Übungen (3)

Exponentialfunktionen

1) Stammfunktionen: S. 86, Aufgabe 10; S. 94, Aufgabe 4

10.
Gib eine Stammfunktion F von f an.

a) $f(x)=e^x$ **b)** $f(x)=e^{x+1}$ **c)** $f(x)=e^{2x}$ **d)** $f(x)=e^{2x-3}$ **e)** $f(x)=e^{-x}$ **f)** $f(x)=e^{-3x+2}$

4.
Ermittle zu folgenden Funktionen f jeweils eine Stammfunktion F.

a) $f(x)=3e^{2x+1}$ **c)** $f(x)=-0{,}5e^{2-\frac{1}{3}x}$ **e)** $f(x)=(e^x-e^{-x})^2$

b) $f(x)=2e^{-x+1}$ **d)** $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ **f)** $f(x)=(e^x+e^{-x})^2$

2) Integrale: S. 94, Aufgabe 5; S. 86, Aufgabe 12

5.
Berechne die folgenden bestimmten Integrale.

a) $\int_1^3 2e^{3x}\,dx$ **c)** $\int_{-2}^{+3}(e^x-e^{-x})\,dx$ **e)** $\int_{-1}^{0}(e^x-x-1)\,dx$

b) $\int_{-1}^{+1}3e^{-x}\,dx$ **d)** $\int_0^1(e^{-x}+x)\,dx$ **f)** $\int_0^1(e^x-1)^2\,dx$

12.
Bestimme k so, daß das Integral den angegebenen Wert hat.

a) $\int_0^1 ke^x\,dx=e$ **b)** $\int_0^1(e^x+kx)\,dx=2$ **c)** $\int_0^k e^x\,dx=e$ **d)** $\int_0^2 ke^{kx}\,dx=e-1$

Der Logarithmus in der Integralrechnung

3) Stammfunktionen: S. 95, Aufgabe 8

8.
Bestimme zur Funktion f jeweils eine Stammfunktion F.

a) $f(x)=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x-1}$ **d)** $f(x)=\frac{2}{2x+1}-\frac{3}{3x-1}+\frac{1}{\frac{1}{2}x+1}$ **g)** $f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+2}$

b) $f(x)=\frac{1-x-x^2-x^4}{2x^2}$ **e)** $f(x)=\frac{-3x^3+\frac{1}{2}x^2-5x-3}{x^2}$ △ **h)** $f(x)=\frac{x-4}{x-5}$

c) $f(x)=\frac{1}{3(x-4)}+\frac{1}{2(x+3)}$ **f)** $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{3}{x+1}$ △ **i)** $f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$

4) Integrale: S. 93, Aufgaben 10–11

10.
Berechne das folgende Integral.

a) $\int_{-2}^{-6}\frac{1}{x}\,dx$ **b)** $\int_1^e\frac{1}{x}\,dx$ **c)** $\int_{0,5}^{2}\frac{1}{x}\,dx$ **d)** $\int_{-5}^{-1}\frac{1}{x}\,dx$ **e)** $\int_a^b\frac{1}{x}\,dx$ $(a,b>0)$ **f)** $\int_a^b\frac{1}{x}\,dx$ $(a,b<0)$

11.
Berechne mit Hilfe linearer Substitution (siehe Seite 50).

a) $\int_2^3\frac{1}{x-1}\,dx$ **b)** $\int_{-1}^{+1}\frac{3}{x+5}\,dx$ **c)** $\int_{-1}^{0}\frac{1}{3x-6}\,dx$ **d)** $\int_2^3\frac{4}{5x+10}\,dx$ **e)** $\int_{-1}^{3}\frac{-7}{-2y+8}\,dy$

Übungen (3) — Lösungen

1) **S. 86, Aufgabe 10:**

a) $F(x) = e^x$, b) $F(x) = e^{x+1}$, c) $F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}$,

d) $F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x-3}$, e) $F(x) = -e^{-x}$, f) $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-3x+2}$.

S. 94, Aufgabe 4:

a) $F(x) = 3e^{2x+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot e^{2x+1}$, b) $F(x) = 2e^{-x+1} \cdot \frac{1}{-1} = -2e^{-x+1}$,

c) $F(x) = -0{,}5e^{2-\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}} = e^{2-\frac{1}{2}x}$, d) $F(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

e) $f(x) = (e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$, $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}$,

f) $f(x) = (e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$, $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

2) **S. 94, Aufgabe 5:**

a) $\displaystyle\int_1^3 2e^{3x}\,dx = \Big[\frac{2}{3}e^{3x}\Big]_1^3 = \frac{2}{3} \cdot (e^9 - e^3) = \frac{2}{3}e^3 \cdot (e^6 - 1) \approx 5388{,}67$,

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 3e^{-x}\,dx = \Big[-3e^{-x}\Big]_{-1}^1 = -3e^{-1} + 3e = 3e - \frac{3}{e} \approx 7{,}05$,

c) $\displaystyle\int_{-2}^3 (e^x - e^{-x})\,dx = \Big[e^x + e^{-x}\Big]_{-2}^3 = (e^3 + e^{-3}) - (e^{-2} + e^2)$

$= e^3 - e^2 - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} \approx 12{,}61$,

d) $\displaystyle\int_0^1 (e^{-x} + x)\,dx = \Big[-e^{-x} + \frac{1}{2}x^2\Big]_0^1 = -e^{-1} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{e} \approx 1{,}13$,

e) $\displaystyle\int_{-1}^0 (e^x - x - 1)\,dx = \Big[e^x - \frac{1}{2}x^2 - x\Big]_{-1}^0 = 1 - (e^{-1} - \frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \approx 0{,}13$,

f) $\displaystyle\int_0^1 (e^x - 1)^2\,dx = \int_0^1 (e^{2x} - 2e^x + 1)\,dx = \Big[\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x\Big]_0^1$

$= (\frac{1}{2}e^2 - 2e + 1) - (\frac{1}{2} - 2) = \frac{e^2}{2} - 2e + \frac{5}{2} \approx 0{,}76$,

S. 86, Aufgabe 12:

a) $\displaystyle\int_0^1 ke^x\,dx = e \iff \Big[ke^x\Big]_0^1 = e \iff ke - k = e \iff k = \frac{e}{e-1} \approx 1{,}58$

b) $\displaystyle\int_0^1 (e^x + kx)\,dx = 2 \iff \Big[e^x + \frac{k}{2}x^2\Big]_0^1 = 2$

$$\iff e + \frac{k}{2} - 1 = 2 \iff k = 2(3-e) \approx 0{,}56$$

c) $\displaystyle\int_0^k e^x\,dx = e \iff e^k - 1 = e \iff k = \ln(e+1) \approx 1{,}31$

d) $\displaystyle\int_0^2 ke^{kx}\,dx = e - 1 \iff \Big[e^{kx}\Big]_0^2 = e - 1 \iff e^{2k} - 1 = e - 1$

$$\iff e^{2k} = e \iff 2k = 1 \iff k = \frac{1}{2}$$

3) **S. 95, Aufgabe 8:**

a) $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x-1} = 3x^{-1} - 2x^{-2} + (x-1)^{-1}$,

$F(x) = 3\ln|x| + 2x^{-1} + \ln|x-1| = 3\ln|x| + \dfrac{2}{x} + \ln|x-1|$,

b) $f(x) = \dfrac{1 - x - x^2 - x^4}{2x^2} = \dfrac{1}{2}(x^{-2} - x^{-1} - 1 - x^2)$,

$F(x) = \dfrac{1}{2}\cdot(-x^{-1} - \ln|x| - x - \dfrac{1}{3}x^3) = -\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}\ln|x| - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{6}x^3$,

c) $f(x) = \dfrac{1}{3(x-4)} + \dfrac{1}{2(x+3)}$, $\quad F(x) = \dfrac{1}{3}\ln|x-4| + \dfrac{1}{2}\ln|x+3|$,

d) $f(x) = \dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{3}{3x-1} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}x+1}$, $\quad F(x) = \ln|2x+1| - \ln|3x-1| + 2\ln|\dfrac{1}{2}x+1|$,

Anmerkung: Auch $F_2(x) = \ln|2x+1| - \ln|3x-1| + 2\ln|x+2|$ ist eine Stammfunktion von f. Wie erklären Sie den scheinbaren Widerspruch?

e) $f(x) = \dfrac{-3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x - 3}{x^2} = -3x + \dfrac{1}{2} - 5x^{-1} - 3x^{-2}$,

$F(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x - 5\ln|x| + \dfrac{3}{x}$,

f) $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x+1}$, $\quad F(x) = 2\ln|x| - 3\ln|x+1|$,

g) $f(x) = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{x+2}$, $\quad F(x) = 2\ln|x-1| - 3\ln|x+2|$,

h) $f(x) = \dfrac{x-4}{x-5} = 1 + \dfrac{1}{x-5}$ (notfalls Polynomdivision!),

$F(x) = x + \ln|x-5|$,

i) $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1} = 1 + \dfrac{2}{2x-1}$, $\quad F(x) = x + \ln|2x-1|$.

Das in den Beispielen h), i) angewendete Verfahren lässt sich auf alle rationalen Funktionen anwenden, bei denen der Nenner linear ist: Man führt zunächst Polynomdivision durch; als Ergebnis erhält man eine ganzrationale Funktion $g(x)$ + eine rationale Funktion der Form $\dfrac{c}{ax+b}$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Eine Stammfunktion der letzteren ist $F(x) = \dfrac{c}{a}\cdot\ln|ax+b|$.

4) **S. 93, Aufgabe 10:**

a) $\displaystyle\int_{-2}^{-6} \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln|x|\Big]_{-2}^{-6} = \ln 6 - \ln 2 = \ln\frac{6}{2} = \ln 3,$

b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln|x|\Big]_{1}^{e} = \ln e - \ln 1 = 1,$

c) $\displaystyle\int_{0{,}5}^{2} \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln|x|\Big]_{0{,}5}^{2} = \ln 2 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2 - (\ln 1 - \ln 2) = 2\ln 2,$

d) $\displaystyle\int_{-5}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5,$

e/f) Das zu berechnende Integral $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\, dx$ ist wegen des Pols von $\dfrac{1}{x}$ nur definiert, wenn $a, b > 0$ oder $a, b < 0$, also a, b gleiches Vorzeichen haben. Dann ist $\frac{b}{a}$ positiv und es gilt:

$$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \ln|b| - \ln|a| = \ln\frac{|b|}{|a|} = \ln\left|\frac{b}{a}\right| = \ln\frac{b}{a}\,.$$

Man erhält also in e) und f) dasselbe Ergebnis:

$$\boxed{\text{Haben } a, b \text{ gleiches Vorzeichen, so gilt:} \quad \int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \ln\frac{b}{a}\,.}$$

Man kann diese allgemeine Formel natürlich auch zur Berechnung der vorangehenden Aufgaben a)–d) benutzen.

S. 93, Aufgabe 11: Alle Integrale sind definiert, da die Definitionslücken der (rationalen, also stetigen) Integranden nicht im Integrationsintervall liegen.

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x-1}\, dx = \Big[\ln|x-1|\Big]_2^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}69,$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3}{x+5}\, dx = 3\cdot\Big[\ln|x+5|\Big]_{-1}^{1} = 3(\ln 6 - \ln 4) = 3\ln\frac{3}{2} \approx 1{,}22,$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{3x-6}\, dx = \Big[\frac{1}{3}\ln|3x-6|\Big]_{-1}^{0} = \frac{1}{3}(\ln 6 - \ln 9) = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{3} \approx -0{,}14,$

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{4}{5x+10}\, dx = \frac{4}{5}\int_2^3 \frac{1}{x+2}\, dx = \frac{4}{5}\Big[\ln|x+2|\Big]_2^3 = \frac{4}{5}(\ln 5 - \ln 4) \approx 0{,}18,$ Korr.

e) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{-7}{-2y+8}\, dy = \int_{-1}^{3} \frac{-7}{-2x+8}\, dx = \frac{7}{2}\int_{-1}^{3} \frac{1}{2x-4}\, dx = \frac{7}{2}\Big[\ln|2x-4|\Big]_{-1}^{3} = \frac{7}{2}(\ln 1 - \ln 5) = -\frac{7}{2}\ln 5 \approx -5{,}63.$