Vermischte Übungen aus dem Lehrbuch

Lambacher Schweizer, Analysis, Grundkursband, Klett-Verlag

1) **LS, p. 145, Nr. 1**
Ergebnisse:

a) $= \frac{9}{4}$, b) $A = \frac{8}{3}$, c) $A = \frac{8}{3}$, d) $A = 2$.

Lösung:
a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x = \frac{1}{3}x(x^2 + 6x + 9) = \frac{1}{3}x(x+3)^2$ hat zwei Nullstellen: 0 und -3. (Dies bestätigt auch der angegebene Graph.) Wir berechnen also

$$\int_{-3}^{0} (\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x)\, dx = \Big[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big]_{-3}^{0} = 0 - (\frac{27}{4} - 18 + \frac{27}{2}) = -\frac{9}{4}$$

und der gesuchte Flächeninhalt ist $A = \frac{9}{4}$.
b) Die Nullstellen von f sind bereits berechnet worden. Dabei ist -3 eine doppelte Nullstelle, also ohne VZW, so dass f im angegebenen Intervall *keinen* VZW hat und daher der gesuchte Flächeninhalt der Betrag des Integrals ist:

$$\int_{-4}^{0} (\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x)\, dx = \Big[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big]_{-4}^{0} = 0 - (\frac{64}{3} - \frac{128}{3} + 24) = -\frac{8}{3}\,.$$

Der Flächeninhalt ist nun $A = \frac{8}{3}$.
c) Wir berechnen die Differenzfunktion

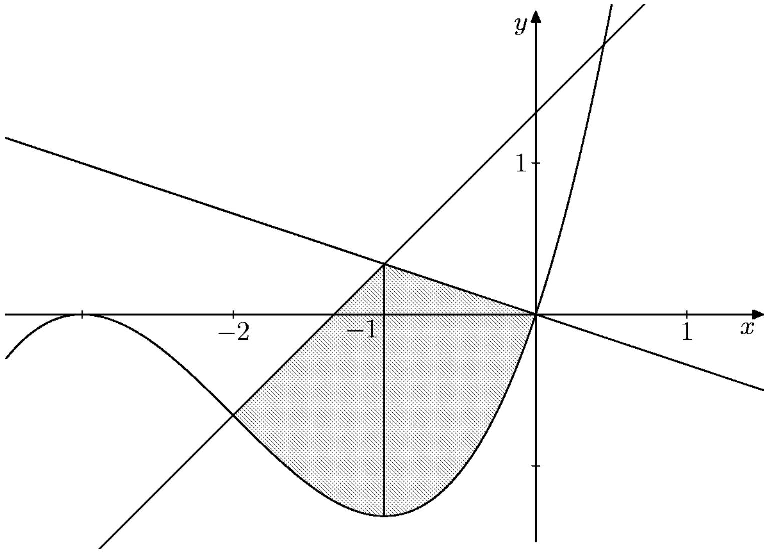
$$h(x) = f(x) - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{8}{3}x = \frac{1}{3}x(x^2 + 6x + 8) = \frac{1}{3}x(x+2)(x+4) \quad \text{(Vieta!)}\,.$$

Diese hat die 3 Nullstellen 0, -2 und -4. Wir berechnen also zwei Integrale:

$$\int_{-4}^{-2} (\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{8}{3}x)\, dx = \Big[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2\Big]_{-4}^{-2} = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}\,,$$
$$\int_{-2}^{0} (\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{8}{3}x)\, dx = \Big[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2\Big]_{-2}^{0} = 0 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}\,.$$

Damit ist die gesuchte Fläche $A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.
d) Wir berechnen die beiden Normalen und ergänzen die Skizze. Es ist $f'(x) = x^2 + 4x + 3$. Damit hat die Normale im Punkt $(0, f(0)) = (0,0)$ den Anstieg $-\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{3}$ und die Gleichung $n_1(x) = -\frac{1}{3}x$. Die Normale im Punkt $(-2, f(-2)) = (-2, -\frac{2}{3})$ den

Anstieg $-\frac{1}{f'(-2)} = 1$ die Gleichung $n_2(x) = -\frac{2}{3} + (x+2) = x + \frac{4}{3}$.



Wir berechnen zunächst die Schnittstelle zwischen den beiden Normalen:

$$n_1(x) = n_2(x) \iff -\frac{1}{3}x = \frac{4}{3} + x \iff x = -1\,.$$

Damit berechnen wir die gesuchte Fläche in zwei Teilen:

$$\int_{-2}^{-1} (n_2(x) - f(x))\,dx = \int_{-2}^{-1} (x + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x)\,dx$$
$$= \int_{-2}^{-1} (-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 2x + \frac{4}{3})\,dx = \Big[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}x\Big]_{-2}^{-1} = \frac{11}{12}$$
$$\int_{-1}^{0} (n_1(x) - f(x))\,dx = \int_{-2}^{-1} (-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x)\,dx$$
$$= \int_{-2}^{-1} (-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{4}{3}x)\,dx = \Big[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2\Big]_{-1}^{0} = \frac{13}{12}\,.$$

Die gesuchte Fläche ist also $A = \frac{11}{12} + \frac{13}{12} = 2$.

2) **LS, p. 145, Nr. 2**
Ergebnisse:

a) $A = \frac{8}{3}$, b) $A = \frac{343}{48}$, c) $A = \frac{19}{48}$.

Lösung:
a) $A = A_5 + A_4$. Berechnung: Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse sind -2 und 0. Wir berechnen also zwei Integrale:

$$\int_{-3}^{-2} (x^2 + 2x)\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 + x^2\Big]_{-3}^{-2} = -\frac{8}{3} + 4 - (-9 + 9) = \frac{4}{3}\,,$$
$$\int_{-2}^{0} (x^2 + 2x)\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 + x^2\Big]_{-2}^{0} = -\frac{4}{3}\,.$$

Damit ist $A_5 = \frac{4}{3}$, $A_4 = \frac{4}{3}$ und $A = \frac{8}{3}$.
b) $A = A_1 + A_2 + A_4$. Wir betrachten die Differenzfunktion

$$h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - (x^2 + 2x) = -x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}\,.$$

Diese hat die Nullstellen (siehe auch die gegebene Skizze) -3 und $\frac{1}{2}$. Wir berechnen also

$$\int_{-3}^{\frac{1}{2}} (-x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2})\,dx = \Big[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\Big]_{-3}^{\frac{1}{2}}$$
$$= -\frac{1}{24} - \frac{5}{16} + \frac{3}{4} - (9 - \frac{45}{4} - \frac{9}{2}) = \frac{19}{48} + \frac{27}{4} = \frac{343}{48}\,.$$

Also $A = \frac{343}{48}$.
c) $A = A_2$. Die Schnittstelle von Gerade und Graph im ersten Quadranten ist 1/2 (s.o.) und wir berechnen wieder ein Integral über die Differenzfunktion

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} (-x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2})\,dx = \Big[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\Big]_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{19}{48}\,.$$

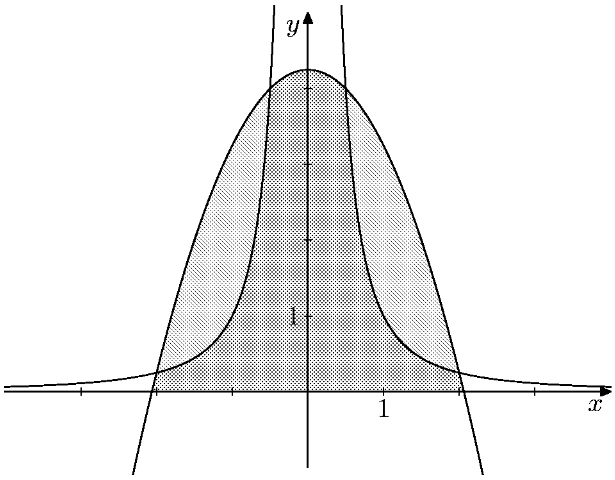
Also $A = A_3 = \frac{19}{48}$.

3) **LS, p. 145, Nr. 3**
Ergebnisse:

a) $A = \frac{9}{2}$, b) $A = A = \frac{17}{6}\sqrt{17} - \frac{9}{2}$.

Lösung:
Wir skizzieren zunächst die beiden Graphen. Beide Funktionen sind achsensymmetrisch, f ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (0, \frac{17}{4})$, g hat einen Pol bei 0 und überall positive Werte und Grenzwert 0 im Unendlichen. Die Nullstellen von f sind $\pm\sqrt{\frac{17}{4}}$ und die Schnittstellen beider Funktionen sind

$$\frac{1}{x^2} = -x^2 + \frac{17}{4} \iff 4x^4 - 17x^2 + 4 = 0 \iff z = x^2 \ \wedge\ 4z^2 - 17z + 4 = 0$$
$$\iff x^2 = z = \frac{17}{8} \pm \sqrt{\frac{289}{64} - 1} = \frac{17}{8} \pm \frac{15}{8}$$
$$\iff x^2 = 4 \ \vee\ x^2 = \frac{1}{4} \iff x = \pm 2 \ \vee\ x = \pm\frac{1}{2}$$



a) Die Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$ hat zwar 4 Nullstellen, aber wegen des Pols 0 sind nur zwei Integrale zu berechnen, die wegen der Achsensymmetrie von h identisch sind:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} (\frac{1}{x^2} + x^2 - \frac{17}{4})\,dx = \Big[-\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{4}x \Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{17}{2} - (-2 + \frac{1}{24} - \frac{17}{8}) = -\frac{9}{4}\,.$$

Der Flächeninhalt der beiden hell schraffierten Flächenstücke zusammen ist also $\frac{9}{2}$.

b) Das in b) beschriebene Flächenstück ist dunkel schraffiert. Zu seiner Bestimmung berechnen wir zunächst die Fläche zwischen der Parabel und der x-Achse (wegen der Symmetrie) in den Grenzen von 0 bis $\sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{17}}{2}} (-x^2 + \frac{17}{4})\,dx = \Big[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{17}{4}x \Big]_0^{\frac{\sqrt{17}}{2}} = -\frac{17}{24}\sqrt{17} + \frac{17}{8}\sqrt{17} = \frac{17}{12}\sqrt{17}\,.$$

Die Fläche zwischen Parabel und x-Achse beträgt also $\frac{17}{6}\sqrt{17}$. Subtrahiert man hiervon die in a) bestimmte Fläche, so erhält man

$$A = \frac{17}{6}\sqrt{17} - \frac{9}{2}\,.$$

4) **LS, p. 145, Nr. 4**
Ergebnisse:

a) $A = \frac{32}{3}$, b) $A = \frac{9}{4}$, c) $A = \frac{32}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{8} \approx 6{,}9$.

Lösung:

a) Gesucht ist die Fläche zwischen $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $g(x) = 4$ in den Grenzen von 0 bis zur positiven Schnittstelle:

$$f(x) = g(x) \iff \frac{1}{4}x^2 = 4 \iff x = \pm 4\,.$$

Also berechnen wir

$$\int_0^4 (4 - \frac{1}{4}x^2)\,dx = \Big[4x - \frac{1}{12}x^3\Big]_0^4 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}\,.$$

Damit ist der orange gefärbte Flächeninhalt $A = \frac{32}{3}$.

b) Fläche zwischen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $g(x) = 1$ in den Grenzen von der positiven Schnittstelle 1 bis zur oberen Grenze 4:

$$\int_1^4 (1 - \frac{1}{x^2})\,dx = \int_1^4 (1 - x^{-2})\,dx = \Big[x + x^{-1}\Big]_1^4 = 4 + \frac{1}{4} - (1+1) = \frac{9}{4}\,.$$

Also ist $A = \frac{9}{4}$.

c) Die beiden Parallelen zur x-Achse schneiden den Graphen an den Stellen $\sqrt{8}$ und 4. Wir berechnen zunächst die Fläche zwischen dem Graphen von f und der Parallelen $y = 2$ in den Grenzen von $\sqrt{8}$ bis 4:

$$\int_{\sqrt{8}}^4 (\frac{1}{4}x^2 - 2)\,dx = \Big[\frac{1}{12}x^3 - 2x\Big]_{\sqrt{8}}^4 = \frac{16}{3} - 8 - (\frac{2}{3}\sqrt{8} - 2\sqrt{8}) = -\frac{8}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{8} \approx 1{,}1\,.$$

Diesen subtrahiert man von der Rechtecksfläche zwischen beiden Parallelen in den Grenzen von 0 bis 4:

$$A = 4 \cdot 2 + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{8} = \frac{32}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{8} \approx 6{,}9\,.$$

5) **LS, p. 145, Nr. 5**
Ergebnisse:

a) $b = 3$, b) $a = -4$, (Korr!) c) $b = \pm 3$, d) $a = \frac{5}{3}$. (Korr!)

Lösung:
a) Wir lösen die Gleichung

$$9 = \int_0^b x^2\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^b = \frac{1}{3}b^3 \iff 27 = b^3 \iff b = 3\,.$$

b) Wir lösen die Gleichung

$$63 = \int_a^5 x^2\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_a^5 = \frac{125}{3} - \frac{1}{3}a^3 \iff a^3 = 125 - 189 = -64 \iff a = -4\,.$$

c) Hier erhalten wir *zwei* Lösungen:

$$40 = \int_1^b 2x^3\,dx = \frac{1}{2}b^4 - \frac{1}{2} \iff b^4 = 81 \iff b = \pm 3\,.$$

d)

$$\frac{1}{2} = \int_a^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_a^{10} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{a} \iff \frac{1}{a} = \frac{3}{5} \iff a = \frac{5}{3}\,.$$

6) **LS, p. 146, Nr. 6**
Ergebnisse:

a) $z = 5$, b) $b = \frac{200}{101}$.

Lösung:
a) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ hat keine Nullstellen und ist auf dem Intervall $]0, \infty[$ definiert (0 ist einziger Pol). Die Werte von f sind immer positiv, so dass alle betrachteten Flächen gleich den entsprechenden Integralen sind.

$$1{,}8 = \int_{0{,}5}^z \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{0{,}5}^z = -\frac{1}{z} + 2 \iff \frac{1}{z} = 0{,}2 = \frac{1}{5} \iff z = 5\,.$$

b) Gesucht ist b mit

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{100} \frac{1}{x^2}\,dx \iff \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^b = \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^{100}$$
$$\iff 1 - \frac{1}{b} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{100}) = \frac{99}{200} \iff \frac{1}{b} = \frac{101}{200} \iff b = \frac{200}{101}\,.$$

7) **LS, p. 146, Nr. 7**
Ergebnisse:

a) $b = 12$, b) $b = \sqrt[3]{864}$, c) $c = 9\sqrt[3]{2}$.

Lösung:
a) Die orangerot eingefärbte Fläche ist als Integral darstellbar. Wir lösen daher die Gleichung

$$288 = \int_0^b \frac{1}{2}x^2\,dx = \Big[\frac{1}{6}x^3\Big]_0^b = \frac{1}{6}b^3 \iff 1728 = b^3 \iff b = 12\,.$$

b) Die blau gefärbte Fläche ist die Differenz der Rechtecksfläche $A = b \cdot f(b) = \frac{1}{2}b^3$ und dem in a) betrachteten Integral. Also lösen wir

$$288 = \frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{6}b^3 = \frac{1}{3}b^3 \iff 864 = b^3 \iff b = \sqrt[3]{864} \approx 9{,}52\,.$$

c) Die Fläche wird begrenzt von zwei Graphen. Wir betrachten daher die Differenzfunktion $h(x) = c - \frac{1}{2}x^2$ und berechnen ihre Nullstellen $x = \pm\sqrt{2c}$. Also suchen wir $c > 0$ mit

$$\begin{aligned}
72 &= \int_{-\sqrt{2c}}^{\sqrt{2c}} (c - \frac{1}{2}x^2)\,dx = 2 \cdot \Big[cx - \frac{1}{6}x^3\Big]_0^{\sqrt{2c}} \\
\iff 36 &= c\sqrt{2c} - \frac{1}{6} \cdot 2c\sqrt{2c} = \sqrt{2} \cdot c^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot c^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2} \cdot c^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \\
\iff c^{\frac{3}{2}} &= \frac{54}{\sqrt{2}} = 27\sqrt{2} = 27 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \iff c = 27^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 9\sqrt[3]{2} \approx 11{,}34\,.
\end{aligned}$$

8) **LS, p. 146, Nr. 8**
Ergebnisse:
a) $c = \frac{4}{3}$, b) $c = 9$.
(In a) erfordert die Klärung des Falles $c < 1$ einige Anstrengungen.)

Lösung:
a) $f(x) = -x^2 + c$ ist achsensymmetrisch und hat die Nullstellen $\pm\sqrt{c}$. Diese Nullstellen liegen im Innern des Integrationsintervalls $[-1, +1]$ genau dann, wenn $c < 1$ ist. Wir müssen bei der Flächenberechnung also zwei Fälle unterscheiden:
1. $c \geq 1$: Dann beträgt die gesuchte Fläche (wegen der Symmetrie)

$$2\int_0^1 (-x^2 + c)\,dx = 2\Big[-\frac{1}{3}x^3 + cx\Big]_0^1 = 2(c - \frac{1}{3}) = 2c - \frac{2}{3}\,.$$

Wir bestimmen c mit

$$2 = 2c - \frac{2}{3} \iff c = \frac{4}{3}\,.$$

2. $c < 1$: Dann setzt sich die gesuchte Fläche aus mehreren Flächenstücken zusammen. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
2\int_0^{\sqrt{c}} (-x^2 + c)\,dx &= 2\Big[cx - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^{\sqrt{c}} = 2(c\sqrt{c} - \frac{1}{3}c\sqrt{c}) = \frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}}\,, \\
2\int_{\sqrt{c}}^1 (-x^2 + c)\,dx &= 2(c - \frac{1}{3}) - \frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}})\,.
\end{aligned}$$

Die Gesamtfläche beträgt in diesem Fall

$$\frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} - 2c = \frac{8}{3}c^{\frac{3}{2}} - 2c + \frac{2}{3}\,.$$

Die Frage, für welche c dies den Wert 2 hat führt auf eine kubische Gleichung in $\sqrt{c}$ (Substitution). Da aber nur Lösungen $c < 1$ gesucht sind und für $c = 1$ sich nur ein Flächenwert $\frac{2}{3}$ ergibt, untersuchen wir direkt die gefundene Flächenfunktion (definiert für $c \geq 0$)

$$A(c) = \frac{8}{3}c^{\frac{3}{2}} - 2c + \frac{2}{3} \implies A'(c) = 4c^{\frac{1}{2}} - 2$$

Damit hat A' nur die Nullstelle $c = \frac{1}{4}$ (mit VZW, da A' monoton wächst), also A nur dort eine Extremstelle, die ein Minimum sein muss ($A(1) = \frac{2}{3}$, $A(0) = \frac{1}{3}$, $A(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$). Zugleich zeigen die berechneten Randwerte, dass A im Intervall $0 \leq c \leq 1$ nur Werte zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{3}$ annimmt: Im Falle $c < 1$ kann die Fläche also nicht 2 werden.
b) Die Fläche zwischen Graph und x-Achse wird begrenzt von den Nullstellen $\pm\sqrt{c}$ und wir lösen die Gleichung

$$36 = 2\int_0^{\sqrt{c}} (-x^2 + c)\,dx = \frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}} \iff 27 = c^{\frac{3}{2}} \iff c = 9\,.$$

9) **LS, p. 146, Nr. 9**
Ergebnisse:

a) $\frac{1}{6}m^3$, b) $1 : 2$.

Lösung:
a) Wir betrachten die Differenzfunktion und ihre Nullstellen:

$$h(x) = mx - x^2 = 0 \iff x = 0 \;\vee\; x = m\,.$$

Die Fläche zwischen Graph und Gerade beträgt daher (in Abhängigkeit von $m \geq 0$)

$$\int_0^m (mx - x^2)\,dx = \left[\frac{m}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^m = \frac{1}{2}m^3 - \frac{1}{3}m^3 = \frac{1}{6}m^3\,.$$

Dies ist zugleich der obere Teil der markierten Dreiecksfläche.
b) Der untere Teil beträgt $\frac{1}{3}m^3$ (siehe Teilrechnung in a) oder von der Dreiecksfläche $\frac{m^3}{2}$ den oberen Teil $m^3/6$ abziehen) und das Verhältnis der oberen zur unteren Teilfläche also $\frac{1}{6} : \frac{1}{3} = 1 : 2$ ist.

10) **LS, p. 146, Nr. 10**
Ergebnis: a) $m = 3$.

Lösung:
a) Wir betrachten die Differenzfunktion und ihre Nullstellen:

$$h(x) = mx - x^3 x(m - x^2) \iff x = 0 \;\vee\; x = \pm\sqrt{m},.$$

Die Fläche beträgt also

$$\int_0^{\sqrt{m}} (mx - x^3)\,dx = \left[\frac{m}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{m}} = \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2\,.$$

Wir lösen also

$$\frac{9}{4} = \frac{1}{4}m^2 \iff m = \pm 3\,.$$

Da $m \geq 0$ vorausgesetzt ist, kommt nur $m = 3$ in Frage.
b) Die Dreiecksfläche beträgt $\frac{1}{2}\sqrt{m} \cdot (\sqrt{m})^3 = \frac{1}{2}m^4$, wird also vom Graphen halbiert.

11) **LS, p. 146, Nr. 11**
Ergebnisse:

a) $\frac{343}{48}$ und $\frac{23}{48}$, (Korr!) b) $m = \frac{4}{3}$.

Lösung:
Beide Flächen zusammen ergeben die Fläche zwischen der Geraden und dem Graphen in den Grenzen von 0 bis 4. Wir betrachten also die Differenzfunktion

$$h(x) = mx - f(x) = mx + (x-2)^2 - 4 = x^2 + (m-4)x = x(x-(4-m))\,.$$

Die Nullstellen von h (= Schnittstellen der Parabel und der Geraden) sind 0 und $z = 4-m$. (z liegt – wie in der Skizze vorgegeben– im Bereich $[0,4]$, solange $0 \leq m \leq 4$ ist.) Wir berechnen also die Integrale

$$\begin{aligned}\int_0^{4-m} (x^2-(4-m)x)\,dx &= \Big[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4-m}{2}x^2\Big]_0^{4-m} \\ &= \frac{1}{3}(4-m)^3 - \frac{1}{2}(4-m)^3 = -\frac{1}{6}(4-m)^3\,, \\ \int_{4-m}^{4} (x^2-(4-m)x)\,dx &= \Big[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4-m}{2}x^2\Big]_{4-m}^{4} \\ &= \frac{64}{3} - 8(4-m) + \frac{1}{6}(4-m)^3\,.\end{aligned}$$

a) Für $m = \frac{1}{2}$ ergibt sich als blaue Fläche

$$\frac{1}{6}(\frac{7}{2})^3 = \frac{343}{48} \approx 7{,}15$$

und als orangerote Fläche

$$\frac{64}{3} - 8(4-\frac{1}{2}) + \frac{343}{48} = \frac{23}{48} \approx 0{,}48\,.$$

b) Damit beide Flächen gleich groß sind, muss gelten (für $m \leq 4$)

$$\frac{1}{6}(4-m)^3 = \frac{64}{3} - 8(4-m) + \frac{1}{6}(4-m)^3 \iff 8m = \frac{32}{3} \iff m = \frac{4}{3}\,.$$

Alternative Lösung von b) (ohne Berechnung der einzelnen Flächen): Damit die blaue und orangefarbene Fläche gleich groß sind, müssen die beiden entsprechenden Integrale entgegengesetzt gleich sein, also das gesamte *Integral* (nicht die Fläche) von 0 bis 4 den Wert Null haben:

$$0 = \int_0^4 h(x)\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 + \frac{m-4}{2}x^2\Big]0^4 = \frac{64}{3} + (m-4)\cdot 8 \iff -\frac{8}{3} = m-4 \iff m = \frac{4}{3}\,.$$

12) **LS, p. 146, Nr. 12**
Ergebnis: $t = 12$.

Lösung:
Die Funktion $f(x) = -x^2 + tx = -x(x-t)$ hat die Nullstellen 0 und t. Die Fläche zwischen Graph und x-Achse ist (die Parabel ist nach unten geöffnet, das Flächenstück liegt also oberhalb der x-Achse):

$$A = \int_0^t (-x^2 + tx)\,dx = \Big[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2 \Big]_0^t = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{2} - 0 = \frac{1}{6}t^3\,.$$

Dieser Flächenwert soll 288 sein:

$$288 = \frac{1}{6}t^3 \iff t = \sqrt[3]{6 \cdot 288} = \sqrt[3]{12 \cdot 144} = 12\,.$$