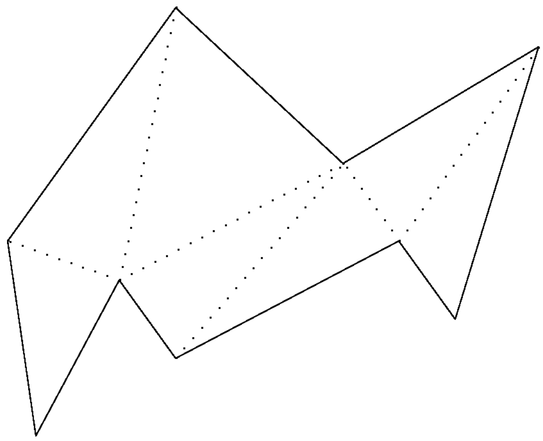
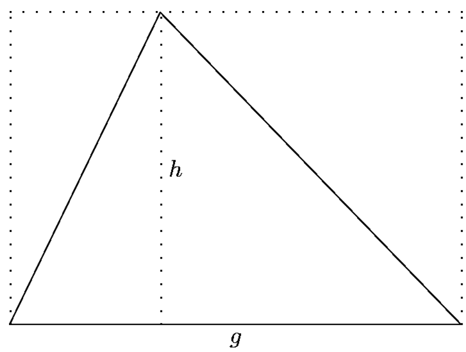
## IV. Integralrechnung

Gegenstand der Integralrechnung ist das uralte Problem der Berechnung von Flächeninhalten und Volumina. Aber auch Bogenlängen werden mit Hilfe der Integralrechnung ermittelt.

### §8 Flächeninhalt und Integral

**a. Grundprinzipien der Flächenberechnung.** Die Flächenberechnung stellt kein großes Problem dar, solange die Flächenstücke geradlinig begrenzt sind: Man kann sie in Dreiecke 'zerschneiden' und Dreiecksflächen kann man nach der Formel *Fläche gleich Grundlinie mal*






*Höhe durch 2* berechnen. Diese Formel wiederum erhält man dadurch, dass man ein beliebiges Dreieck mittels einer Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt und diese durch geeignete Verdopplung zu Rechtecken ergänzt. Insgesamt erhält man so ein Gesamtrechteck, das doppelt so groß ist wie das gegebene Dreieck. Die Fläche dieses Rechtecks ist das Produkt $g \cdot h$ der Kantenlängen. Die Hälfte davon ist dann die Dreiecksfläche.

In diesen kurzen Bemerkungen sind schon die elementarsten Eigenschaften des Flächeninhalts angesprochen:

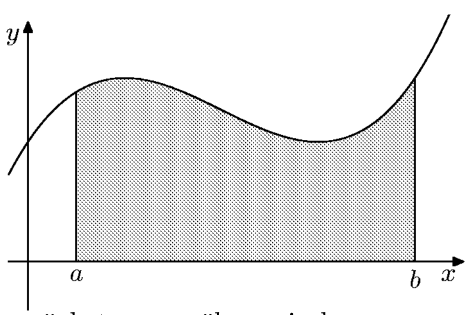
1. Rechtecksfläche = Produkt der Kantenlängen. (Dies ist im Kern die Definition des Flächeninhalts.)
2. Zerschneidet man Flächenstücke, so addieren sich die Einzelflächeninhalte zum Gesamtflächeninhalt.
3. Deckungsgleiche (kongruente) Flächenstücke haben denselben Flächeninhalt.

Schließlich wollen wir noch eine weitere, ebenso offensichtliche Eigenschaft formulieren, die aber für das folgende auch ebenso fundamental ist:

4. Liegt ein Flächenstück vollständig in einem anderen, so ist sein Flächeninhalt höchstens so groß wie der des umfassenderen Flächenstücks.

Diese vier Eigenschaften sind die Grundregeln über Flächeninhalte, auf denen die nachfolgenden Überlegungen basieren. Sie sind hier explizit formuliert, um die Fundamente deutlich offen zu legen. Zugleich sollen dies die einzigen Eigenschaften sein, die wir über Flächeninhalte verwenden werden.

**b. Intervallzerlegungen.** Das eigentliche Problem ist die Flächenberechnung für *krummlinig begrenzte* Flächenstücke. Durch geeignetes Zerschneiden kann man sich auf Flächenstücke beschränken, die wie skizziert zwischen dem Graphen einer Funktion und der $x$-Achse liegen und seitlich durch Parallelen zur $y$-Achse begrenzt sind. Mit $a$ und $b$ bezeichnen wir die Lage der seitlichen Begrenzungen und es sei $a < b$. Diese Bezeichnungen werden wir im folgenden stets verwenden.




Da man krummlinig begrenzte Flächenstücke nicht in Rechtecke (oder allgemeiner, in geradlinig begrenzte Flächenstücke) zerlegen kann, versucht man den Flächeninhalt zunächst *anzunähern,* indem man das Flächenstück durch Rechtecke auszuschöpfen versucht und dann den Fehler untersucht. Diese Methode des *Ausschöpfens* wurde bereits von *Archimedes* zur Bestimmung der Kreisfläche und damit der Zahl $\pi$ verwendet.

Das folgende, systematische Vorgehen geht auf den Mathematiker Bernhard Riemann (1826–1866) zurück. Gegeben ist eine Funktion $f$ (deren Graph die *Randkurve* des Flächenstücks bildet) sowie ein Intervall $I = [a, b]$ $(a < b)$, wodurch die anderen geradlinigen Berandungen gegeben sind (siehe die obige Skizze). Wir unterteilen das uns interessierende Flächenstück in $n$ (schmale) Streifen, wobei $n$ irgendeine natürliche Zahl ist. Eine solche Unterteilung von $I$ wird festgelegt durch Auswahl von $n + 1$ *Stellen* in $I$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Ein solches System von Zahlen nennen wir eine *Zerlegung* $\mathcal{Z}$ des Intervalls. Die dadurch entstehenden $n$ Teilintervalle

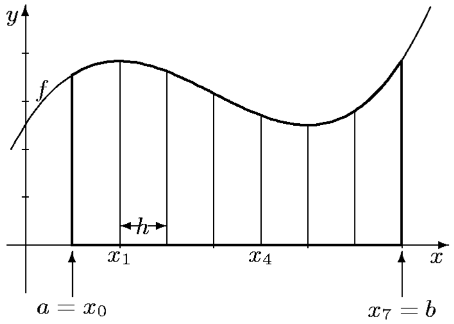
$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, \ldots, n)$$

haben die jeweilige Breite $h_k = x_k - x_{k-1}$. Als Maß für die *Feinheit* der Zerlegung wählen wir die größte auftretende Breite $h_k$ eines der Teilintervalle $I_k$, und bezeichnen sie mit $h(\mathcal{Z})$.

Von besonderem Interesse sind die *äquidistanten* Zerlegungen, bei denen alle $h_k$ einander gleich sind: $h_k = h$. Für diese gilt dann bei $n$ Streifen

$$\begin{aligned} \text{Streifenbreite:} \quad & h = \frac{b-a}{n}\,, \\ \text{Zerlegungsstellen:} \quad & x_k = a + kh \ (k = 0, \ldots, n)\,. \end{aligned}$$

Die folgende Skizze veranschaulicht ein Beispiel einer solchen Zerlegung in gleichlange Teilintervalle. Dabei ist $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$, $n = 7$ und $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$. Die interessierende Gesamtfläche ist mit dickerer Strichstärke umrandet.

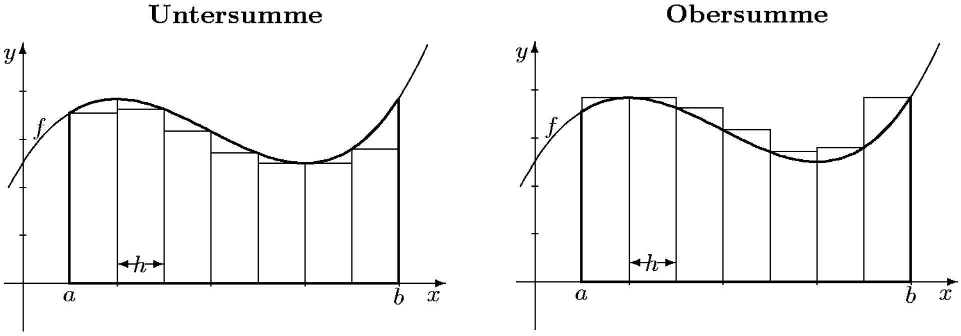



LS,p.126 **c. Ober- und Untersummen.** Man versucht nun den Flächeninhalt einzuschachteln durch die sog. Ober- und Untersummen. Um diese zu definieren, muss die Funktion $f$ über dem ganzen Intervall $I = [a, b]$ *definiert* und dort *beschränkt* sein, d. h. ihre *Werte* müssen zwischen einer oberen und einer unteren Schranke liegen. Wir betonen, dass die Funktion insbesondere auch an den Randstellen $a$ und $b$ definiert sein muss!

In unseren nachfolgenden Formulierungen werden wir jedoch der Einfachheit halber mehr voraussetzen: Der Graph soll über dem interessierenden Bereich $I = [a, b]$ nicht unterbrochen sein. Dies bedeutet, dass die Funktion $f$ über dem Intervall $I = [a, b]$ *stetig* sein soll. Mit geringen Modifikationen bleiben die Aussagen allgemein gültig. Wo dies nicht der Fall ist, wird die Stetigkeit ausdrücklich gefordert.

Ebenfalls der Einfachheit halber beschränken wir uns im folgenden soweit wie möglich auf äquidistante Zerlegungen.

Untersummen: Man bildet aus jedem Streifen ein möglichst großes Rechteck, das ganz in dem Bereich zwischenm Graph und $x$-Achse liegt, so dass also sämtliche Rechtecke zusammen vollständig im dick umrandeten Flächenstück enthalten sind (siehe Skizze). Die Höhe des jewei-




ligen Rechtecks wird bestimmt durch den *kleinsten* Wert, den die Funktion $f$ im Bereich des entsprechenden Teilintervalls $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ annimmt. Wir bezeichnen diesen kleinsten *Wert* im $k$-ten Streifen mit $f(\underline{z}_k)$. Dabei gibt $\underline{z}_k$ (lesen Sie: 'z Unterstrich k') eine *Stelle* im Intervall $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ an, an der die Funktion $f$ diesen kleinsten Wert erreicht.

Die Summe der Flächeninhalte der so gebildeten $n$ Rechtecke ist dann die sog. *Untersumme* $U_n(f)$ von $f$ zu $n$ gleich breiten Streifen:

$$U_n(f) = hf(\underline{z}_1) + hf(\underline{z}_2) + \ldots + hf(\underline{z}_n) = h \cdot (f(\underline{z}_1) + f(\underline{z}_2) + \ldots + f(\underline{z}_n)) .$$

Sie ist also ein Produkt aus der Streifenbreite $h = \frac{b-a}{n}$ multipliziert mit einer Summe von $n$ Funktionswerten, und zwar für jedes der $n$ Teilintervalle der *kleinste Funktionswert* darin.

Obersummen: Hier geht man analog vor, nur bildet man nun aus jedem Streifen ein Rechteck, das den Bereich zwischen Graph und $x$-Achse vollständig *umfasst,* dessen obere Begrenzung also *oberhalb* des Graphen liegt (siehe obige Skizze rechts).

Die Höhe des jeweiligen Rechtecks wird bestimmt durch den *größten* Wert, den die Funktion $f$ im Bereich des entsprechenden Teilintervalls $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ annimmt. Wir bezeichnen diesen *größten* Wert im $k$-ten Streifen mit $f(\overline{z}_k)$. Dabei gibt $\overline{z}_k$ (lesen Sie: 'z überstrichen k') eine *Stelle* im Intervall $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ an, an der die Funktion $f$ diesen größten Wert erreicht.

Die Summe der so gebildeten $n$ Rechtecksflächen ist dann die sog. *Obersumme* $O_n(f)$ von $f$ zu $n$ gleichbreiten Streifen:

$$O_n(f) = hf(\overline{z}_1) + hf(\overline{z}_2) + \ldots + hf(\overline{z}_n) = h \cdot (f(\overline{z}_1) + f(\overline{z}_2) + \ldots + f(\overline{z}_n)) .$$

Sie ist also wieder ein Produkt aus der Streifenbreite $h = \frac{b-a}{n}$ multipliziert mit einer Summe von ebenfalls $n$ Funktionswerten, nur eben diesmal für jedes der $n$ Teilintervalle der *größte Funktionswert.*

Aufgrund dieser Definition und den einleitend genannten Grundprinzipien jeglicher Flächenberechnung (insbesondere der so selbstverständlichen Eigenschaft 4.) gilt nun die folgende Beziehung für den gesuchten Flächeninhalt $A$ des dick umrandeten Flächenstücks in obiger Skizze.

$$U_n(f) \leq A \leq O_n(f) \quad \text{für alle } n. \tag{1}$$

Diese Beziehung bedeutet eine Einschachtelung des gesuchten Flächeninhalts $A$ zwischen explizit berechenbare Werte. (Es sei angemerkt, dass diese Beziehung nicht nur für äquidistante Zerlegungen gilt: Untersummen sind generell höchstens und Obersummen mindestens so groß wie der Flächeninhalt $A$.)

**d. Das Integral.** Dass man nun aus dieser *Einschachtelung* des Flächenwertes eine präzise Bestimmung von $A$ gewinnen kann, beruht auf den folgenden Überlegungen. Verfeinert man eine Intervallzerlegung $\mathcal{Z}$ etwa durch Halbierung aller Intervalle, so wächst die Untersumme und die Obersumme fällt. Zusammen mit (1) ergibt dies:

$$U_n(f) \leq U_{2n}(f) \ \leq A \leq \ O_{2n}(f) \leq O_n(f) . \tag{2}$$

Begründung: Zerlegt man ein Intervall in zwei Teilintervalle, so müssen die Werte der Funktion auf den zwei neugebildeten Teilintervallen natürlich mindestens so groß sein wie der kleinste Wert für das gesamte Intervall; die Untersumme kann also nicht absinken. Entsprechend kann die Obersumme nicht anwachsen.

Anmerkung: Für diese Argumentation ist entscheidend, dass man von einer gegebenen Zerlegung zu einer *feineren* Zerlegung übergeht, indem man nur *neue* Stellen *hinzufügt.* Man kann auf diese Weise etwa $U_n$ mit $U_{2n}$ oder $U_{3n}$ vergleichen, i. a. jedoch nicht $U_n$ und $U_{n+1}$.

Betrachtet man nun von $U_1(f)$ ausgehend die durch Halbierung entstehende Untersummenfolge, so ist diese monoton wachsend:

$$U_1(f) \leq U_2(f) \leq U_4(f) \leq U_8(f) \leq \ldots \leq U_{2^n}(f) \leq \ldots .$$

Da sie gemäß (1) außerdem auch noch beschränkt ist, muss sie konvergieren! Dasselbe gilt sinngemäß für die monoton fallende Obersummenfolge. Für die in $\mathbb{R}$ existierenden Grenzwerte gilt dann (wiederum nach (1))

$$\lim_{n\to\infty} U_{2^n}(f) \leq A \leq \lim_{n\to\infty} O_{2^n}(f)\,. \tag{3}$$

Man erkennt nun: Haben Unter- und Obersummenfolgen *denselben* Grenzwert, so ist dieser gerade der gesuchte Flächeninhalt$A$. Dies ist der Grund für folgende Definition:

**Definition:** Eine über einem Intervall $I$ definierte und beschränkte Funktion $f$ heißt über $I$ *integrierbar,* wenn die durch fortgesetzte Halbierung entstehenden Ober- und Untersummenfolgen denselben Grenzwert haben:

$$\boxed{f \text{ integrierbar} \iff \lim_{n\to\infty} U_{2^n}(f) = \lim_{n\to\infty} O_{2^n}(f).}$$

Man definiert dann das *Integral* als den gemeinsamen Grenzwert:

$$\boxed{\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U_{2^n}(f) = \lim_{n\to\infty} O_{2^n}(f).}$$

Lesen Sie: *Integral der Funktion $f$ in den Grenzen von $a$ bis $b$* oder etwas kürzer *Integral von $a$ bis $b$ $f(x)\,dx$.*

LS,p.130 Die Schreibweise $\int_a^b f(x)\,dx$ ist historisch gewachsen. Das Zeichen $\int$ ist ein stilisiertes $S$, das an die Summenbildung erinnern soll, und das $dx$ symbolisiert die in den Ober- und Untersummen auftretenden *Differenzen* $x_{x+1} - x_k$ von $x$-Werten. Für uns hat das $dx$ keine eigenständige Bedeutung, es ist nur Bestandteil des Integralsymbols $\int_a^b \ldots dx$. Allerdings kennzeichnet es zugleich die *Integrationsvariable* $x$; ihre Wahl ist frei: man kann jede noch nicht benutzte Variable verwenden. Die folgenden Symbole bezeichnen daher alle dasselbe Integral:

$$\boxed{\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)dt}$$

(Nicht möglich ist jedoch $\int_a^b f = \int_a^b f(b)db$, weil hier *obere Grenze* $b$ und Funktionsvariable vermischt würden.)

Ohne den technisch etwas aufwendigeren Beweis vermerken wir, dass nicht nur die durch fortgesetzte Halbierung entstehende Untersummenfolge $U_{2^n}(f)$, sondern die gesamte Untersummenfolge $U_n(f)$ konvergiert (diese braucht allerdings nicht monoton zu sein), und zwar gegen denselben Grenzwert. Um dies zu zeigen, muss man verschiedene Intervallzerlegungen 'ineinander mischen' und daher beliebige Intervallzerlegungen (nicht nur äquidistante) betrachten. Der Beweis zeigt dann sogar, dass die Untersummenfolgen zu beliebigen Intervallzerlegungen $\mathcal{Z}_n$ konvergieren, wenn nur deren maximale Intervallbreite $h(\mathcal{Z}_n)$ gegen 0 strebt. Der Grenzwert ist dann immer derselbe.

Gleiche Aussagen gelten für Obersummen. Wenn also für *eine* Zerlegungsfolge Ober- und Untersummen denselben Grenzwert haben, so gilt dies für *alle* Zerlegungsfolgen $\mathcal{Z}_n$:

**Satz:** *Ist $f$ im oben definierten Sinne über $I = [a, b]$ integrierbar, so gilt allgemein für die vollständige Unter- und Obersummenfolge:*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U_n(f) = \lim_{n\to\infty} O_n(f)\,.$$

*Das Integral ist der gemeinsame Grenzwert der Ober- und der Untersummen.*

Es gilt sogar noch mehr. In Verallgemeinerung der Ober- und Untersummen kann man auch *beliebige* Zwischenstellen $z_k$ im $k$-ten Streifen (nicht notwendig Stellen minimaler oder maximaler Werte) betrachten, etwa die jeweilige Mitte $z_k$ des Intervalls $I_k$. Nach erfolgter Wahl der Zwischenstellen $z_k$ definiert man dann (in Analogie zu Unter- und Obersummen) die zugehörige *Riemann-Summe*[1]:

$$\boxed{\text{Riemannsumme: } R_n(f) = \frac{b-a}{n}\cdot(f(z_1) + f(z_2) + \ldots + f(z_n)).}$$

Da die Funktionswerte $f(z_k)$ zwischen den minimalen und maximalen Werten von $f$ in dem jeweiligen Intervall liegen, liegt die Riemannsumme $R_n(f)$ zwischen der Unter- und Obersumme der zugehörigen Intervallzerlegung: $U_n(f) \leq R_n(f) \leq O_n(f)$.

Ist nun die Funktion $f$ über $I$ integrierbar, so haben $U_n(f)$ und $O_n(f)$ denselben Grenzwert $\int_a^b f$, nach dem Schachtelungssatz muss dann auch die dazwischen liegende Riemann-Summe $R_n(f)$ gegen das Integral konvergieren und man erhält den folgenden umfassenden Satz:

LS,p.130 **Satz:** Ist $f$ im oben definierten Sinne über $I = [a, b]$ integrierbar, so sind alle Riemannsummen $R_n(f)$ konvergent mit dem Integral $\int_a^b f$ als gemeinsamem Grenzwert.

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} R_n(f)\,.$$

Das Integral ist der gemeinsame Grenzwert aller Riemannsummen.

**e. Integrierbare Funktionen.** Wir wollen nun Beispiele für integrierbare Funktionen kennenlernen. Um eine Funktion $f$ über einem Intervall $I = [a, b]$ *integrieren* zu können, muss zunächst einmal die Funktion an *allen* Stellen des Integrationsintervalles $I = [a, b]$ definiert sein, insbesondere auch an den Randstellen $a$ und $b$! Um die Ober- bzw. Untersummen bilden zu können, muss die Funktion über dem Intervall $I$ *beschränkt* sein.

Da die Ober- bzw. Untersummenfolge bereits als konvergent nachgewiesen ist, ist die entscheidende Forderung bei der Integrierbarkeit die *Gleichheit* der beiden *Grenzwerte.* Dies kann man dann auch folgendermaßen charakterisieren:

**Bemerkung:** Eine beschränkte Funktion $f$ über einem Intervall $I$ ist genau dann *integrierbar,* wenn die Differenz von Ober- und Untersummen den Grenzwert 0 hat:

$$\boxed{f \text{ integrierbar} \iff \lim_{n\to\infty}(O_n(f) - U_n(f)) = 0\,.}$$

[1] Im Lehrbuch *Zerlegungssumme,* an anderen Stellen auch *Produktsumme* von $f$ genannt.

Eine erste, zugleich aber auch weitgehende Antwort auf die Frage nach Beispielen integrierbarer Funktionen ist der folgende Satz.

**Satz:** Jede über einem Intervall $I = [a, b]$ definierte und dort monotone Funktion $f$ ist integrierbar.

$$\boxed{\text{Monotone Funktionen sind integrierbar.}}$$

Es gilt genauer für äquidistante Ober- und Untersummen:

$$O_n(f) - U_n(f) = \frac{b-a}{n} \cdot |f(b) - f(a)| \,. \tag{4}$$

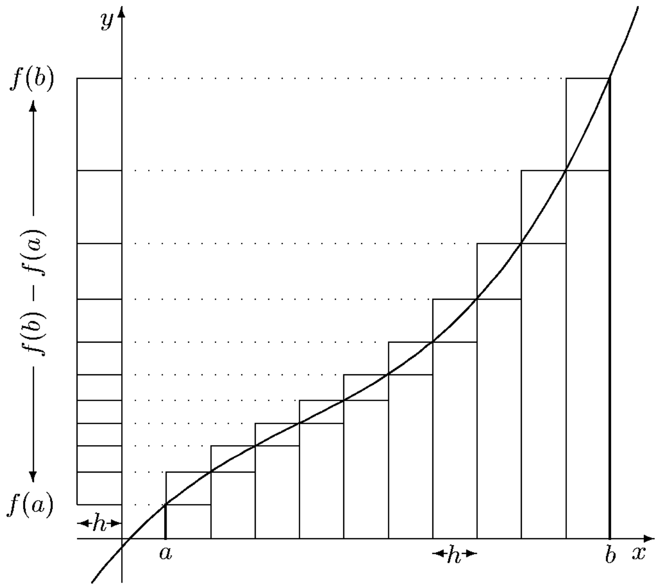
*Beweis:* Es genügt den Zusatz zu beweisen, denn dann ist die Differenz von Ober- und Untersumme eine Nullfolge ($n$ im Nenner, alle anderen Größen sind konstant!)

Sei für den Beweis von (4) die Funktion $f$ über dem Intervall $I = [a, b]$ monoton wachsend. Dies bedeutet für jedes Teilintervall $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ einer Zerlegung $\mathcal{Z}$, dass der kleinste Funktionswert am linken Rand $x_{k-1}$ und der größte Wert am rechten Rand $x_k$ des Teilintervalls $I_k$ erreicht wird. Also gilt mit den obigen Bezeichnungen $f(\underline{z}_k) = f(x_{k-1})$ und $f(\overline{z}_k) = f(x_k)$ und folglich

$$U_n(f) = h(f(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})) \quad \text{und} \quad O_n(f) = h(f(x_1) + \ldots + f(x_n)) \,.$$

Bildet man die Differenz, so fallen die übereinstimmenden Summanden heraus und es ergibt sich

$$O_n(f) - U_n(f) = h \cdot (f(x_n) - f(x_0)) = h \cdot (f(b) - f(a)) \,.$$




Die nebenstehende Skizze veranschaulicht das obige Resultat für monoton steigende Funktionen. Der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme ist der Flächeninhalt der Rechtecke, die vom Graphen durchschnitten werden. Schiebt man diese Rechtecke (wie Bauklötze) zusammen, so erhält man das an der $y$-Achse skizzierte Rechteck. Wegen der Monotonie überlappen sich diese Rechtecke nicht. Die Breite des 'zusammengeschobenen' Rechtecks ist die Streifenbreite $h$ und die Höhe ist gerade $f(b) - f(a)$, so dass dieses Rechteck den Flächeninhalt $h \cdot (f(b) - f(a))$ hat.

Für eine monoton fallende Funktion erhält man entsprechend

$$O_n(f) - U_n(f) = h \cdot (f(a) - f(b)) \,.$$

In jedem Falle erhält man die obige Formel und damit die Integrierbarkeit von $f$.

Neben den monotonen sind die stetigen Funktionen die zweite wichtige Klasse integrierbarer Funktionen:

**Satz:** Jede über einem Intervall $I = [a, b]$ definierte und dort stetige Funktion $f$ ist integrierbar über $I$.

$$\boxed{\text{Stetige Funktionen sind integrierbar.}}$$

Die Stärke dieses Satzes (dass er nämlich für *alle* noch so komplizierten stetigen Funktionen gilt) werden wir nicht benötigen, da die Funktionen, die uns im Schulunterricht begegnen, abschnittsweise monoton sind und daher nach unserem obigen Resultat integrierbar. Stetige Funktionen, die nicht in monotone Stücke zerlegt werden können, werden wir im Unterricht nicht betrachten[1)].

[1)] Aber es gibt sie: $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ mit der stetigen Ergänzung $f(0) = 0$.

**g. Näherungswerte für Integrale.** Die Formel (4) des vorangehenden Abschnittes ist auch von eigenständiger Bedeutung, da sie angibt, wie weit ein gesuchter Integralwert von einer explizit berechenbaren Unter- bzw. Obersumme abweichen kann.

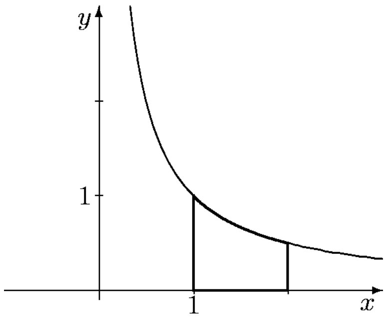
**Folgerung:** (Integralabschätzung für monotone Funktionen) *Es sei $f$ über dem Intervall $I = [a, b]$ monoton. Dann weichen die Obersumme $O_n(f)$ und die Untersumme $U_n(f)$ vom wahren Wert des Integrals $\int_a^b f$ höchstens um den Fehler*

$$\frac{b-a}{n} \cdot |f(b) - f(a)|$$

*ab. Man kann also das Integral näherungsweise durch die Ober- bzw. Untersumme berechnen und dabei den maximal möglichen Fehler genau angeben.*

Wichtig ist dabei, dass dieser maximal mögliche Fehler unmittelbar und einfach bestimmt werden kann, und zwar *vor* der aufwendigeren Berechnung der Unter- oder Obersummen. Man kann auf diese Weise ermitteln, welche Untersumme $U_n(f)$ man berechnen muss, um das Integral mit einer bestimmten Genauigkeit zu approximieren.

**1. Beispiel:** Berechnung von $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ mit einem maximalen Fehler von $\frac{1}{10}$.




Die nebenstehende Skizze zeigt einen Teil des Graphen von $f(x) = \frac{1}{x}$. Das zu berechnende Integral ist der Flächeninhalt des dick umrandeten Flächenstücks. Berechnet man die Untersumme $U_n(f)$, so weicht diese vom Integralwert höchstens um

$$\frac{b-a}{n} \cdot (f(a) - f(b)) = \frac{1}{n} \cdot (f(1) - f(2)) = \frac{1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2n}\,.$$

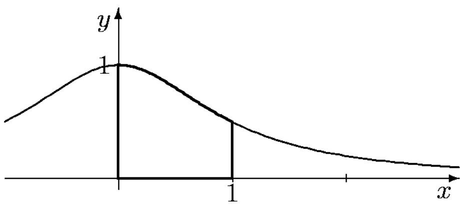
ab. Soll dieser Fehler höchstens $\frac{1}{10}$ betragen, so muss man $\frac{1}{2n} \le \frac{1}{10} \iff 5 \le n$ wählen. Wir berechnen nun $U_5(f)$. Da $f$ im Integrationsbereich monoton fällt, wird in jedem Streifen der kleinste Funktionswert am rechten Rand angenommen: $f(\underline{z}_k) = f(x_k)$.

Es ist $n = 5$, $h = \frac{1}{5}$, $x_k = a + kh = 1 + \frac{k}{5} = \frac{5+k}{5}$, $f(x_k) = \dfrac{1}{x_k} = \dfrac{5}{5+k}$ und daher

$$U_5(f) = h \cdot \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} \frac{5}{5+k} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = 0{,}645634921\,.$$

Wir erhalten also: Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ liegt zwischen 0,645 und 0,746.

**2. Beispiel:** Berechnung von $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ mit einem maximalen Fehler von $\frac{1}{10}$.




Die nebenstehende Skizze zeigt den Verlauf des Graphen von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (Analyse des Funktionsverlaufs zur Übung!). Das zu berechnende Integral ist der Flächeninhalt des dick umrandeten Flächenstücks. Berechnet man die Untersumme $U_n(f)$, so weicht diese vom Integralwert höchstens um

$$\frac{b-a}{n} \cdot (f(a) - f(b)) = \frac{1}{n} \cdot (f(0) - f(1)) = \frac{1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2n}\,.$$

ab. Soll dieser Fehler höchstens $\frac{1}{10}$ betragen, so muss man $\frac{1}{2n} \le \frac{1}{10} \iff 5 \le n$ wählen. Wir berechnen nun $U_5(f)$. Da $f$ im Integrationsbereich monoton fällt, wird in jedem Streifen der kleinste Funktionswert am rechten Rand angenommen: $f(\underline{z}_k) = f(x_k)$.

Es ist $n = 5$, $h = \frac{1}{5}$, $x_k = kh = \frac{k}{5}$, $f(kh) = \dfrac{1}{1 + k^2h^2} = \dfrac{1}{1 + \frac{k^2}{5^2}} = \dfrac{5^2}{5^2 + k^2}$ und daher

$$U_5(f) = h \cdot \sum_{k=1}^{n} f(kh) = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{5} \frac{25}{25 + k^2} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{25}{26} + \frac{25}{29} + \frac{25}{34} + \frac{25}{41} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}7337315285$$

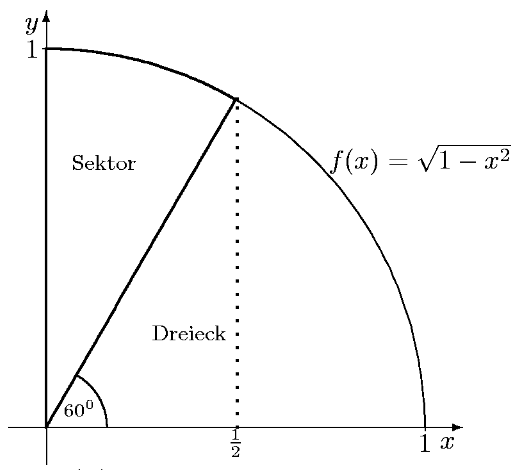
Wir erhalten also: Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$ liegt zwischen 0,733 und 0,834.

**3. Beispiel:** Berechnung des Flächeninhalts eines Viertelkreises vom Radius 1 mit einem maximalen Fehler von $\frac{1}{100}$.

Der Einheitskreis wird beschrieben durch die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2 = 1$ (Satz des Pythogoras), also gilt für den Viertelkreis im I. Quadranten $y = \sqrt{1 - x^2}$. Wir betrachten daher die Funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ und wählen $a = 0$ und $b = 1$. $f$ ist monoton fallend. Gemäß obiger Folgerung ist daher die Abweichung zwischen Untersumme und Integral höchstens

$$\frac{b - a}{n} \cdot (f(a) - f(b)) = \frac{1}{n}$$

Damit dieser Fehler höchstens $\frac{1}{100}$ beträgt, müssen wir $n \geq 100$ wählen. Berechnet man also $U_{100}$, so ist der Flächeninhalt des Viertelkreises um höchstens 0,01 größer.




Mit folgender Überlegung kann man den Rechenaufwand etwas reduzieren. Wir berechnen nur das Integral $\int_0^{\frac{1}{2}} f$ (siehe Skizze). Daraus kann man folgendermaßen die Viertelkreisfläche ermitteln: Der eingezeichnete Winkel ist tatsächlich $60^0$ (weil $\cos(60^0) = \frac{1}{2}$ ist). Damit ist das dick umrandete Flächenstück ein Kreissektor von $30^0$, also ein Drittel des Viertelkreises. Der Flächeninhalt dieses Sektors ergibt sich aus dem Integral $\int_0^{\frac{1}{2}} f$, indem man die Dreiecksfläche $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{8}\sqrt{3}$ subtrahiert:

$$A_{\text{Sektor}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\, dx - \frac{1}{8} \cdot \sqrt{3}\,.$$

Bei der Approximation des Integrals durch eine Untersumme $U_n(f)$ ist der maximale Fehler dann beschränkt durch

$$\frac{\frac{1}{2} - 0}{n} \cdot (f(1) - f(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2n} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right) \leq \frac{0{,}134}{2n} = \frac{0{,}067}{n}\,.$$

Der Genauigkeitsgewinn gegenüber dem ersten Ansatz mit $\int_0^1 f$ beruht zum einen darauf, dass $b - a = \frac{1}{2}$ hier nur halb so groß ist, aber vor allem darauf, dass $f(a) - f(b) = 1 - \sqrt{\frac{3}{4}} \leq 0{,}134$ weniger als ein Siebtel des entsprechenden Wertes beim ersten Ansatz beträgt. Allerdings wird dieser Genauigkeitsgewinn wieder etwas dadurch reduziert, dass wir nur ein Drittel der Viertelkreisfläche bestimmen; wir benötigen also bei der Integralberechnung eine Genauigkeit von $0{,}01/3 = \frac{1}{300}$. Wir müssen daher $n$ so wählen, dass

$$\frac{0{,}067}{n} \leq \frac{1}{300} \iff 21 \leq n$$

ist. Statt 100 braucht man nun nur 21 Summanden zu berechnen.

$$U_{21} = h \cdot (f(x_1) + \ldots + f(x_{21})) = h \cdot \sum_{k=1}^{21} f(kh)$$

mit $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{2\cdot 21} = \dfrac{1}{42}$, $x_k = k\cdot h$ und $f(kh) = f(\frac{k}{42}) = \sqrt{1-\dfrac{k^2}{42^2}} = \dfrac{1}{42}\cdot\sqrt{42^2-k^2}$.
Insgesamt ergibt dies

$$U_{21} = \frac{1}{42^2}\cdot\sum_{k=1}^{21}\sqrt{42^2-k^2}\,.$$

Diese Summe ist mit einiger Geduld sogar mit einem Taschenrechner berechenbar; etwas weniger mühselig ist die Benutzung von Derive:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{21}\sqrt{42^2-k^2}\\
&= 41{,}98809355 + 41{,}95235392 + 41{,}89272013 + 41{,}80908992 + 41{,}70131892+\\
&\quad + 41{,}56921938 + 41{,}41255848 + 41{,}23105625 + 41{,}02438299 + 40{,}79215610+\\
&\quad + 40{,}53393639 + 40{,}24922359 + 39{,}93745109 + 39{,}59797974 + 39{,}23009049+\\
&\quad + 38{,}83297567 + 38{,}40572873 + 37{,}94733192 + 37{,}45664160 + 36{,}93237062 + 36{,}37306695\\
&= 840{,}8697465
\end{aligned}$$

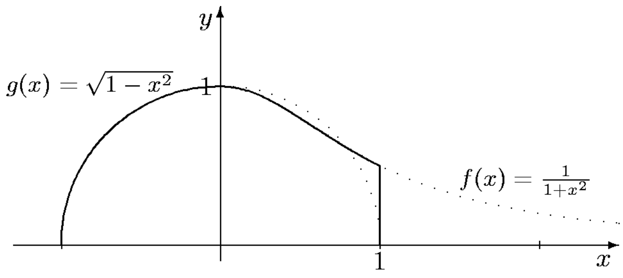
Also

$$\begin{aligned}
U_{21} &= \frac{840{,}8697465}{42^2} = 0{,}4766835297\,,\\
U_{\text{Sektor}} &= U_{21} - \frac{1}{8}\sqrt{3} = 0{,}4766835297 - 0{,}2165063509 = 0{,}2601771788\,,\\
U_{\text{Viertelkreis}} &= 3\cdot U_{\text{Sektor}} = 0{,}7805315364\,.
\end{aligned}$$

Dabei steht $U$ jeweils für den aus der Untersumme gewonnenen Näherungswert für den entsprechenden Flächeninhalt. Damit liegt der Wert der Viertelkreisfläche (vom Radius 1) zwischen 0,7805315364 und dem um 0,01 größeren Wert 0,7905315364.

Einige kritische Anmerkungen zum Schluss: Wir haben hier bei der Berechnung der Untersummen Quadratwurzeln der Einfachheit halber mit einem Rechner ermittelt und die Werte als exakt verwendet. Dies ist natürlich streng genommen nicht korrekt, da auch dies nur Näherungswerte sind. Man müsste also die Fehlerabschätzung noch ein wenig genauer durchführen, indem man bei jeder Wurzelberechnung den Fehler kontrolliert und aufaddiert. Auf diese Weise ergäbe sich ein leicht größerer Wert für den maximal möglichen Gesamtfehler als die geforderten 0,01.

**Hinweis:** Man kann zeigen, dass die im 2. und 3. Beispiel zu berechnenden Integrale *exakt* gleich sind. Geometrisch bedeutet dies, dass in nebenstehender Skizze die beiden Flächenstücke rechts und links der $y$-Achse *exakt* denselben Flächeninhalt haben (ohne deckungsgleich zu sein).

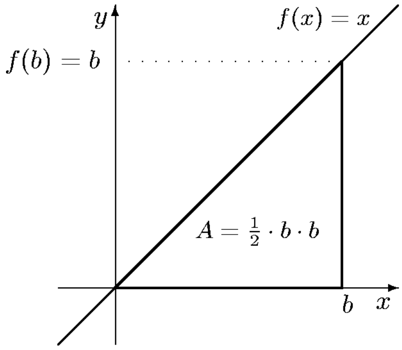


## §9 Die Berechnung von Integralen und der Hauptsatz

Wir wollen uns nun mit der exakten Berechnung von Integralen auseinandersetzen.

**a. Berechnung mittels Ober-/Untersummen.** Wenn wir auf der Basis der Definition Integrale berechnen, müssen wir Ober- oder Untersummen in Abhängigkeit von $n$ bestimmen und dann den Grenzwert für $n \to \infty$ ermitteln. In einem ersten Beispiel wollen wir ein Integral mittels Ober- und Untersummen berechnen, dessen Wert wir aufgrund elementargeometrischer Überlegungen bereits kennen.

LS,p.128 **1. Beispiel:** $f(x) = x$ und $0 = a < b$.




Gemäß der geometrischen Deutung des Integrals ist dieses Integral gerade der Flächeninhalt eines Dreiecks der Breite $b$ und der Höhe $f(b) = b$ (siehe nebenstehende Skizze) und muss daher den Wert

$$\int_0^b f = \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2$$

haben. Wir wollen dieses Integral nun einmal gemäß der Definition als Grenzwert von Obersummen berechnen.
Es ist also $a = 0$, $b > 0$. Die äquidistante Zerlegung von $I = [0, b]$ in $n$ gleich breite Streifen hat dann die Daten (s. o.)

$$\begin{aligned} \text{Streifenbreite:}\quad & h = \frac{b}{n}\,, \\ \text{Zerlegungsstellen:}\quad & x_k = kh = k \cdot \frac{b}{n}\ (k = 0, \ldots, n)\,. \end{aligned}$$

Da die Funktion $f$ monoton wächst, wird auf jedem Teilintervall $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ der kleinste Wert am linken Rand $x_{k-1}$ und der größte Wert am rechten Rand $x_k$ angenommen. Also ist der größte Wert

$$f(\overline{z}_k) = f(x_k) = x_k = kh \quad (k = 1, \ldots, n)\,.$$

Damit ist die $n$-te Obersumme

$$\begin{aligned} O_n(f) &= h(f(\overline{z}_1) + \ldots + f(\overline{z}_n)) = h(h + 2h + 3h + \ldots + nh) \\ &= h^2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{b^2}{n^2} \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n)\,. \end{aligned}$$

Mit dieser Darstellung ist noch keine Berechnung des Grenzwertes der Obersummen möglich. Zwar konvergiert der erste Faktor $b^2/n^2$ gegen 0 für $n \to \infty$, aber zugleich wächst die Summe in der Klammer unbegrenzt.

An dieser Stelle benötigt man eine Summenformel für die in der Klammer auftretende Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen. Dafür gilt

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Diese Formel kann man sich wie folgt klarmachen (Gauß-Anekdote!):

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + \ldots + & n-1 & + & n \\ + & n & + & n-1 & + & n-2 & + \ldots + & 2 & + & 1 \\ = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \ldots + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Addiert man also zweimal alle natürlichen Zahlen von 1 bis $n$, so erhält man $n$-mal den Summanden $n + 1$, also $n(n + 1)$. Davon die Hälfte ist daher die Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen.

Mit dieser Formel ergibt sich nun

$$O_n(f) = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n}\,.$$

Nach den Grenzwertsätzen gilt

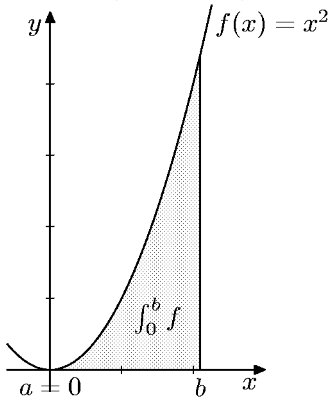
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1\,.$$

(Wiederholen Sie die Berechnung der Grenzwerte im Unendlichen für rationale Funktionen!) Damit erhalten wir insgesamt

$$\int_0^b x\,dx = \lim_{n\to\infty} O_n(f) = \frac{b^2}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{b^2}{2}\,.$$

Dieses Ergebnis ist im Einklang mit der elementargeometrischen Berechnung des Integrals.

LS,p.129 **2. Beispiel:** $f(x) = x^2$ und $a = 0 < b$.




Hier berechnen wir erstmals den exakten Flächeninhalt eines krummlinig begrenzten Flächenstücks. Wir können die obigen Zerlegungsdaten $h = \frac{b}{n}$ und $x_k = k \cdot h$ weiterverwenden. Außerdem ist auch diese Funktion über dem Integrationsintervall $[0, b]$ monoton wachsend, also gilt wieder $f(\overline{z}_k) = f(x_k) = f(kh)$. Für $f(x) = x^2$ bedeutet dies dann $f(\overline{z}_k) = f(kh) = (kh)^2$, also

$$\begin{aligned} O_n(f) &= h \cdot (h^2 + (2h)^2 + \ldots + (nh)^2) \\ &= h^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2)\,. \end{aligned}$$

Hier benötigt man nun eine Summationsformel für die Summe der ersten $n$ Quadratzahlen:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Mit dieser Formel ergibt sich dann

$$O_n(f) = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\,.$$

Der letzte Bruch stellt in Abhängigkeit von $n$ eine rationale Funktion dar mit gleichem Zähler- und Nennergrad. Also ist der Quotient der führenden Koeffizienten der Grenzwert für $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{2}{1} = 2$$

und damit

$$\int_0^b f = \lim_{n\to\infty} O_n(f) = \frac{b^3}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3} b^3\,.$$

Damit haben wir eine erste Flächenformel für ein krummlinig begrenztes Flächenstück:

$$\boxed{\int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3} b^3.}$$

In gleicher Weise erhält man unter Verwendung der Summationsformel für dritte Potenzen $\sum_{k=1}^{n} n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ die Integrationsformel $\int_0^b x^3\,dx = \frac{1}{4} b^4$. Damit haben wir für die ersten Potenzfunktionen folgende Integrationsformeln für $b > 0$:

$$\boxed{\int_0^b 1\,dx = b\,, \quad \int_0^b x\,dx = \frac{1}{2} b^2\,, \quad \int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3} b^3\,, \quad \int_0^b x^3\,dx = \frac{1}{4} b^4.}$$

(Dabei ergibt sich die erste Formel als Flächenformel für ein Rechteck der Breite $b$ und der Höhe 1.)

**b. Erste Integrationsregeln.** Wir wollen in diesem Abschnitt einige allgemeine Integrationsregeln kennenlernen, mit deren Hilfe man Integrale zerlegen und auf einfachere zurückführen kann.

LS,p.224 **Satz:** (Intervalladditivität) *Ist $a < b < c$, so ist jede Funktion $f$, die über den Intervallen $[a, b]$ und $[b, c]$ integrierbar ist, auch über $[a, c]$ integrierbar und es gilt*

$$\boxed{\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.}$$

Die Formel ist für Funktionen mit positiven Werten geometrisch unmittelbar einsichtig. Will man den Satz für beliebige Funktionen und einschließlich der Integrierbarkeitsaussage beweisen, betrachtet man Zerlegungen der beiden Teilintervalle und fügt diese zu einer Zerlegung des Gesamtintervalls zusammen. Dabei ist man dann gezwungen nicht nur äquidistante, sondern allgemeinere Intervallzerlegungen zu betrachten.

Die obige Relation bleibt sogar bei *beliebiger* Lage der drei Integrationsgrenzen $a, b, c$ gültig,
LS,p.222 wenn man folgende Vereinbarung trifft:

$$\boxed{\int_a^b f = -\int_b^a f.}$$

Diese Definition ist verständlich, wenn man einmal die Formel für äquidistante Untersummen betrachtet, in der der Faktor $h = \frac{b-a}{n}$ auftritt. Wenn hier nun die Rollen von $a$ und $b$ vertauscht werden, ändert sich das Vorzeichen. Wir werden später mit der Integralformel (S. 71) ein weiteres Argument dafür kennenlernen, dass diese Ausdehnung der Integraldefinition sinnvoll ist!

Die weiteren Integrationsregeln betreffen die Abhängigkeit des Integrals von der zu integrierenden Funktion (dem *Integranden).*

LS,p.224 **Satz:** Sind $f, g$ zwei integrierbare Funktion über dem Intervall $[a, b]$ und ist $c \in I\!R$ eine Konstante, so sind auch $cf$ und $f + g$ integrierbar und es gelten die

$$\boxed{\text{Faktorregel:} \quad \int_a^b cf(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx,}$$

$$\boxed{\text{Summenregel:} \quad \int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.}$$

Um dieses allgemeine Resultat zu beweisen, gehen wir auf die Definition zurück und untersuchen die Ober- und Untersummen bzw. allgemein beliebige Riemannsummen. Wir berechnen für beliebige Intervallzerlegungen $\mathcal{Z}$ und Zwischenstellen $z_k$ die Riemannsummen:

$$\begin{aligned}
R_n(cf) &= \sum_{k=1}^{n} cf(z_k) \cdot h = c \cdot \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \cdot h = c \cdot R_n(f)\,, \\
R_n(f \pm g) &= \sum_{k=1}^{n} (f(z_k) \pm g(z_k)) \cdot h = \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \cdot h \pm \sum_{k=1}^{n} g(z_k) \cdot h \\
&= R_n(f) \pm R_n(g)\,.
\end{aligned}$$

Eine Riemannsumme zu $f + g$ ist also die Summe der Riemannsummen zu $f$ und zu $g$; entsprechend für die Differenz und Vielfache.

Nun konvergieren für die integrierbaren Funktionen $f$ und $g$ alle Riemannsummen gegen das zugehörige Integral. Mit Hilfe der Grenzwertsätze folgt also aus den obigen Beziehungen sofort:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(cf) = c \cdot \lim_{n\to\infty} R_n(f) = c \cdot \int_a^b f\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f \pm g) = \lim_{n\to\infty} R_n(f) \pm \lim_{n\to\infty} R_n(g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g\,.$$

Also haben alle Riemannsummen $R_n(cf)$ denselben Grenzwert $c \cdot \int_a^b f$. Dies bedeutet, dass $cf$ integrierbar ist mit

$$\int_a^b cf = \lim_{n\to\infty} R_n(cf) = c \cdot \int_a^b f\,.$$

Ebenso folgt die Summenregel.

Abschließend sei in diesem Abschnitt noch die folgende *Abschätzung* für Integrale genannt.

LS,p.225 **Satz:** Sind $a < b$ und $f, g$ integrierbar über dem Intervall $I = [a, b]$, so gilt:

$$\boxed{f(x) \le g(x) \text{ für } a \le x \le b \implies \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.}$$

Daraus erhält man (sogar für beliebige $a \neq b$):

$$\boxed{s \le f(x) \le S \implies s \;\le\; \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \;\le\; S.}$$

Begründung: Mit den obigen Regeln erhält man

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^b D(x)\,dx\,.$$

Die Differenzfunktion $D(x) = g(x) - f(x)$ nimmt über $I$ keine negativen Werte an, also ist auch jede Untersumme von $D$ größer oder gleich 0. Dann kann auch das Integral, das ja der Grenzwert der Untersummen ist, nicht negativ sein:

$$D(x) \ge 0 \quad \text{für alle } x \in I \implies \int_a^b D(x)\,dx \;\ge 0\,.$$

Damit ist die erste Abschätzung bewiesen.

Wendet man diese erste Abschätzung auf $s \le f(x) \le S$ an, so erhält man für $a < b$:

$$s(b-a) = \int_a^b s\,dx \;\le\; \int_a^b f(x)\,dx \;\le\; \int_a^b S\,dx = S(b-a)$$

Nach Division durch $b - a$ ($> 0!$) ergibt sich die zweite Abschätzung. Ist nun $b < a$, so gilt entsprechend $s \le \dfrac{1}{a-b} \displaystyle\int_b^a f \le S$, woraus wegen

$$\frac{1}{a-b} \cdot \int_b^a f = \frac{(-1)}{b-a} \cdot (-1) \int_a^b f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

die Behauptung auch in diesem Fall folgt.

**c. Integralfunktionen und der Hauptsatz.** Dieser Satz ist das zentrale Resultat der Differential- und Integralrechnung. Er stellt eine überraschende Verbindung her zwischen zwei scheinbar völlig verschiedenen Fragestellungen und Konzepten. Auf der einen Seite die Differentialrechnung, die den Begriff der *Steigung* von Kurven und darauf aufbauend die Untersuchung von Funktionsverläufen zum Thema hat, und auf der anderen Seite die Integralrechnung, deren zentraler Begriff der *Flächeninhalt* ist.

Um den Hauptsatz formulieren zu können, betrachten wir das Integral $\int_a^b f$ einer Funktion $f$ ebenfalls als Funktion, und zwar in Abhängigkeit von der oberen Grenze. Um zu betonen, dass wir die obere Grenze als Funktionsvariable betrachten, bezeichnen wir diese mit $x$. Man muss dann aber die Integrationsvariable anders benennen.

LS,p.132 **Definition:** Ist $f$ über einem Intervall $I$ integrierbar und $a \in I$, so definiert man die Integralfunktion (zum Integranden $f$ und Startwert $a$)

$$\boxed{\text{Integralfunktion } J_a(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,dt}$$

Beachten Sie, dass diese Integralfunktion nicht nur für $x > a$, sondern auch für $x < a$ definiert ist: $\int_a^x f = -\int_x^a f$. Und für $x = a$ gilt

$$J_a(x) = \int_a^a f = 0\,.$$

Insbesondere haben Integralfunktionen also immer eine Nullstelle, und zwar beim Startwert $a$.

Der zentrale Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt nun:

LS,p.137 **Hauptsatz:** Ist eine Funktion $f$ definiert und *stetig* über einem Intervall $I$, so ist jede Integralfunktion $J_a$ von $f$ über dem Intervall $I$ $(a \in I)$ differenzierbar und ihre Ableitung ist die Ausgangsfunktion $f$:

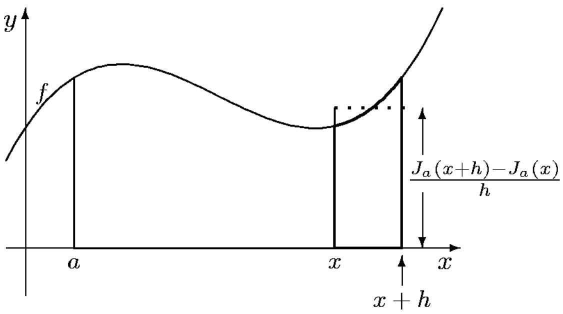
$$\boxed{J_a'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in I.}$$

Beweis: Da eine Integralfunktion $J_a$ durch einen neuen, komplizierten Prozess definiert ist, können wir zu ihrer Ableitung keine der bekannten Ableitungsregeln nutzen; wir müssen auf die Definition zurück: Die Ableitung ist Grenzwert der Differenzenquotienten. Dies bedeutet hier:

$$J_a'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{J_a(x+h) - J_a(x)}{h}\,.$$

Um den Hauptsatz zu beweisen, muss man also zeigen, dass dieser Grenzwert für jedes $x$ genau $f(x)$ ist.

Wir wollen vor dem eigentlichen Beweis die geometrische Grundidee in folgender spezieller Situation verdeutlichen: $f$ habe nur positive Werte und es sei $a < x < x + h$. Dann kann man die Differenz $J_a(x+h) - J_a(x)$ geometrisch veranschaulichen als den Flächeninhalt des nebenstehend skizzierten Streifens zwischen $x$-Achse und Graph. Den Differenzenquotient $\frac{J_a(x+h)-J_a(x)}{h}$ erhält man dann, indem man den Flächeninhalt dieses Streifens durch $h$, d. h. durch seine Breite dividiert. Dieser Quotient gibt also die Höhe eines flächengleichen Rechtecks an (siehe Skizze).




Wenn nun die Streifenbreite $h$ gegen 0 strebt, muss wegen der Stetigkeit von $f$ die Höhe des skizzierten Rechtecks gegen $f(x)$ streben:

$$\lim_{h\to 0} \frac{J_a(x+h) - J_a(x)}{h} = f(x).$$

Da diese geometrischen Überlegungen nur für eine spezielle Konstellation ($f(x) > 0$, $a < x < x+h$) gültig sind, wollen wir nun einen allgemeingültigen Beweis führen. Er basiert auf den Integrationsregeln aus dem vorangehenden Abschnitt. Aufgrund der Intervalladditivität gilt

$$J_a(x+h) - J_a(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^{x} f = \int_x^{x+h} f \,.$$

Also ist der Differenzenquotient darstellbar als

$$\frac{J_a(x+h) - J_a(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f \,.$$

Ist nun $s = f(\underline{z})$ das Minimum der Funktionswerte von $f$ über dem Intervall von $x$ bis $x+h$ und $S = f(\overline{z})$ das entsprechende Maximum ($x \leq \underline{z}, \overline{z} \leq x+h$), so gilt gemäß der Abschätzungsformel (S. 68):

$$f(\underline{z}) = s \;\leq\; \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f \;\leq\; S = f(\overline{z})\,.$$

Wegen $x \leq \underline{z}, \overline{z} \leq x+h$ müssen die Stellen $\underline{z}$ und $\overline{z}$ gegen $x$ streben, wenn $h$ gegen 0 strebt. Wegen der Stetigkeit von $f$ ergibt sich dann: $f(\underline{z}) \to f(x)$ und $f(\overline{z}) \to f(x)$. Da also beide Schranken gegen denselben Grenzwert $f(x)$ streben, muss nach dem Schachtelungssatz (siehe S. 13) auch der dazwischen eingezwängte Differenzenquotient konvergieren, und sein Grenzwert ist dann ebenfalls $f(x)$:

$$\begin{array}{lccccc} & f(\underline{z}) & \leq & \dfrac{J_a(x+h) - J_a(x)}{h} & \leq & f(\overline{z}) \\ \text{für } h \to 0: & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & f(x) & \leq & J_a'(x) & \leq & f(x) \end{array}$$

Also $J_a'(x) = f(x)$ und der Hauptsatz ist bewiesen.

**d. Stammfunktionen und die Integralformel.** Eine wichtige Konsequenz des Hauptsatzes ist die folgende, äußerst effektive Methode zur Berechnung von Integralen mittels Stammfunktionen.

LS,p.134 **Definition:** Unter einer Stammfunktion einer Funktion $f$ versteht man eine differenzierbare Funktion $F$, deren Ableitung $f$ ist:

$$\boxed{F \text{ ist Stammfunktion von } f \iff F' = f.}$$

**Hinweis:** Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, so sind alle Funktionen $F(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$ eine Konstante) ebenfalls Stammfunktionen von $f$, denn die Ableitung einer Konstanten ist 0. Also hat eine Funktion $f$ immer unendlich viele Stammfunktionen – oder gar keine. Letzteres kommt aber für die Ihnen bekannten Funktionen kaum vor, denn es gilt die **Folgerung aus dem Hauptsatz**:

$$\boxed{\text{Jede über einem Intervall } I \text{ stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion.}}$$

Dieses Resultat ist um so bemerkenswerter, als stetige Funktionen weit komplizierter sein können, als die Ihnen bisher bekannten Funktionen (die in der Regel differenzierbar sind).

Für das Folgende ist von fundamentaler Bedeutung, dass man für Funktionen über einem *Intervall* eine vollständige Übersicht über alle Stammfunktionen hat:

**Satz:** Sind $F_1$ und $F_2$ zwei über einem *Intervall* $I$ definierte Stammfunktionen *derselben* Funktion $f$, so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F_1(x) = F_2(x) + c \quad \text{für alle } x \in I\,.$$

Der *Beweis* ergibt sich unmittelbar aus einem fundamentalen Satz der Differentialrechnung: Die Differenzfunktion $F_1 - F_2$ hat die Ableitung $F_1' - F_2' = f - f = 0$, ist also über dem Intervall (!) $I$ konstant (siehe S. 33):

$$F_1(x) - F_2(x) = c \quad \text{für alle } x \in I\,.$$

Dies ist aber genau die Behauptung.

Kombiniert man nun dieses Ergebnis mit dem Hauptsatz, erhält man die folgende wichtige

LS,p.138 **Integralformel:** Es sei $I$ ein Intervall und $f$ eine stetige Funktion über $I$. Dann gilt für beliebige $a, b \in I$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \text{ für jede Stammfunktion } F \text{ von } f.}$$

*Beweis:* Nach dem Hauptsatz ist $J_a$ eine Stammfunktion von $f$ über dem Intervall $I$. Andererseits ist nach Voraussetzung $F$ ebenfalls eine Stammfunktion von $f$ über demselben Intervall $I$. Also existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$J_a(x) = \int_a^x f = F(x) + c \quad \text{für alle } x \in I\,. \tag{$*$}$$

Es gilt nun nur noch $c$, die sog. *Integrationskonstante* zu bestimmen. Dazu beachten wir, dass Integralfunktionen immer eine Nullstelle haben, nämlich

$$J_a(a) = \int_a^a f = 0\,.$$

Indem wir $(*)$ für $x = a$ auswerten, erhalten wir

$$0 = F(a) + c\,, \quad \text{also} \quad c = -F(a)\,,$$

und damit

$$\int_a^x f = F(x) - F(a) \quad \text{für alle } x \in I\,.$$

Indem man $x = b$ setzt erhält man schließlich die behauptete Integralformel.

In den Übungen haben wir eine Vielzahl von Beispielen für die Effektivität dieser Integralformel kennengelernt. Bei der Anwendung der Integralformel muss man zunächst eine Stammfunktion $F$ für den Integranden $f$ finden und diese dann an den Integrationsgrenzen auswerten. Dabei haben wir die folgende Schreibweise verwendet:

$$\boxed{\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

LS,p.134 **e. Elementare Methoden zur Bestimmung von Stammfunktionen.** Die Berechnung von Integralen auf diesem Wege steht und fällt mit der Kenntnis oder Ermittlung von Stammfunktionen zu gegebenen Funktionen. Da es sich dabei um den zur Ableitung umgekehrten Prozess handelt, kann man aus Ableitungsregeln immer auch Regeln zur Ermittlung von Stammfunktionen gewinnen. Erste Beispiele sind

**Satz:** (Stammfunktionen für Potenzfunktionen) Für $n \in \mathbb{R}$, $n \neq -1$ gilt:

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \text{ ist ein Stammfunktionsterm für } f(x) = x^n.}$$

**Satz:** (Stammfunktionsregeln) Wir setzen voraus, dass $F, G$ Stammfunktionen für $f, g$ sind. Dann gelten die folgenden Regeln für Stammfunktionen:

a) Summenregel:

$$\boxed{F \pm G \text{ ist Stammfunktion von } f \pm g.}$$

b) Faktorregel: Für beliebige Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{cF \text{ ist Stammfunktion von } cf.}$$

c) Lineare Substitutionsregel: Für $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ gilt:

$$\boxed{\frac{1}{m}F(mx+n) \text{ ist ein Stammfunktionsterm für } f(mx+n).}$$

Aufgrund der Regeln a),b) kann man für alle ganzrationalen Funktionen unmittelbar eine Stammfunktion angeben und dann mit der Integralformel entsprechende Integrale problemlos berechnen:

**Folgerung:** *Ist* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ *eine ganzrationale Funktion, so ist durch*

$$F(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x$$

*eine Stammfunktion von* $f$ *gegeben.*

Man *beweist* alle diese Behauptungen, indem man die vorgebliche Stammfunktion ableitet und feststellt, dass sich die gewünschte Funktion ergibt. Generell ist der *Nachweis,* dass eine *vorgegebene* Funktion tatsächlich Stammfunktion ist, einfach durch Ableiten zu führen (s. o.). Viel schwieriger ist es jedoch, eine Stammfunktion zu *ermitteln.* Anders als das Ableiten führt dies bereits bei rationalen Funktionen zu erheblichen Problemen. Während die Ableitung einer rationalen Funktion stets wieder eine rationale Funktion ist (Quotientenregel), gilt bei der Suche nach Stammfunktionen nichts entsprechendes: Es gibt rationale Funktionen, die keine rationale Stammfunktion besitzen. Ganz konkret gilt:

**Satz:** *Die Funktion* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *hat über dem Intervall* $]0, \infty[$ *als Stammfunktion* $\ln(x)$, *den natürlichen Logarithmus! Über dem gesamten Definitionsbereich* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *ist eine Stammfunktion gegeben durch*

$$F(x) = \ln(|x|)\,.$$

*Beweis:* Eine der fundamentalen Eigenschaften von ln war die Ableitungsregel $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Also ist ln (definiert über $]0, \infty[$) eine Stammfunktion von $f$. Für die weitere Behauptung muss man über dem anderen Teilintervall $]-\infty, 0[$ die Funktion

$$F(x) = \ln(|x|) = \ln(-x) \quad \text{für } x < 0$$

ableiten. Dies ergibt nach der Kettenregel:

$$F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}\,.$$

Also hat das angegebene $F$ überall auf seinem Definitionsbereich $I\!D_F = I\!R \setminus \{0\}$ die gewünschte Ableitung $F'(x) = \frac{1}{x}$.

**Warnung:** Nicht alle Stammfunktionen von $f(x) = \frac{1}{x}$ sind von der Form $\ln(|x|) + c$ ($c \in I\!R$). Auch $G(x) = \ln(|x|) + \operatorname{sign}(x)$ ist eine Stammfunktion von $f$, ohne dass $G(x) - F(x) = \operatorname{sign} x$ über dem Definitionsbereich $D_f = D_F = I\!R \setminus \{0\}$ konstant ist. Die Ursache dafür ist, dass hier der Definitionsbereich *kein Intervall* ist! (Der Satz über den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Stammfunktionen einer Funktion (siehe S. 71) gilt nur über Intervallen!)

**f. Substitution.** Oft entsteht eine Funktion aus einer einfacheren, indem man für die Funktionsvariable einen Term einsetzt (*substituiert*). So entsteht etwa $e^{x^2+x}$ aus $e^z$ durch die Substitution $z = x^2 + x$. Die Substitutionsregel gibt an, unter welchen Umständen und wie man für solche komplizierteren Funktionen eine Stammfunktion finden kann.

**Substitutionsregel:** *Ist $u$ eine differenzierbare Funktion und $g$ eine stetige Funktion, so gilt:*

$$\boxed{\int_a^b g(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(z)\,dz.}$$

*Beweis:* Sei $G$ eine Stammfunktion von $g$. Dann gilt gemäß der Kettenregel:

$$G(u(x))' = G'(u(x)) \cdot u'(x) = g(u(x)) \cdot u'(x)\,.$$

Damit ist durch $G(u(x))$ also eine Stammfunktion für $g(u(x))u'(x)$ gegeben und mit der Integralformel folgt daraus:

$$\int_a^b g(u(x))u'(x)dx = \Big[G(u(x))\Big]_a^b = G(u(b)) - G(u(a)) = \Big[G(z)\Big]_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} g(z)\,dz\,.$$

Dies ist aber genau die Behauptung.

Die *Anwendung* der Substitutionsregel ist leider nicht so einfach wie der obige Beweis. Geeignete Substitutionen $z = u(x)$ zu finden, bei denen ein kompliziertes Integral einfacher wird, ist eine Kunst und als solche Folge umfangreicher Übung und Erfahrung. Für uns soll zunächst das folgende Vorgehen ausreichen:
Will man die Substitutionsregel zur Berechnung eines Integrals $\int_a^b f$ verwenden, versucht man den Integranden $f(x)$ in der Form $f(x) = u'(x) \cdot g(u(x))$ darzustellen. Man sucht also in dem zu integrierenden Funktionsterm $f(x)$ einen Teilterm $u(x)$, dessen *Ableitung* $u'(x)$ ebenfalls darin auftritt. Durch den Vergleich $f(x) = g(u(x))u'(x)$ ermittle man $g$ und für $g$ dann eine Stammfunktion $G$.
Beispiel: $f(x) = xe^{x^2}$.
Mit $u(x) = x^2$, also $u'(x) = 2x$, nimmt dieser Funktionsterm die Form $f(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{2}e^{u(x)}$ an. Durch Vergleich mit $f(x) = u'(x) \cdot g(u(x))$ kann man dann auch die Funktion $g$ ablesen: $g(z) = \frac{1}{2}e^z$. Die Substitutionsregel liefert nun eine Stammfunktion für $u'(x)g(u(x))$, *wenn eine Stammfunktion $G$ für $g$ bekannt ist.* Durch die Substitutionsregel erfolgt eine Verlagerung des Problems von der Ausgangsfunktion $f(x) = xe^{x^2}$ auf die (einfachere) Funktion $g(z) = \frac{1}{2}e^z$, für die natürlich $G(z) = \frac{1}{2}e^z$ eine Stammfunktion ist. Damit ist $G(u(x)) = \frac{1}{2}e^{u(x)} = \frac{1}{2}e^{x^2}$ eine Stammfunktion der ursprünglich gegebenen Funktion $f$.

**Tip:** Wenn man mit Hilfe der Substitutionsregel eine Stammfunktion für einen Integranden gefunden hat, sollte man in jedem Falle dieses Ergebnis durch Ableiten überprüfen! Nach erfolgreicher Überprüfung ist die gesamte Herleitung unwichtig. Hier etwa: $\frac{1}{2}e^{x^2}$ hat als Ableitung gemäß der Kettenregel: $\frac{1}{2}e^{x^2} \cdot 2x = xe^{x^2}$.

Besonders wichtige Integraltypen, die mit der Substitutionsregel berechnet werden können, sind $\int \frac{u}{u'}$ und $\int uu'$. Konkrete Beispiele für diese Typen sind $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$ und $\int \sin x \cdot \cos x\, dx$.

$$\boxed{\ln(|u(x)|) \text{ ist eine Stammfunktion für } \frac{u'(x)}{u(x)}.}$$

$$\boxed{\tfrac{1}{2}u^2(x) \text{ ist eine Stammfunktion für } u(x)\cdot u'(x).}$$

Zum *Nachweis* braucht man nur die angegebenen Stammfunktionen mit der Kettenregel abzuleiten.

**Warnung:** Wenn man die erste Regel zur Berechnung eines Integrals $\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx$ verwenden will, beachte man, dass $\frac{u'}{u}$ über dem Integrationsintervall $[a, b]$ vollständig definiert sein muss, insbesondere muss $u$ dort überall differenzierbar sein und *es darf keine Nullstelle von $u$ zwischen $a$ und $b$ liegen!* Erst wenn dies gesichert ist, gilt

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)} = \ln(|u(b)|) - \ln(|u(a)|) = \ln \frac{|u(b)|}{|u(a)|} = \ln \left|\frac{u(b)}{u(a)}\right|.$$

Wenn aber $u$ im Intervall $[a, b]$ keine Nullstelle hat, müssen $u(b)$ und $u(a)$ dasselbe Vorzeichen haben ($u$ ist stetig) und folglich ist $\frac{u(b)}{u(a)}$ positiv, also $\left|\frac{u(b)}{u(a)}\right| = \frac{u(b)}{u(a)}$. Insgesamt folgt also:

$$\boxed{u \text{ nullstellenfrei über } [a,b] \implies \int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \ln \frac{u(b)}{u(a)}.}$$

**g. Partielle Integration.** Diese Regel ergibt sich aus der Produktregel für die Ableitung; statt partieller Integration spricht man daher auch von *Produktintegration.*

**Partielle Integration:** *Sind $u, v$ differenzierbare Funktionen über dem Intervall $[a, b]$, so gilt:*

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)\, dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\, dx\,.}$$

Diese Regel ergibt sich aus der Produktregel: Wegen $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ ist durch $u(x)v(x)$ eine Stammfunktion für $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ gegeben, also

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\, dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b.$$

Mit der Summenregel für Integrale folgt hieraus die Behauptung.

Der Name *partielle* Integration erklärt sich daraus, dass diese Integrationsregel keine vollständige Berechnung des Integrals einer Produktfunktion zulässt, sondern nur eine partielle. Das Problem wird vom Integral der Funktion $u'v$ auf das Integral der Funktion $uv'$ verlagert. Dennoch kann in vielen Fällen die partielle Integration erfolgreich zur vollständigen Berechnung von Integralen führen.

Die *Anwendung* der partiellen Integration ist nicht so problematisch wie bei der Substitution. Man muss den Integranden so in Faktoren zerlegen, dass man für einen Faktor (hier $u'$ genannt) eine Stammfunktion (hier $u$) kennt. Man verlagert dann das Problem von der Berechnung von $\int u'v$ auf die Berechnung von $\int uv'$. Dieses Integral muss man dann weiter untersuchen. Zum Beispiel:

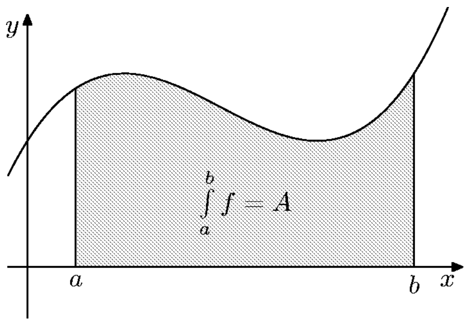
$$\begin{aligned}
\int_a^b \underbrace{x}_{u'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\, dx &= \Big[\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u(x)} \underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\Big]_a^b - \int_a^b \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\, dx \\
&= \Big[\frac{x^2}{2}\ln(x)\Big]_a^b - \int_a^b \frac{x}{2}\, dx = \Big[\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\Big]_a^b.
\end{aligned}$$

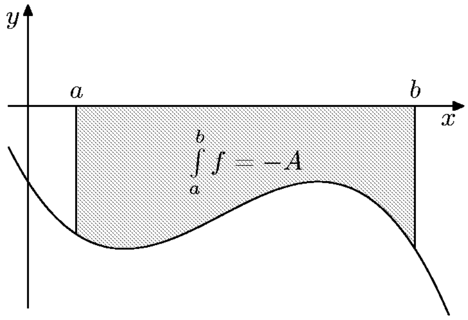
Auf die gleiche Weise lassen sich alle Integrale der Form $\int_a^b x^n \ln(x)\,dx$ mit Hilfe der partiellen Integration vollständig bestimmen: Man wähle jeweils $u'(x) = x^n$ und $v(x) = \ln(x)$. (Was ergibt sich für $n = 0$?)

Ein anderer wichtiger Anwendungstyp sind die Integrale $\int\limits_a^b x^n e^x\,dx$ (siehe Übungen (5)).

## §10 Fläche, Volumen, Bogenlänge

**a. Flächen zwischen Graph und $x$-Achse.** Unsere Einführung des Integrals in §9 orientierte sich am Problem der Flächenberechnung. Dabei hatten wir die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der $x$-Achse in den Grenzen von $a$ bis $b$ betrachtet. Wir hatten gesehen (siehe S. 59), dass dieser Flächeninhalt gleich dem Integral $\int_a^b f$ ist. Allerdings hatten wir bei der Herleitung benutzt, dass $a < b$ ist und die Funktion $f$ über dem Integrationsintervall $I = [a, b]$ ausschließlich Werte $\geq 0$ hat (siehe nachfolgende Skizze links). Dadurch war sichergestellt, dass Unter- bzw. Obersummen als Summen von Rechtecksflächen interpretiert werden konnten und ihr gemeinsamer Grenzwert gleich dem Flächeninhalt $A$ ist. Hat $f$ *ausschließlich* Werte $\leq 0$, so sind für $a < b$ auch alle Ober- und Untersummen und das Integral $\int_a^b f \leq 0$. In diesem Falle gibt das Integral dann gerade das Negative des Flächeninhalts $A$ an (siehe rechte Skizze).




Wir fassen zusammen:
**Bemerkung:** Haben die Funktionswerte von $f$ im Integrationsintervall $I = [a, b]$ ein einheitliches Vorzeichen, so ist das Integral $\int_a^b f$ gleich dem Flächeninhalt $A$ des Flächenstücks zwischen Graph und $x$-Achse in den Grenzen von $a$ bis $b$, versehen mit dem entsprechenden Vorzeichen von $f$.

$$\boxed{\int\limits_a^b f = \begin{cases} +A & \text{falls } f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in I = [a, b], \\ -A & \text{falls } f(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in I = [a, b]. \end{cases}}$$

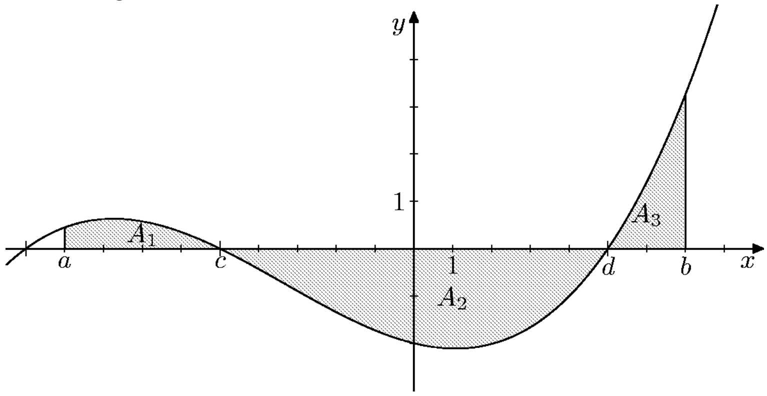
**Warnung:** Flächeninhalte sind immer positiv, Integrale können auch negativ sein!

Wir können nun diese Tatsache umkehren zu einer Methode, Flächeninhalte durch Integrale zu berechnen. Für Funktionen, die im Integrationsintervall ihr Vorzeichen *nicht* ändern, ist der Flächeninhalt $A$ bis auf das Vorzeichen gleich dem Integral, also:

Für Funktionen, die im Intervall zwischen $a$ und $b$ definiert sind und dort ihr Vorzeichen *nicht* ändern, ist der Flächeninhalt $A$ der Fläche zwischen dem Graphen von $f$ und der $x$-Achse im Bereich zwischen $a$ und $b$ gleich dem Betrag des Integrals:

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| .$$

Will man für beliebige Funktionen diesen Flächeninhalt berechnen, so muss man das Intervall zwischen $a$ und $b$ in einzelne Abschnitte unterteilen, in denen $f$ das Vorzeichen nicht ändert (in der nachfolgenden Skizze die Intervalle $[a,c]$, $[c,d]$ und $[d,b]$) und darauf dann die obige Formel anwenden. Die Grenzen dieser Abschnitte sind die Vorzeichenwechselstellen von $f$ im Intervall $[a,b]$. Mit den Bezeichnungen der Skizze ist dann der Flächeninhalt $A$ zwischen dem Graphen




von $f$ und der $x$-Achse in den Grenzen von $a$ bis $b$

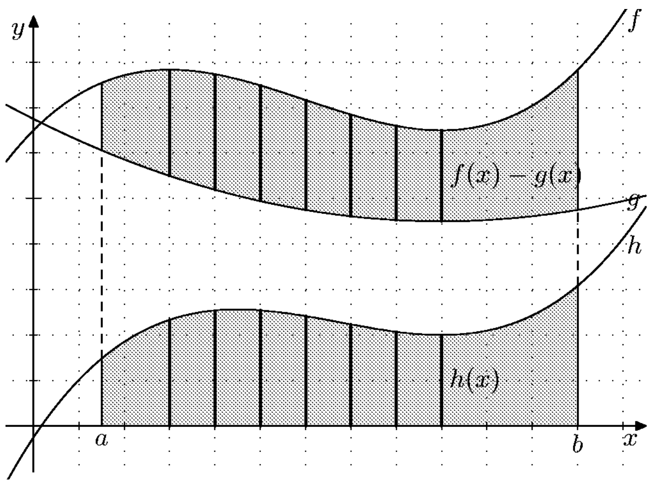
$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \Big|\int_a^c f\Big| + \Big|\int_c^d f\Big| + \Big|\int_d^b f\Big| .$$

Wir fassen zusammen:

> Um die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion $f$ und der $x$-Achse in gegebenen Grenzen $a, b$ zu bestimmen, muss man also:
> 1. Die Nullstellen von $f$ mit Vorzeichenwechsel im Innern von $[a,b]$ ermitteln.
> 2. Von Nullstelle zu Nullstelle bzw. Rand integrieren.
> 3. Die Beträge der ermittelten Integrale addieren.

**b. Flächen zwischen Graphen.** Wir wollen nun allgemeiner Flächen zwischen zwei Graphen berechnen. Wir werden sehen, dass sich dieses Problem auf das soeben gelöste zurückführen lässt. Es gilt nämlich der folgende

> **Satz:** Sind $f$ und $g$ zwei integrierbare Funktionen über dem Intervall zwischen $a$ und $b$, so ist die Fläche zwischen ihren Graphen in den Grenzen von $a$ bis $b$ genauso groß wie die Fläche zwischen dem Graphen der Differenzfunktion $h = f - g$ und der $x$-Achse in denselben Grenzen.

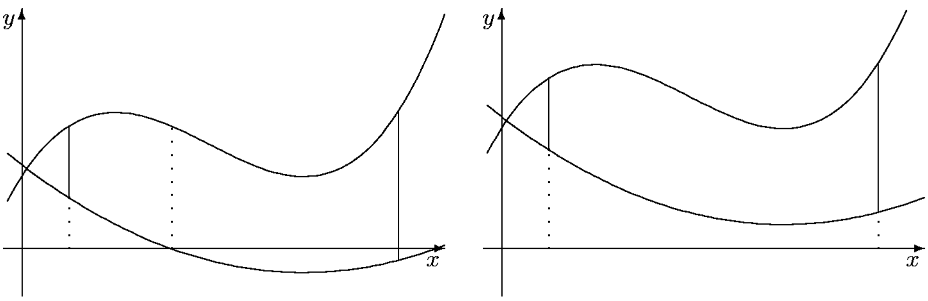



Dieses Resultat ist ein Spezialfall des *Cavalierischen Prinzips,* demzufolge zwei Flächenstücke gleichen Inhalt haben, wenn an allen Stellen die Querschnitte durch die Flächenstücke gleich lang sind. Dies ist hier natürlich der Fall, da die oberen Querschnittstrecken die Länge $f(x) - g(x)$ haben und dies gerade gleich $h(x)$ ist.

Beweis: Zunächst unterteilen wir das Integrationsintervall in Teilintervalle, in denen $f - g$ sein Vorzeichen nicht wechselt. In jedem dieser Abschnitte verläuft dann eine der Funktionen ständig oberhalb der anderen, etwa $f$ oberhalb von $g$ wie in obiger Skizze. Unter diesen Umständen ist die gesuchte Fläche $A$ zwischen beiden Graphen gerade die Differenz $\int_a^b f - \int_a^b g$ zweier Integrale und aufgrund der Summenregel für Integrale gilt dann:

$$A \underset{(*)}{=} \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g) = \int_a^b h \quad \text{falls } f(x) \geq g(x) \text{ über } [a,b].$$

Dabei ist $(*)$ geometrisch unmittelbar einsichtig, wenn – wie in obiger Skizze – $g$ keine negativen Werte hat. Aber auch wenn $g$ sein Vorzeichen ändert (siehe unten links), bleibt die Beziehung $(*)$ gültig. Um dies zu erkennen, verschiebt man *beide* Funktionsgraphen gemeinsam so weit nach

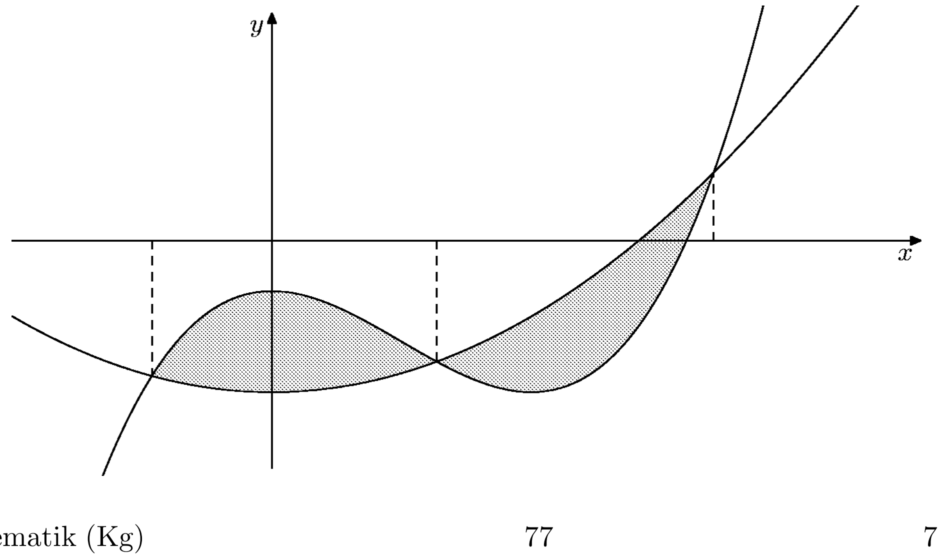



oben, dass im betrachteten Bereich beide Funktionen oberhalb der $x$-Achse verlaufen. Bei einer solchen Verschiebung ändern sich weder die eingeschlossene Fläche noch die Differenzfunktion $f-g$, also auch nicht deren Integral. Man kann daher stets die im rechten Bild skizzierte Situation erreichen, in der wir die obige Beziehung $(*)$ und damit den Satz bewiesen hatten.

Durch diesen Satz ist die Berechnung der Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen $f, g$ zurückgeführt auf die oben beschriebene Berechnung der Fläche zwischen einem Graphen (dem der Differenzfunktion $h = f - g$) und der $x$-Achse:

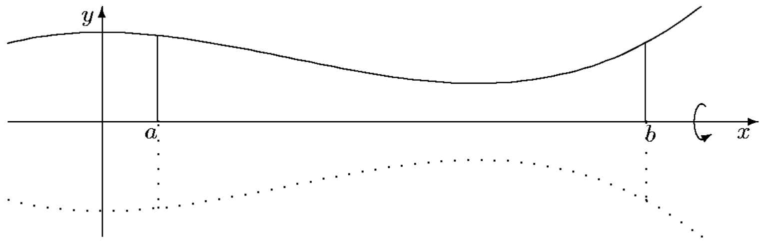
| |
|---|
| Um die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen $f, g$ in vorgegebenen Grenzen $a, b$ zu bestimmen, muss man also:<br>1. Die Differenzfunktion $h = f - g$ bilden.<br>2. Für $h(!)$ die Nullstellen mit Vorzeichenwechsel im Bereich $[a, b]$ ermitteln.<br>3. Die Funktion $h$ von Nullstelle zu Nullstelle bzw. Rand integrieren.<br>4. Die Beträge der ermittelten Integrale addieren. |

Schließlich wollen wir noch die Fläche ermitteln, die von zwei Graphen *eingeschlossen* wird. Darunter versteht man den Bereich, der *rundum* von den Graphen begrenzt wird, also den Bereich zwischen den beiden Graphen vom ersten bis zum letzten Schnittpunkt.



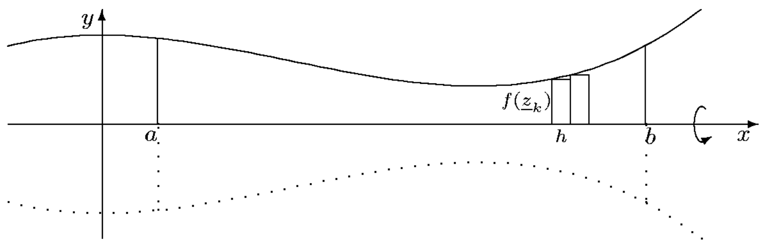
Um die von zwei Funktionsgraphen *eingeschlossene* Fläche zu bestimmen, muss man also:
1. Die Differenzfunktion $h = f - g$ bilden.
2. Für $h$ sämtliche Nullstellen ermitteln.
3. Von Nullstelle zu Nullstelle integrieren.
4. Die Beträge der ermittelten Integrale addieren.

**c. Volumina von Rotationskörpern.** Nicht nur Flächen, sondern auch Volumina kann man durch Integrale berechnen. Wir wollen hier sog. Rotationskörper betrachten. Sie entstehen




durch *Rotation* einer Fläche *um die x-Achse*. Wir wollen das Volumen des sich ergebenden Rotationskörpers bestimmen, wenn das rotierende Flächenstück in den Grenzen von $a$ bis $b$ durch den Graphen einer stetigen Funktion $f$ begrenzt ist.

Um dieses Volumen zu bestimmen, schöpft man den Rotationskörper durch die Rotationskörper zu Untersummen aus. Deren Volumen ist berechenbar, denn es setzt sich aus lauter 'Scheiben' zusammen, deren Höhe gerade die Breite $h$ der Intervalle ist und deren Radius der entsprechende Funktionswert $f(\underline{z}_k)$ ($\underline{z}_k$ jeweils eine Stelle in einem der Streifen). Eine solche



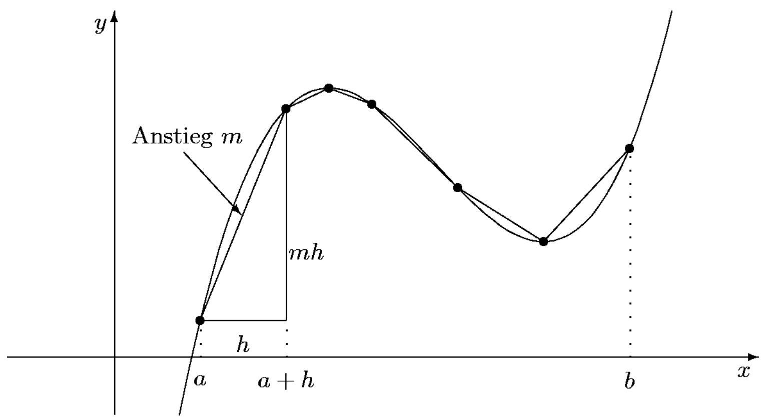

Scheibe ist ein Zylinder der Höhe $h$ mit dem Grundkreisradius $f(\underline{z}_k)$, das Volumen beträgt also

$$\pi \cdot (f(\underline{z}_k))^2 \cdot h\,.$$

Summiert man nun diese Volumina für sämtliche Streifen der Unterteilung auf, so erhält man gerade eine Untersumme für das Integral $\int_a^b \pi \cdot (f(x))^2\,dx$. Für $n \to \infty$ bzw. $h \to 0$ konvergieren die Untersummen dann gegen dieses Integral, das damit das gesuchte Volumen darstellt:

$$\boxed{\text{Rotationsvolumen:} \qquad V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx.}$$

**d. Die Bogenlänge.** Aber auch zur Berechnung der Länge von Kurvenstücken kann man das Integral verwenden. Das Kurvenstück sei als Graph einer Funktion $f$ in den Grenzen von $a$ bis $b$ gegeben. Zur Berechnung unterteilen wir es durch Zwischenpunkte und verbinden diese durch Geradenstücke (*Sehnen*), wie in der Skizze angegeben.




Die Länge einer einzelnen Sehne berechnen wir mit Hilfe des Satzes des Pythagoras wie folgt: Hat die waagerechte Kathete die Länge $h$, so hat die senkrechte die Länge $m \cdot h$, wenn $m$ der *Anstieg der Sehne* ist. Also ist die Länge der Sehne

$$l_{\text{Sehne}} = \sqrt{h^2 + (mh)^2} = h \cdot \sqrt{1+m^2}\,, \ m \text{ der Sehnenanstieg}\,.$$

Man kann nun zeigen (siehe den nachfolgenden Mittelwertsatz), dass der Sehnenanstieg $m$ im $k$-ten Streifen zugleich auch Tangentenanstieg von $f$ *an einer gewissen Zwischenstelle* $z_k$ in dem Streifen ist, also die Sehnenlänge folgende Form annimmt:

$$l_{\text{Sehne}} = h \cdot \sqrt{1 + (f'(z_k))^2}\,.$$

Summiert man nun alle diese Längen auf, so erhält man eine Riemannsumme $R_n$ für die Funktion $\sqrt{1+(f'(x))^2}$. Man definiert daher die Bogenlänge als den Grenzwert für $h \to 0$ dieser Riemannsummen. Dies ist aber gerade das zugehörige Integral (wenn es existiert):

$$\boxed{\text{Bogenlänge:} \quad l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.}$$

**Mittelwertsatz**

…**der Integralrechnung:** *Ist $f$ eine stetige Funktion über $[a,b]$, so gilt*

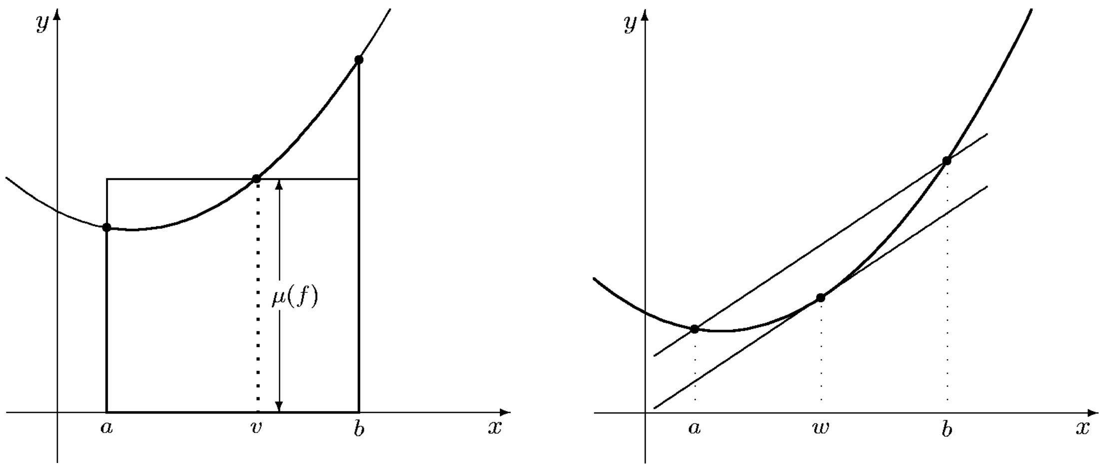
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(v)\cdot(b-a) \quad \textit{für ein passendes } v \in [a,b].}$$

…**der Differentialrechnung:** *Ist $f$ eine Funktion mit stetiger Ableitung über $[a,b]$, so gilt:*

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(w) \quad \textit{für ein passendes } w \in [a,b].}$$

Die nachfolgenden Skizzen veranschaulichen beide Aussagen. Das Rechteck in der linken Skizze hat den Flächeninhalt $f(v)\cdot(b-a)$. Dieser stimmt mit dem Inhalt des dick umrandeten Flächenstücks unter dem Graphen von $f$ überein. Man nennt den Wert $f(v)$ den *Mittelwert* von $f$ über dem Intervall von $a$ bis $b$:

$$\boxed{\text{Mittelwert:} \qquad \mu(f) = f(v) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f}$$




Die rechte Skizze veranschaulicht den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Der Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ stellt den Anstieg der Sekante dar. Diese stimmt mit einem Ableitungswert $f'(w)$, also einem Tangentenanstieg überein. Der Mittelwertsatz besagt also:

- Jeder Sekantenanstieg ist gleich dem Anstieg der Funktion an einer Zwischenstelle; oder mit anderen Worten:
- jede Sekante verläuft parallel zu einer Tangente an den Graphen an einer Zwischenstelle.

*Beweis* der Mittelwertsätze: a) Es sei $s = f(z)$ der kleinste und $S = f(Z)$ der größte Wert von $f$ im Intervall $[a, b]$. Bei den Integralabschätzungen (siehe S. 68) hatten wir daraus bereits gefolgert

$$f(z) = s \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq S = f(Z)\,.$$

Da $f$ stetig ist, muss nach dem Zwischenwertsatz (s. S. '`zwsatz`') auch der zwischen $f(z)$ und $f(Z)$ liegende Mittelwert $\mu(f)$ ein Funktionswert von $f$ sein:

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(v) \quad \text{für ein geeignetes } v \in [a, b]\,.$$

Dies ergibt den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

b) Der zweite Mittelwertsatz wird mit dem Hauptsatz auf den ersten zurückgeführt. Die Funktion $f$ ist eine Stammfunktion von $f'$, also folgt aus der Integralformel:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$

Damit ergibt sich nun unter Anwendung von a) auf $f'$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f'(x)\,dx = f'(w) \quad \text{für ein } w \in [a, b]\,.$$