbeln sind ebene Kurven beschrieben durch Gleichungen der Form

$$(\frac{x}{A})^2 - (\frac{y}{B})^2 = 1 \quad (A, B > 0)\,.$$

(Hyperbeln gehören zu den sog. *Kegelschnitten.)* Skizze (für $A = B = 1$):



Zeigen Sie, dass jeder Hyperbelpunkt in der Form

$$(x, y) = (\pm A \cosh t, B \sinh t) \quad \text{mit geeignetem, eindeutigem } t \in \mathbb{R}$$

dargestellt werden kann.
Man sagt: $(\pm A \cosh t, B \sinh t)$ *parametrisiert* die (beiden Zweige der) Hyperbel.