Übungen (5)

1) S. 146 oben(!), Aufgabe 2

△ **2.**
Wende Produktintegration an. Ermittle eine Stammfunktion der Integrandenfunktion.

a) $\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$ **c)** $\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx$ **e)** $\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$ **g)** $\int_0^{1} x^2 e^x \, dx$ **i)** $\int_1^{2} x \ln x \, dx$

b) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$ **d)** $\int_1^{4} x\sqrt{x} \, dx$ **f)** $\int_0^{1} x e^x \, dx$ **h)** $\int_0^{1} x^3 e^x \, dx$ **j)** $\int_1^{2} x^2 \ln x \, dx$

2) a) Machen Sie sich an den Beispielen der vorangehenden Aufgabe klar, dass man folgende Integraltypen mittels partieller Integration berechnen kann. Dabei sei p eine beliebige *ganzrationale* Funktion.

$$\int_a^b p(x)e^x \, dx \ : \quad \text{Partielle Integration mit } u'(x) = e^x \,, \ v(x) = p(x) \,,$$

$$\int_a^b p(x) \ln(x) \, dx \ : \quad \text{Partielle Integration mit } u'(x) = p(x) \,, \ v(x) = \ln(x) \,,$$

Beurteilen Sie den unterschiedlichen Rechenaufwand in den beiden Fällen.
b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $\ln(x)$, indem Sie oben $p(x) = 1$ wählen.

3) Berechnen Sie auf der Basis der oben gefundenen Stammfunktion von $\ln(x)$ die Integrale $\int_a^b \ln^2$ und $\int_a^b \ln^3$.

4) S. 144/145, Nr. 2, 6

△ **2.**
Wende die Substitutionsformel an.

a) $\int_0^4 x(x^2+1)^2 \, dx$ **d)** $\int_{-1}^{-2} \frac{5x}{x^2+1} \, dx$ **g)** $\int_1^4 x \cdot \sqrt{x^2+1} \, dx$ **j)** $\int_1^2 \frac{x}{(3x^2+5)^4} \, dx$

b) $\int_{-1}^2 x^2(2x^3-1) \, dx$ **e)** $\int_2^3 \frac{3x}{4x^2-1} \, dx$ **h)** $\int_0^1 x \cdot \sqrt{2x^2+4} \, dx$ **k)** $\int_a^b f(x) \cdot f'(x) \, dx$

c) $\int_0^1 (4x+3) \cdot (2x^2+3x-1)^3 \, dx$ **f)** $\int_2^4 \frac{2x-1}{x^2-x+1} \, dx$ **i)** $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$ **l)** $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx \quad (f(x) > 0)$

△ **6.**
Zur Exponential- und Logarithmusfunktion

a) $\int_a^b x \cdot c^{x^2} \, dx$ **b)** $\int_a^b (x \cdot e^{3x^2} + 2x) \, dx$ **c)** $\int_a^b e^{2x+1} \, dx$ **d)** $\int_a^b x e^{2x^2} \, dx$ **e)** $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} \, dx$ **f)** $\int_1^2 x \cdot \ln x^2 \, dx$

5) S. 146, Nr. 1 a)–c), g)–l)

△ **1.**
Ermittle eine Stammfunktion F zu f.

a) $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$ **d)** $f(x) = (1-4x)^3$ **g)** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ **j)** $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^3}$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3}$ **e)** $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ **h)** $f(x) = \frac{x^2}{(x^3-1)^2}$ ▲ **k)** $f(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln x)^3}$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^3}$ **f)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$ **i)** $f(x) = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x}}$ ▲ **l)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \cdot \ln x}}$

Übungen (5) — Lösungen

1) Ergebnisse der Aufgabe 2 auf S. 146, oben(!):

a) -2π b) $\pi^2 - 4$ c) $\pi \cdot (\pi^2 - 6)$
d) $\frac{62}{5}$ e) -2π f) 1,
g) $e - 2 \approx 0{,}71828$, h) $6 - 2e \approx 0{,}56$, i) $2\ln(2) - \dfrac{3}{4} \approx 0{,}64$,
j) $\dfrac{8}{3}\ln(2) - \dfrac{7}{9} \approx 1{,}07$.

2) a) Mit den angegebenen Setzungen ergibt partielle Integration im ersten Fall

$$\int_a^b p(x)e^x\,dx = \big[p'(x)e^x\big]_a^b - \int_a^b p'(x)e^x\,dx\,.$$

Das letzte Integral ist wieder von demselben Typ, jedoch ist der ganzrationale Faktor nun $p'(x)$ und damit um einen Grad kleiner als $p(x)$. Man kann nun denselben Prozess wiederholen, und zwar solange, bis der Grad 0 ist (und damit der ganzrationale Faktor eine Konstante). Das entstehende Integral $\int_a^b c \cdot e^x\,dx$ ist dann unmittelbar berechenbar.
Im zweiten Fall erhält man durch partielle Integration

$$\int_a^b p(x)\ln(x)\,dx = \big[P(x)\ln(x)\big]_a^b - \int_a^b P(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\,.$$

Dabei sei P eine (ganzrationale) Stammfunktion von p, und zwar ohne absolutes Glied. Damit ist $P(x)$ durch x teilbar und folglich der Integrand $P(x)\cdot\frac{1}{x}$ im letzten Integral selbst eine *ganzrationale* Funktion, so dass dieses Integral problemlos berechnet werden kann.
Man bemerkt, dass im zweiten Fall eine einmalige Anwendung der partiellen Integration unmittelbar zum Ergebnis führt, während im ersten Fall die partielle Integration mehrfach angewendet werden muss (so oft wie der Grad von p angibt).
b) Hier ist $p(x) = 1$ und man wählt $P(x) = x$. Dann erhält man nach obigem Schema

$$\int_a^b 1\cdot\ln(x)\,dx = \big[x\ln(x)\big]_a^b - \int_a^b x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \big[x\ln(x)\big]_a^b - \big[x\big]_a^b = \big[x\ln(x) - x\big]_a^b\,.$$

Der so gefundene Funktionsterm $x\ln(x) - x$ ist damit eine Stammfunktion für $\ln(x)$ (was man durch Ableiten überprüfen kann).

3) Wir benutzen den in der vorangehenden Aufgabe ermittelten Stammfunktionsterm $x(\ln x - 1)$ für $\ln x$ und erhalten mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_a^b \underbrace{\ln(x)}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\,dx &= \big[x(\ln x - 1)\cdot\ln x\big]_a^b - \int_a^b x(\ln x - 1)\cdot\frac{1}{x}\,dx\\
&= \big[x(\ln^2 x - \ln x)\big]_a^b - \int_a^b (\ln x - 1)\,dx\\
&= \big[x(\ln^2 x - \ln x)\big]_a^b - \big[x(\ln x - 1) - x\big]_a^b\\
&= \big[x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)\big]_a^b
\end{aligned}$$

und unter Verwendung dieses Resultats

$$\int_a^b \ln^2(x) \cdot \ln(x)\, dx$$
$$= \big[x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) \cdot \ln x\big]_a^b - \int_a^b (\ln^2 x - 2\ln x + 2)\, dx$$
$$= \big[x(\ln^3 x - 2\ln^2 x + 2\ln x)\big]_a^b - \big[x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) - 2x(\ln x - 1) + 2x\big]_a^b$$
$$= \big[x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6)\big]_a^b$$

Damit ist $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)$ ein Stammfunktionsterm für $\ln^2 x$ und $x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$ einer für $\ln^3 x$. (Die Überprüfung dieser Resultate ist eine gute Ableitungsübung (Produkt-, Kettenregel).)

4) S. 144, Nr. 2.:
a) Wähle $u(x) = x^2 + 1$, also $u'(x) = 2x$ und somit $x = \frac{1}{2}u'(x)$. Daher

$$\int_0^4 x(x^2+1)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^4 u(x)^2 \cdot u'(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(4)} z^2\, dz = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}z^3\Big]_1^{17} = \frac{2456}{3}\,.$$

b) Wähle $u(x) = 2x^3 - 1$, also $u'(x) = 6x^2$ und $x^2 = \frac{1}{6}u'(x)$. Daher

$$\int_{-1}^2 x^2(2x^3-1)dx = \frac{1}{6}\int_{-1}^2 u(x) \cdot u'(x)\, dx = \frac{1}{6}\int_{u(-1)}^{u(2)} z\, dz = \frac{1}{6}\Big[\frac{1}{2}z^2\Big]_{-3}^{15} = 18\,.$$

c) Wähle $u(x) = 2x^2 + 3x - 1$, also $u'(x) = 4x + 3$. Daher

$$\int_0^1 (4x+3)(2x^2+3x-1)^3 dx = \int_0^1 u(x)^3 \cdot u'(x)\, dx \int_{u(0)}^{u(1)} z^3\, dz = \Big[\frac{1}{4}z^4\Big]_{-1}^{4} = \frac{255}{4}\,.$$

d) Wähle $u(x) = x^2 + 1$, also $u'(x) = 2x$ und $x = \frac{1}{2}u'(x)$. Daher

$$\int_{-1}^{-2} \frac{5x}{x^2+1}\, dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{-2} \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)\, dx = \frac{5}{2}\int_{u(-1)}^{u(-2)} \frac{1}{z}\, dz$$
$$= \frac{5}{2}\Big[\ln(|z|)\Big]_2^5 = \frac{5}{2}(\ln(5) - \ln(2)) = \frac{5}{2}\ln(\frac{5}{2}) \approx 2{,}29\,.$$

e) Wähle $u(x) = 4x^2 - 1$. Integralwert: $\dfrac{3}{8}(\ln(7) - \ln(3))$.
f) Wähle $u(x) = x^2 - x + 1$. Integralwert: $\ln(13) - \ln(3)$.
g) Wähle $u(x) = x^2 + 1$, also $u'(x) = 2x$ und $x = \frac{1}{2}u'(x)$. Daher

$$\int_1^4 x\sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{u(x)} \cdot u'(x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{u(1)}^{u(4)} \sqrt{z}\, dz = \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\Big]_2^{17} = \frac{17}{3}\sqrt{17} - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,.$$

h) Wähle $u(x) = 2x^2 + 4$. Integralwert: $\sqrt{6} - \dfrac{4}{3}$.
i) Wähle $u(x) = x^2 + 1$. Integralwert: $\sqrt{5} - \sqrt{2}$.
j) Wähle $u(x) = 3x^2 + 5$, also $u'(x) = 6x$ und $x = \frac{1}{6}u'(x)$. Daher

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x}{(3x^2+5)^4}\,dx &= \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{1}{u(x)^4}\cdot u'(x)\,dx \\ = \frac{1}{6}\int_{u(1)}^{u(2)} z^{-4}\,dz &= \frac{1}{6}\Big[-\frac{1}{3}z^{-3}\Big]_8^{17} = \frac{489}{2^{10}\cdot 17^3} = \frac{489}{5030912} \approx 9{,}72\cdot 10^{-5}\,.\end{aligned}$$

In den abschließenden beiden Aufgaben k) und l) werden zwei *Typen* von Integralen behandelt, die man generell mittels Substitution berechnen kann. Ich schreibe hier $u(x)$ statt $f(x)$, um an unsere Notation der Substitutionsregel anzuschließen.
k) Ein Beispiel für diesen Typ war Aufgabenteil b) (bis auf einen zusätzlichen Faktor).

$$\int_a^b u(x)\cdot u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} z\,dz = \Big[\frac{1}{2}z^2\Big]_{u(a)}^{u(b)} = \frac{1}{2}(u(b)^2 - u(a)^2)\,.$$

l) Dies ist ein äußerst wichtiger Integraltyp. Beispiele dafür waren d) – f). Man nennt dies die *logarithmische* Integration, denn es gilt (sofern das Integral definiert ist, d. h. sofern u zwischen a und b keine Nullstelle hat):

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx &= \int_a^b \frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{1}{z}\,dz = \Big[\ln|z|\Big]_{u(a)}^{u(b)} \\ &= \ln|u(b)| - \ln|u(a)| = \ln\frac{|u(b)|}{|u(a)|} = \ln\Big|\frac{u(b)}{u(a)}\Big| = \ln\frac{u(b)}{u(a)}\,.\end{aligned}$$

Man beachte bei der letzten Beziehung, dass $u(b)$ und $u(a)$ dasselbe Vorzeichen haben (sonst hätte die stetige Funktion u zwischen a und b eine Nullstelle) und folglich $\frac{u(b)}{u(a)}$ positiv ist.

S. 145, Nr. 6.:

a) Wir setzen $u(x) = x^2$, also $u'(x) = 2x$ und $x = \frac{1}{2}u'(x)$. Daher

$$\int_a^b xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b e^{u(x)}\cdot u'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{u(a)}^{u(b)} e^z\,dz = \frac{1}{2}\Big[e^z\Big]_{a^2}^{b^2} = \frac{1}{2}(e^{b^2} - e^{a^2})\,.$$

b) Wir zerlegen das Integral und wenden auf den ersten Summanden die Substitutionsregel mit $u(x) = 3x^2$ an:

$$\begin{aligned}&\int_a^b (xe^{3x^2} + 2x)\,dx = \int_a^b xe^{3x^2}\,dx + \int_a^b 2xdx = \frac{1}{6}\int_a^b e^{u(x)}\cdot u'(x)\,dx + (b^2 - a^2) \\ &= \frac{1}{6}\Big[e^z\Big]_{u(a)}^{u(b)} + (b^2 - a^2) = \frac{1}{6}(e^{3b^2} - e^{3a^2}) + (b^2 - a^2)\,.\end{aligned}$$

c) Hier hat man es lediglich mit linearer Substitution $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$ zu tun:

$$\int_a^b e^{2x+1}\,dx = \Big[\frac{1}{2}e^{2x+1}\Big]_a^b = \frac{1}{2}(e^{2b+1} - e^{2a+1})\,.$$

d) Man wählt $u(x) = x^2$ und erhält als Integralwert: $\dfrac{1}{4}(e^{2b^2} - e^{2a^2})$.
e) Mit $u(x) = \ln(x)$, also $u'(x) = \frac{1}{x}$ ist dieses Integral vom Typ der vorangehenden Aufgabe 2.k):

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int_1^2 \ln(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 u(x)\cdot u'(x)\,dx = \int_{u(1)}^{u(2)} z\,dz$$
$$= \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{2}\ln^2(2)\,.$$

f) Setzt man hier $u(x) = x^2$, so erhält man

$$\int_1^2 x\ln(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{u(1)}^{u(2)} \ln(z)\,dz\,.$$

Man muss dann entweder eine früher berechnete Stammfunktion von ln benutzen, oder diese erneut mittels partieller Integration berechnen. Man erhält so als Integralwert

$$\int_1^2 x\ln(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\Big[z\ln(z) - z\Big]_1^4 = 4\ln(2) - \frac{3}{2}\,.$$

Man kann das Integral aber auch unter Verwendung der Gesetzmäßigkeiten für den Logarithmus ($\ln(x^2) = 2\ln(x)$ für $x > 0$!) vereinfachen und direkt partielle Integration anwenden (vgl. Aufgabe 5a)):

$$\int_1^2 x\ln(x^2) = 2\int_1^2 x\ln(x) = 2\Big[\frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x)\Big]_1^2 - 2\int_1^2 \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= 4\ln(2) - \int_1^2 x\,dx = 4\ln(2) - \frac{3}{2}\,.$$

5) S. 146, Nr. 1:
a) Substitution $u(x) = x^2$, also $u'(x) = 2x$, ergibt $f(x) = e^{u(x)}\cdot u'(x)$. Nach der Substitutionsregel muss man eine Stammfunktion für e^z bestimmen und in diese $u(x)$ einsetzen. Man erhält so $F(x) = e^{x^2}$ als eine Stammfunktion von f.
b) Substitution $u(x) = x^3$, also $u'(x) = 3x^2$ und somit $x^2 = \frac{1}{3}u'(x)$. Damit wird $f(x) = \frac{1}{3}\cdot e^{u(x)}\cdot u'(x)$. Wieder ist nur eine Stammfunktion für e^z zu bestimmen. Man erhält so $F(x) = \dfrac{1}{3}e^{x^3}$ als einen Stammfunktionsterm für $f(x)$.
c) Substitution $u(x) = -x^3$; eine Stammfunktion ist $F(x) = -\dfrac{1}{3}e^{-x^3}$.
g) Substitution $u(x) = x^2-1$; damit ist $f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u(x)}}\cdot u'(x)$ und man benötigt eine Stammfunktion für $\frac{1}{\sqrt{z}} = z^{-\frac{1}{2}}$. Diese ist durch $z^{+\frac{1}{2}}\cdot 2 = 2\sqrt{z}$ gegeben. Setzt man für z nun $u(x)$ ein, so erhält man schließlich $\sqrt{x^2-1}$ als gesuchte Stammfunktion.

h) Substitution $u(x) = x^3 - 1$; eine Stammfunktion ist $-\dfrac{1}{3(x^3-1)}$.
i) Substitution $u(x) = x^2 + x$; eine Stammfunktion ist $F(x) = \sqrt{x^2+x}$.

j) Substitution $u(x) = x^2 + 1$; eine Stammfunktion ist $F(x) = -\dfrac{1}{4(x^2+1)^2}$.

k) Substitution $u(x) = \ln(x)$. Dies ergibt $u'(x) = \frac{1}{x}$ und damit hat $f(x)$ die Form

$$f(x) = \frac{1}{\ln^3 x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{u(x)^3} \cdot u'(x)\,.$$

Gemäß Substitutionsregel muss man nun eine Stammfunktion für $\frac{1}{z^3} = z^{-3}$ bestimmen (etwa $-\frac{1}{2}z^{-2}$) und in diese $u(x)$ einsetzen. Man erhält so $F(x) = -\frac{1}{2\ln^2 x}$ als Stammfunktion für $f(x)$.

l) Diese Funktion ist höchstens für $x > 0$ definiert (ln ist nur dort definiert!), also gilt $\sqrt{x^2} = x$ und damit ist die hier gegebene Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\,.$$

Wegen des Wurzelterms im Nenner ist f nur definiert für $\ln(x) > 0$, d. h. $x > 1$. Die Bestimmung einer Stammfunktion verläuft nun wie in k), nur dass der Exponent 3 durch $\frac{1}{2}$ ersetzt ist. Man erhält als Stammfunktion $F(x) = 2\sqrt{\ln(x)}$.