Übungen zur Flächenberechnung aus dem Lehrbuch

Lambacher Schweizer, Analysis, Grundkursband, Klett-Verlag

1) **LS, p. 141, Nr. 3**

Ergebnisse:

a) $A = \frac{32}{3}$, b) $A = \frac{81}{8}$, c) $A = 9$,
d) $A = \frac{26}{3}$, e) $A = \frac{14}{3}$, f) $A = \frac{1}{10}$.

Lösung:

a) f hat nur eine Nullstelle bei 0, diese liegt nicht im Innern des Integrationsintervalls, also findet im Integrationsbereich kein Vorzeichenwechsel statt. Wir berechnen daher die gesuchte Fläche als Betrag des entsprechenden Integrals:

$$\int_0^4 (-0{,}5x^2)\,dx = \Big[-\frac{1}{6}x^3\Big]_0^4 = -\frac{4^3}{6} - 0 = -\frac{32}{3} \approx -10{,}67\,.$$

Damit ist die gesuchte Fläche $A = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$.

b) Wieder hat f nur eine Nullstelle bei 0, diese liegt nicht im Innern des Integrationsintervalls. Also ist der gesuchte Flächeninhalt der Betrag des folgenden Integrals:

$$\int_{-3}^0 0{,}5x^3\,dx = \Big[\frac{1}{8}x^4\Big]_{-3}^0 = 0 - \frac{1}{8}\cdot(-3)^4 = -\frac{81}{8} = -10{,}125\,.$$

Damit ist $A = \frac{81}{8} = 10{,}125$.

c) $f(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ hat die beiden Nullstellen ± 2. Keine liegt im Innern des Integrationsintervalls, also:

$$\int_{-1}^2 (x^2-4)\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 - 4x\Big]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - 8 - (-\frac{1}{3} + 4) = -9\,, \quad A = 9\,.$$

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 1 = -\frac{1}{3}(x^3+1)$ hat nur die Nullstelle -1. Diese liegt nicht im Integrationsintervall, also:

$$\int_1^3 (-\frac{1}{3}x^3 - 1)\,dx = \Big[-\frac{1}{12}x^4 - x\Big]_1^3 = -\frac{3^4}{12} - 3 - (-\frac{1}{12} - 1) = -\frac{26}{3}\,, \quad A = \frac{26}{3} \approx 8{,}67\,.$$

e) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x = \frac{1}{3}x(x^2-9)$ hat die Nullstellen 0 und ± 3. Keine davon liegt im Integrationsintervall, also:

$$\int_0^2 (\frac{1}{3}x^3 - 3x)dx = \Big[\frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2\Big]_0^2 = \frac{16}{12} - \frac{12}{2} = -\frac{14}{3}\,, \quad A = \frac{14}{3} \approx 4{,}67\,.$$

f) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ hat keine Nullstellen, aber bei 0 einen Pol. Dieser liegt nicht im Integrationsbereich, so dass die Fläche über das nachfolgende Integral berechnet werden kann:

$$\int_{-10}^{-5} (-\frac{1}{x^2})\,dx = \int_{-10}^{-5} (-x^{-2})\,dx = \Big[x^{-1}\Big]_{-10}^{-5} = \Big[\frac{1}{x}\Big]_{-10}^{-5} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = -\frac{1}{10}\,, \quad A = \frac{1}{10}\,.$$

2) **LS, p. 141, Nr. 4**

Ergebnisse:

a) $A = \frac{64}{3}$, b) $A = 18$, c) $A = \frac{4}{3}$,
d) $A = \frac{128}{15}$, e) $A = \frac{125}{12}$, f) $A = \frac{1}{2}$,
g) $A = \frac{3}{10}$, h) $A = \frac{37}{12}$, i) $A = \frac{9}{2}$.

Lösung:

Wir lösen die Aufgabe ohne Skizze der Graphen.
Da die vom Graphen und der x-Achse *eingeschlossene* Fläche gesucht ist, müssen wir die Integrationsgrenzen selbst bestimmen. Dies sind die Nullstellen von f.
a) $f(x) = 2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4)$ hat die Nullstellen ± 2. Da nur zwei Nullstellen vorliegen, braucht nur *ein* Integral berechnet zu werden:

$$\int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)\, dx = \Big[\frac{2}{3}x^3 - 8x\Big]_{-2}^{2} = \frac{16}{3} - 16 - (-\frac{16}{3} + 16) = -\frac{64}{3}\,.$$

Also ist der gesuchte Flächeninhalt $A = \frac{64}{3} \approx 21{,}33$.
Beachten Sie: Wegen der Achsensymmetrie von f und der Symmetrie der Integrationsgrenzen ist eine Vereinfachung der Rechnung möglich (siehe Übung (2), Aufgabe 2)).
b) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x = \frac{1}{2}x(x - 6)$ hat die Nullstellen 0 und 6. Wir erhalten

$$\int_{0}^{6} (\frac{1}{2}x^2 - 3x)\, dx = \Big[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\Big]_{0}^{6} = \frac{6^3}{6} - \frac{3}{2}\cdot 6^2 = -18\,, \quad A = 18\,.$$

c) $f(x) = (x - 1)^2 - 1 = x^2 - 2x = x(x - 2)$ hat die Nullstellen 0 und 2. Wir berechnen

$$\int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\, dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 - x^2\Big]_{0}^{2} = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}\,, \quad A = \frac{4}{3}\,.$$

d) $f(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4)$ hat die Nullstellen 0 und ± 2. Da bei der mittleren Nullstelle 0 *kein* VZW stattfindet (doppelte Nullstelle), hat f zwischen -2 und $+2$ einheitliches Vorzeichen und die gesuchte Fläche A ist gleich dem Betrag des Integrals:

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2)\, dx \right|\,.$$

Wir berechnen also

$$\int_{-2}^{2} (x^4 - 4^2)\, dx = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\Big]_{-2}^{2} = \frac{32}{5} - \frac{32}{3} - (-\frac{32}{5} + \frac{32}{3}) = -\frac{128}{15}$$

und erhalten als Fläche $A = \frac{128}{15} \approx 8{,}53$. (Auch hier lässt sich wieder die Symmetrie zur Vereinfachung benutzen.)
e) $f(x) = -\frac{1}{5}x^3 + 2x^2 - 5x = -\frac{1}{5}x(x^2 - 10x + 25) = -\frac{1}{5}x(x - 5)^2$ hat die Nullstellen 0 und 5. Also berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_{0}^{5} (-\frac{1}{5}x^3 + 2x^2 - 5x)\, dx &= \Big[-\frac{1}{20}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2\Big]_{0}^{5} = \Big[x^2\cdot(-\frac{x^2}{20} + \frac{2x}{3} - \frac{5}{2})\Big]_{0}^{5}\\ &= 25\cdot(-\frac{5}{4} + \frac{10}{3} - \frac{5}{2}) - 0 = 25\cdot\frac{-15 + 40 - 30}{12} = -\frac{125}{12}\,,\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \; A = \frac{125}{12} \approx 10{,}42\,.$$

f) $f(x) = -3x-7+\frac{4}{x^2} = \frac{-3x^3-7x^2+4}{x^2}$ hat nur eine Lücke, einen Pol bei 0 ohne VZW. Der kubische Zähler hat eine Nullstelle bei -1 (Koeffizienten des Zählers $3,4,7$ legen einen Versuch mit $x=\pm 1$ nahe). Polynomdivision ergibt $3x^3+7x^2-4 = (x+1)(3x^2+4x-4)$ und der quadratische Faktor hat die Nullstellen

$$3x^2+4x-4=0 \iff x = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3} \iff x = \frac{2}{3} \ \vee \ x=-2\,.$$

f hat zwar drei Nullstellen, aber dazwischen liegt ein Pol bei 0. Also schließt der Graph von f mit der x-Achse nur *ein* Flächenstück ein, und zwar in den Grenzen von -2 bis -1. Wir berechnen daher

$$\int_{-2}^{-1} (-3x-7+4x^{-2})\,dx = \Big[-\frac{3}{2}x^2-7x-4x^{-1}\Big]_{-2}^{-1} = -\frac{3}{2}+7+4-(-6+14+2) = -\frac{1}{2}\,.$$

und erhalten als von Graph und x-Achse eingeschlossener Fläche $A=\frac{1}{2}$.
g) $f(x) = x-x^4 = -x(x^3-1)$ hat nur die Nullstellen 0 und 1. Wir berechnen also

$$\int_0^1 (x-x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{5} = \frac{3}{10}\,, \quad A=\frac{3}{10}\,.$$

h) $f(x) = x^3-4x^2+3x = x(x^2-4x+3) = x(x-3)(x-1)$ (Vieta!) hat die Nullstellen 0, 1 und 3. Alle Nullstellen sind einfach und folglich mit VZW. Graph und x-Achse schließen also *zwei* Flächenstücke ein. Wir berechnen zunächst die beiden Integrale:

$$\int_0^1 (x^3-4x^2+3x)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-0 = \frac{5}{12}\,,$$

$$\int_1^3 (x^3-4x^2+3x)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_1^3 = (\frac{81}{4}-36+\frac{27}{2}) - \underbrace{(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2})}_{=\frac{5}{12}\text{ s.o.}}$$

$$= -\frac{9}{4}-\frac{5}{12} = -\frac{8}{3}\,.$$

Die gesuchte eingeschlossene Fläche ist die Summe der Beträge der beiden Integrale:

$$A = \frac{8}{3}+\frac{5}{12} = \frac{37}{12} \approx 3{,}08\,.$$

i) $f(x) = x(3-x^2)$ hat die Nullstellen 0 und $\pm\sqrt{3}$. Alle sind einfach, so dass jeweils ein VZW stattfindet: Der Graph von f schließt mit der x-Achse *zwei* Flächenstücke ein. Wegen der Punktsymmetrie von $f(x) = 3x-x^3$ genügt es eines dieser Flächenstücke zu berechnen:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (3x-x^3)\,dx = \Big[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\Big]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9}{2}-\frac{9}{4}-0 = \frac{9}{4}\,.$$

(Wegen der Punktsymmetrie ergibt sich $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} f = -\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} f$.) Die Gesamtfläche ist dann das Doppelte des soeben berechneten Wertes:

$$A = 2\cdot\left|\int_0^{\sqrt{3}} f\right| = \frac{9}{2}\,.$$

3) **LS, p. 141, Nr. 5**
Ergebnisse:
a) $A = \frac{7}{2}$, b) $A = \frac{49}{6}$, c) $A = \frac{35}{6}$,
d) $A = 1$, e) $A = \frac{5}{8}$.

Lösung:
a) $f(x) = x^3 + 1$ hat nur die Nullstelle -1. Da diese Nullstelle im Innern des Integrationsbereiches liegt und dort ein VZW stattfindet ($x^3 + 1$ ist streng monoton wachsend), müssen zwei Integrale berechnet werden:

$$\int_{-2}^{-1} (x^3 + 1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{4} - 1 - (4 - 2) = -\frac{3}{4} - 2 = -\frac{11}{4}\,,$$
$$\int_{-1}^{0} (x^3 + 1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x\right]_{-1}^{0} = 0 - (-\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}\,.$$

Die gesuchte Fläche ist die Summe der Beträge der beiden Integrale:

$$A = \frac{11}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{2}\,.$$

b) $f(x) = x^2 - 3x = x(x - 3)$ hat zwei Nullstellen 0 und 3, beide mit VZW. Beide liegen im vorgegebenen Integrationsbereich, also müssen *drei* Integrale berechnet werden:

$$\int_{-1}^{0} f = F(0) - F(-1)\,, \quad \int_{0}^{3} f = F(3) - F(0)\,, \quad \int_{3}^{4} f = F(4) - F(3)\,.$$

Dabei ist F irgendeine Stammfunktion von f. Wir erkennen, dass wir *vier* Werte von F berechnen müssen, die dann mit unterschiedlichen Vorzeichen kombiniert werden müssen. Mit $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ ergibt sich

$$F(-1) = -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{11}{6}\,, \quad F(0) = 0\,, \quad F(3) = 9 - \frac{27}{2} = -\frac{9}{2}\,, \quad F(4) = \frac{64}{3} - 24 = -\frac{8}{3}\,.$$

Dies ergibt die Integralwerte:

$$\int_{-1}^{0} f = F(0) - F(-1) = \frac{11}{6}\,,$$
$$\int_{0}^{3} f = F(3) - F(0) = -\frac{9}{2}\,,$$
$$\int_{3}^{4} f = F(4) - F(3) = -\frac{8}{3} + \frac{9}{2} = \frac{11}{6}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist die Summe der *Beträge* dieser Integralwerte, also

$$A = \frac{11}{6} + \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{49}{6} \approx 8{,}17\,.$$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$ hat die beiden Nullstellen 0 und 2. Da bei 0 aber kein VZW vorliegt (doppelte Nullstelle), braucht nur 2 berücksichtigt zu werden. Wir berechnen also *zwei* Integrale

$$\int_{-1}^{2} f = F(2) - F(-1)\,, \quad \int_{2}^{3} f = F(3) - F(2)\,.$$

Mit $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$ erhalten wir

$$F(-1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}\,,\ F(2) = 4 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}\,,\ F(3) = \frac{81}{4} - 18 = \frac{9}{4}\,.$$

Dies ergibt die Integralwerte

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} f &= F(2) - F(-1) = -\frac{4}{3} - \frac{11}{12} = -\frac{9}{4}\,,\\ \int_{2}^{3} f &= F(3) - F(2) = \frac{9}{4} - (-\frac{4}{3}) = \frac{43}{12}\,.\end{aligned}$$

Damit ist der gesuchte Flächeninhalt $A = \frac{9}{4} + \frac{43}{12} = \frac{35}{6} \approx 5{,}83$.
d) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{x^2-1}{x^2}$ hat bei 0 einen Pol und bei ± 1 zwei einfache Nullstellen. Davon liegt nur $+1$ im Integrationsbereich. Wir berechnen also die Integrale

$$\int_{0,5}^{1} f = F(1) - F(\frac{1}{2})\,,\quad \int_{1}^{2} f = F(2) - F(1)\,.$$

Mit $f(x) = x^{-2} - 1$ und $F(x) = -x^{-1} - x = -\frac{1}{x} - x$ ergibt sich

$$F(\frac{1}{2}) = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}\,,\ F(1) = -2\,,\ F(2) = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}\,.$$

Dies ergibt die Integralwerte

$$\int_{0,5}^{1} f = -2 - (-\frac{5}{2}) = \frac{1}{2}\,,\quad \int_{1}^{2} f = -\frac{5}{2} - (-2) = -\frac{1}{2}$$

und den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
e) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x = \frac{1-x^3}{x}$ hat einen Pol bei 0 und nur eine Nullstelle bei 1 ($1 - x^3$ ist streng monoton). Im Innern dem Integrationsbereiches liegt keine Nullstelle, also berechnen wir nur das eine Integral

$$\begin{aligned}\int_{0,5}^{1} (\frac{1}{x^2} - x)\,dx &= \int_{0,5}^{1} (x^{-2} - x)\,dx = \Big[-x^{-1} - \frac{1}{2}x^2\Big]_{0,5}^{1}\\ &= \Big[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^2\Big]_{0,5}^{1} = -1 - \frac{1}{2} - (-2 - \frac{1}{8}) = \frac{5}{8}\,.\end{aligned}$$

Da dieser Wert positiv ist, ist dies zugleich der gesuchte Flächeninhalt: $A = \frac{5}{8}$.
f) entfällt vereinbarungsgemäß.

4) **LS, p. 144, Nr. 3**
   Ergebnisse:
   a) $A = \frac{21}{4}$, b) $A = 2$, c) $A = \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \approx 4{,}78$.

Lösung:
a) Beide Funktionen sind über dem Intervall definiert. Die Fläche zwischen den zwei

Graphen ist gleich der Fläche zwischen der Differenzfunktion $h = f - g$ und der x-Achse (in den vorgegebenen Grenzen). Wir bestimmen die Differenzfunktion

$$h(x) = x^2 + 1 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{3}{4}x^2 + 1\,.$$

Diese hat keine Nullstellen und nur positive Werte, also gilt

$$A = \int_{-1}^{2} (\frac{3}{4}x^2 + 1)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^3 + x\Big]_{-1}^{2} = 2 + 2 - (-\frac{1}{4} - 1) = \frac{21}{4}\,.$$

b) Wieder liegen keine Definitionslücken vor. Die gesuchte Fläche zwischen den Graphen von f und g ist gleich der Fläche zwischen dem Graphen von $h = f - g$ und der x-Achse (in den gegebenen Grenzen). Die Differenzfunktion ist

$$h(x) = x^3 - x - 1\,.$$

Wir untersuchen h auf Nullstellen. h hat keine *rationalen* Nullstellen, da nur ± 1 in Frage kämen, aber keine Nullstellen sind. Eine exakte Bestimmung der Nullstellen ist also nicht möglich. Wir untersuchen die Lage evtl. Extrempunkte: $h'(x) = 3x^2 - 1$ hat zwei Nullstellen $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Dies sind Extremstellen von h (verschiedene Nullstellen der quadratischen Ableitung, also einfach). Die Extrem*werte* sind beide negativ:

$$h(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 < 0\,,\ h(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 < 0\,.$$

Also liegen die Extrempunkte beide unter der x-Achse. h hat also nur eine Nullstelle und wegen $h(1) < 0$ muss diese im Bereich $x > 1$ liegen. Also hat h über dem Intervall $[-1, 1]$ *keine* Nullstelle. Wir berechnen daher

$$\int_{-1}^{1} (x^3 - x - 1)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - x\Big]_{-1}^{1} = (\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1) = -2$$

und die gesuchte Fläche ist $A = 2$.
c) Beide Funktionen sind über dem Intervall I definiert (der Pol 0 von g liegt außerhalb). Wir bestimmen die Differenzfunktion

$$h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - \frac{1}{2x^2} = \frac{4x^4 - 1}{2x^2}$$

und ihre Nullstellen:

$$h(x) = 0 \iff x^4 = \frac{1}{4} \iff x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\,.$$

Die positive Nullstelle $c = \sqrt{\frac{1}{2}}$ liegt im Integrationsintervall I, denn

$$\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{1}{2}} < 1\,.$$

Wir müssen also zwei Integrale berechnen und ihre Beträge addieren:

$$\int_{0,5}^{c} h = H(c) - H(\frac{1}{2}), \quad \int_{c}^{2} h = H(2) - H(c)$$

mit irgendeiner Stammfunktion H von h. Mit $H(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2x}$ erhält man

$$H(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12} + 1 = \frac{13}{12}, \quad H(2) = \frac{16}{3} + \frac{1}{4} = \frac{67}{12},$$
$$H(c) = H(\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (\frac{1}{6} + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Dies ergibt

$$\int_{0,5}^{c} h = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{13}{12} \approx -0{,}14, \quad \int_{c}^{2} h = \frac{67}{12} - \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 4{,}64.$$

und als gesuchten Flächeninhalt

$$A = \frac{13}{12} - \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{67}{12} - \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \approx 4{,}78.$$

5) **LS, p. 144, Nr. 4**
Ergebnisse:

a) $A = \frac{8}{3}$,	b) $A = \frac{4}{3}$,	c) $A = \frac{27}{16}$,
d) $A = 8$,	e) $A = \frac{37}{96}$,	f) $A = \frac{29}{5} = 5{,}8$.

Lösung:
a) Beide Funktionen sind überall definiert. Die gesuchte Fläche ist gleich der Fläche, die vom Graphen der Differenzfunktion $h = f - g$ und der x-Achse eingeschlossen wird. Wir bestimmen die Differenzfunktion

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - (-x^2 + 4x) = 2x^2 - 4x = 2x(x-2).$$

Deren Nullstellen sind 0 und 2. Also berechnen wir

$$\int_0^2 (2x^2 - 4x)\,dx = \Big[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2\Big]_0^2 = \frac{16}{3} - 8 - 0 = -\frac{8}{3}.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist daher $A = \frac{8}{3}$.
b) Wieder liegen keine Definitionslücken vor. Wir bestimmen die Differenzfunktion

$$h(x) = x^2 + x^3 - 3x^2 = x^3 - 2x^2 = x^2(x-2).$$

Diese hat zwei Nullstellen: 0 und 2. Wir berechnen

$$\int_0^2 (x^3 - 2x^2)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\Big]_0^2 = 4 - \frac{16}{3} - 0 = -\frac{4}{3}$$

und der gesuchte Flächeninhalt ist $A = \frac{4}{3}$.

c) 0 ist ein Pol von f. Wir untersuchen die Differenzfunktion auf Nullstellen:

$$\begin{aligned} h(x) = -\frac{1}{x^2} - 2{,}5x + 5{,}25 = 0 &\iff -\frac{1}{x^2} - \frac{5}{2}x + \frac{21}{4} = 0 \quad | \cdot 4x^2 \\ \iff -4 - 10x^3 + 21x^2 = 0 &\iff 10x^3 - 21x^2 + 4 = 0\,. \end{aligned}$$

Mögliche ganzzahlige Nullstellen sind die Teiler von 4. Wir finden +2 als Lösung. Polynomdivision ergibt $10x^3 - 21x^2 + 4 = (x-2)(10x^2 - x - 2)$ und der quadratische Term hat die Nullstellen

$$x = \frac{1}{20} \pm \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{20} \pm \sqrt{\frac{81}{400}} = \frac{1}{20} \pm \frac{9}{20} \iff x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = -\frac{2}{5}\,.$$

Insgesamt hat h also drei Nullstellen, aber dazwischen einen Pol bei 0. Daher ist nur *ein* Flächenstück zu untersuchen, nämlich zwischen den Nullstellen $\frac{1}{2}$ und 2. Wir berechnen daher

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{5}{2}x + \frac{21}{4}\right) dx = \left[\frac{1}{x} - \frac{5}{4}x^2 + \frac{21}{4}x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \left(\frac{1}{2} - 5 + \frac{21}{2}\right) - \left(2 - \frac{5}{16} + \frac{21}{8}\right) = \frac{27}{16} = 1{,}6875\,.$$

Dies ist zugleich der gesuchte Flächeninhalt.
d) Die Differenzfunktion

$$h(x) = x^3 - x - 3x = x(x^2 - 4)$$

hat die drei Nullstellen 0 und ± 2. Daher schließt der Graph von h mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein. Wegen der Punktsymmetrie gilt

$$\int_{-2}^{0} h = -\int_{0}^{2} h \quad \text{und folglich} \quad A = 2\left|\int_0^2 h\right|\,.$$

Wir berechnen also

$$\int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_0^2 = 4 - 8 - 0 = -4\,.$$

Die Fläche, die von den Graphen von f und g eingeschlossen wird, beträgt $A = 2 \cdot 4 = 8$.

e) Wieder untersuchen wir die Differenzfunktion

$$h(x) = x^3 - x - (-x^3 + x^2) = 2x^3 - x^2 - x = x(2x^2 - x - 1)\,.$$

Damit ist 0 eine Nullstelle. Außerdem erkennt man +1 als Nullstelle (Koeffizienten 2, -1, -1). Damit erhält man die Faktorisierung

$$h(x) = x(2x^2 - x - 1) = x(x-1)(2x+1)$$

und 0, 1, $-\frac{1}{2}$ als Nullstellen von h. Wir berechnen also zwei Integrale und bestimmen dazu eine Stammfunktion $H(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ sowie die Werte $H(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} H(-\frac{1}{2}) &= \frac{1}{32} + \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = \frac{3 + 4 - 12}{96} = -\frac{5}{96}\,, \\ H(1) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Also erhält man die Integralwerte

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} h = 0 - (-\frac{5}{96}) = \frac{5}{96}\,, \quad \int_{0}^{2} h = -\frac{1}{3}$$

und schließlich die gesuchte Fläche $A = \frac{5}{96} + \frac{1}{3} = \frac{37}{96} \approx 0{,}39$.
f) Wir betrachten diesmal die Differenzfunktion

$$h(x) = g(x) - f(x) = x^2 + 2x - (-x^4 + 4x^2) = x^4 - 3x^2 + 2x = x(x^3 - 3x + 2)\,.$$

Wieder erkennt man neben der 0 die Nullstelle +1 und Polynomdivision sowie Faktorisierung nach Vieta ergibt

$$h(x) = x(x^3 - 3x + 2) = x(x-1)(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x-1)(x+2) = x(x-1)^2(x+2)\,.$$

Damit hat h die Nullstellen -2, 0 und $+1$. Wir müssen also zwei Integrale berechnen. Wir wählen $H(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + x^2$ als Stammfunktion von h und berechnen

$$H(-2) = \frac{28}{5}\,, \quad H(0) = 0\,, \quad H(1) = \frac{1}{5}$$

sowie

$$\int_{-2}^{0} h = 0 - \frac{28}{5} = -5{,}6\,, \quad \int_{0}^{1} h = \frac{1}{5} = 0{,}2\,.$$

Die gesuchte Fläche ist die Summe der Beträge $A = 5{,}8$.

6) **LS, p. 144, Nr. 5** (Druckfehler in c): $P = (0{,}5; 3{,}75)$.)
Ergebnisse:
a) $A = \frac{9}{8}$, b) $A = \frac{12}{5}$, c) $A = \frac{351}{512}$.

Lösung:
a) Wir bestimmen zunächst die Tangentenfunktion t zum gegebenen Berührpunkt. Es ist $f'(x) = x$, also

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 4{,}5 + 3(x - 3) = 3x - 4{,}5\,.$$

Diese schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 1{,}5$ (vgl. Skizze im Buch). Die gesuchte Fläche berechnet sich aus der Fläche zwischen Graph von f und der x-Achse in den Grenzen von 0 bis 3 abzgl. der Dreiecksfläche unter der Tangente (im Bereich 1,5 bis 3). Also berechnen wir zunächst

$$\int_0^3 \frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^3 = \frac{9}{2}\,.$$

Die Dreiecksfläche unter der Tangente ist $A_2 = \frac{1}{2} \cdot (3 - 1{,}5) \cdot 4{,}5 = 3{,}375$. Damit ist die gesuchte Fläche

$$A = \frac{9}{2} - 3{,}375 = 1{,}125\,.$$

b) Die Funktion f hat nur eine Nullstelle bei 2 und sonst positive Werte. Wir bestimmen die Tangentenfunktion zu f an der Stelle 0

$$f(x) = (x-2)^4 \implies f'(x) = 4(x-2)^3 \implies t(x) = f(0) + f'(0)x = 16 - 32x\,.$$

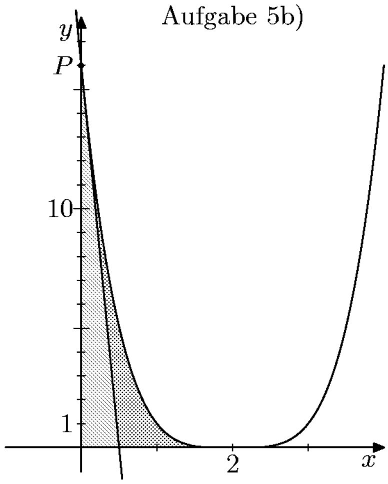
Die Tangente schneidet die x-Achse an der Stelle $\frac{1}{2}$. Wir berechnen also

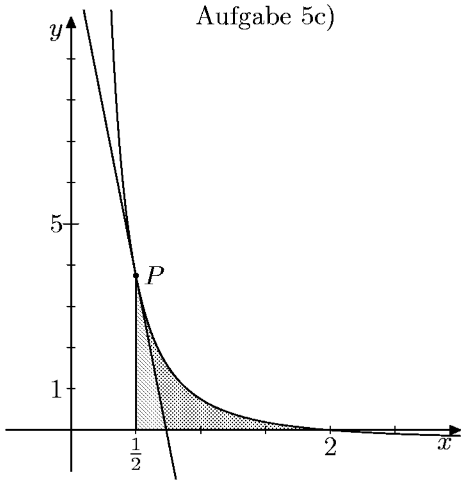
$$A_1 = \int_0^2 (x-2)^4 \, dx = \Big[\frac{1}{5}(x-2)^5\Big]_0^2 = 0 - (-\frac{32}{5}) = 6{,}4$$

und substrahieren die von der Tangente gebildete Dreiecksfläche (vgl. Skizze)

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 0) \cdot 16 = 4\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist daher $A = A_1 - A_2 = 2{,}4$.





c) Hier liegt ein Druckfehler vor: Der angegebene Punkt P liegt nicht auf dem Graphen von f. Gemeint ist $P = (0{,}5; 3{,}75)$.
$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$ hat die Nullstellen ± 2 sowie einen Pol bei 0. Wir bestimmen die Tangentenfunktion t von f im Punkt P

$$f(x) = x^{-2} - \frac{1}{4} \implies f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$
$$\implies t(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{15}{4} - 16(x - \frac{1}{2}) = \frac{47}{4} - 16x\,.$$

Die Nullstelle der Tangente ist folglich $\frac{47}{64}$. Wir berechnen

$$A_1 = \int_{\frac{1}{2}}^2 (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4})\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 (x^{-2} - \frac{1}{4})\, dx = \Big[-\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x\Big]_{\frac{1}{2}}^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - (-2 - \frac{1}{8}) = \frac{9}{8}$$

und subtrahieren die Dreiecksfläche

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot (\frac{47}{64} - \frac{1}{2}) \cdot \frac{15}{4} = \frac{225}{512}\,.$$

Die gesuchte Fläche ist demzufolge

$$A = A_1 - A_2 = \frac{9}{8} - \frac{225}{512} = \frac{351}{512} = 0{,}685546875\,.$$

7) **LS, p. 144, Nr. 6**
Ergebnisse:
a) $A = 2$, b) $A = \frac{75}{8}$, c) $A = 4$.

Lösung:
Alle Funktionen sind kubisch, ihre zweite Ableitung folglich linear, so dass sie alle genau einen Wendepunkt haben. Man bestimmt dann die Normalengleichung $n(x)$ zur Wendestelle und die Differenzfunktion $h(x) = f(x) - n(x)$. Eine Nullstelle dieser (kubischen!) Funktion ist natürlich die Wendestelle. Mittels Polynomdivision wird man auf eine quadratische Gleichung geführt, die in den 3 Teilaufgaben jeweils zwei Lösungen hat. Es entstehen so 3 Nullstellen, die *zwei* Flächenstücke begrenzen. Deren Flächeninhalte müssen dann bestimmt werden.
a) Es ist $f'(x) = -3x^2 + 1$ und $f''(x) = -6x$. Die Wendestelle von f ist daher 0 und die Wendenormale der Graph von

$$n(x) = f(0) - \frac{1}{f'(0)}(x - 0) = -x\,.$$

Gesucht ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der Wendenormale, also betrachten wir die Differenzfunktion

$$h(x) = f(x) - n(x) = -x^3 + x - (-x) = -x^3 + 2x = -x(x^2 - 2)\,.$$

Die Nullstellen sind 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wegen der Punktsymmetrie von h genügt es ein Integral zu berechnen:

$$\int_0^{\sqrt{2}} (-x^3 + 2x)\,dx = \Big[-\frac{1}{4}x^4 + x^2 \Big]_0^{\sqrt{2}} = -1 + 2 = 1\,.$$

Die gesuchte Fläche ist also $A = 2 \cdot 1 = 2$.
b) Es ist $f'(x) = -x^2 + 2$ und $f''(x) = -2x$. Wieder ist die Wendestelle 0 und die Wendenormale gegeben als Graph von

$$n(x) = f(0) - \frac{1}{f'(0)}(x - 0) = -\frac{1}{2}x\,.$$

Die Differenzfunktion ist

$$h(x) = f(x) - n(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x = -x(x^2 - \frac{15}{2})\,.$$

Sie ist wieder punktsymmetrisch und hat die Nullstellen 0 sowie $\pm\sqrt{\frac{15}{2}}$. Wir berechnen wieder nur ein Integral

$$\int_0^{\sqrt{\frac{15}{2}}} (-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x)\,dx = \Big[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{4}x^2 \Big]_0^{\sqrt{\frac{15}{2}}} = -\frac{75}{16} + \frac{75}{8} = \frac{75}{16}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist demzufolge

$$A = 2 \cdot \frac{75}{16} = \frac{75}{8}\,.$$

c) Es ist $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2}$ und $f''(x) = -3x - 3$. Also hat f die Wendestelle -1 und die Wendenormale ist Graph von

$$n(x) = f(-1) - \frac{1}{f'(-1)}(x+1) = -1 - (x+1) = -x - 2\,.$$

Die Differenzfunktion

$$h(x) = f(x) - n(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x^3 + 3x^2 - x - 3)$$

muss natürlich an der Wendestelle -1 eine Nullstelle haben. Außerdem erkennt man auch $+1$ als Nullstelle (Koeffizienten 1, 3, -1, -3) und dann notwendig als dritten Linearfaktor $x+3$. Die Nullstellen sind also ± 1 und -3. Wir bestimmen eine Stammfunktion H von h und berechnen deren Werte an den Integrationsgrenzen:

$$H(x) = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\,, \quad H(-3) = -\frac{81}{8} + \frac{27}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{8}\,,$$
$$H(-1) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{7}{8}\,, \quad H(1) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

und damit

$$\int_{-3}^{-1} h = -\frac{7}{8} - \frac{9}{8} = -2\,, \qquad \int_{-1}^{1} h = \frac{9}{8} + \frac{7}{8} = 2\,.$$

Die gesuchte Fläche ist demzufolge $A = 4$. (Die betragliche Übereinstimmung der beiden Integrale ist Folge einer Symmetrie, aber nicht zum Koordinatenursprung, sondern zum Wendepunkt.)

8) **LS, p. 144, Nr. 7**
Ergebnisse:
a) $A = \frac{32}{3}$, b) $V = \frac{64000}{3}$ Kubikmeter, c) $\approx 35{,}4\%$.

Lösung:
a) Die gesuchte Fläche ist die Differenz aus der Rechtecksfläche $A_1 = 8 \cdot 2 = 16$ und der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse über dem Intervall $[-4;4]$. Wegen der Symmetrie berechnen wir

$$\int_0^4 \frac{1}{8}x^2\,dx = \left[\frac{1}{24}x^3\right]_0^4 = \frac{8}{3}\,.$$

Damit ist die gesuchte Fläche $A = 16 - 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$.
(Alternative: Man berechnet die gesuchte Fläche als Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = \frac{1}{8}x^2$ und dem von $g(x) = 2$, der Parallelen zur x-Achse in der Höhe 2.)
b) Das Volumen ist das Produkt aus Querschnittsfläche A und Länge $l = 2000$ des Kanals, also $V = 2000 \cdot \frac{32}{3} = \frac{64000}{3} \approx 21333$ Kubikmeter.
c) Die Querschnittsfläche bei halbem Wasserstand ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und dem Graphen von $g(x) = 1$. Die Differenzfunktion ist

$$h(x) = g(x) - f(x) = 1 - \frac{1}{8}x^2 = -\frac{1}{8}(x^2 - 8)\,.$$

Ihre Nullstellen sind $\pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$. Wegen der Achsensymmetrie von h berechnen wir nur

$$\int_0^{\sqrt{8}} (1 - \frac{1}{8}x^2)\,dx = \Big[x - \frac{1}{24}x^3\Big]_0^{\sqrt{8}} = \sqrt{8} - \frac{1}{3}\sqrt{8} = \frac{2}{3}\sqrt{8}\,.$$

Der Flächeninhalt ist das Doppelte, also $A = \frac{4}{3}\sqrt{8}$. Sein Anteil an der in a) bestimmten Gesamtfläche ist

$$\frac{\frac{4}{3}\sqrt{8}}{\frac{32}{3}} = \frac{1}{8}\sqrt{8} = \frac{1}{4}\sqrt{2} \approx 0{,}354 = 35{,}4\%\,.$$

Dies ist zugleich das Verhältnis der Wassermengen.

9) **LS, p. 144, Nr. 8**
Ergebnisse:

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$, b) $A = 18$, c) $V = 88$. Korr!

Lösung:
a) Wir wählen das Koordinantensystem so, dass die x-Achse auf dem Boden liegt und die y-Achse die Symmetrieachse der Parabel ist.
1. Mit der Scheitelpunktsform setzt man an $f(x) = ax^2 + \frac{9}{2}$ und bestimmt aus der Nullstelle 3 den Wert von a:

$$0 = a \cdot 3^2 + \frac{9}{2} \iff a = -\frac{1}{2}\,.$$

2. Wir gehen von den beiden Nullstellen aus und setzen an $f(x) = a(x-3)(x+3) = a(x^2 - 9)$ und berechnen aus dem y-Achsenabschnitt a:

$$\frac{9}{2} = a(0^2 - 9) = -9a \iff a = -\frac{1}{2}\,.$$

3. Wir setzen f als quadratische Funktion mit bekanntem y-Achsenabschnitt an: $f(x) = ax^2 + bx + \frac{9}{2}$. Wegen der Achsensymmetrie ist $b = 0$ und man erhält wie in 1. $f(x) = ax^2 + \frac{9}{2}$ und dann a.
b) Die gesuchte Fläche ist das Doppelte des folgenden Integrals:

$$\int_0^3 (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2})\,dx = \Big[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{9}{2}x\Big]_0^3 = -\frac{9}{2} + \frac{27}{2} = 9\,,$$

also $A = 18$.
c) Der Querschnitt des Brückebauwerks ist ein Trapez mit der Fläche $A_2 = 8{\cdot}5 = 40$. Die Querschnittsfläche des Mauerwerks ist also $A_2 - A = 40 - 18 = 22$ und das Bauvolumen daher $V = 22 \cdot 4 = 88$ Kubikmeter. Korr!