Übungen zum Selbststudium aus dem Lehrbuch

Lambacher Schweizer, Analysis, Grundkursband, Klett-Verlag

1) **LS, p. 187, Nr. 20**

Lösung:
Wir wählen das Koordinatensystem so, dass $B = (0, 30)$ und $A = (50, 0)$ ist. Der gesuchte Abzweigpunkt, an dem der Fahrer die Straße verlässt, sei $X = (x, 0)$ mit $x > 0$. Es seien $v_1 = 40$ die Geschwindigkeit auf der Straße und $v_2 = 20$ die Geschwindigkeit im Gelände (jeweils in km/h) und t_1 bzw. t_2 die Fahrzeiten für die entsprechenden Teilabschnitte (in Stunden). Dann gilt

$$50 - x = v_1 t_1 \iff t_1 = \frac{50-x}{40} \quad \text{und} \quad \sqrt{30^2 + x^2} = v_2 t_2 \iff t_2 = \frac{\sqrt{900+x^2}}{20}\,.$$

Die Gesamtfahrzeit t ist also

$$t = t(x) = \frac{50-x}{40} + \frac{\sqrt{900+x^2}}{20}\,.$$

Wir untersuchen die Funktion $t(x)$ auf Extrema:

$$\begin{aligned} t'(x) = -\frac{1}{40} + \frac{1}{20} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{900+x^2}} &= 0 \quad \Big| \cdot 40\sqrt{900+x^2} \\ \iff \sqrt{900+x^2} = 2x \underbrace{\iff}_{x>0\,!} 900 + x^2 &= 4x^2 \\ \iff x^2 = 300 \iff x = \pm 10\sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

Da $x > 0$ ist, kommt als mögliche Extremstelle nur $10\sqrt{3} \approx 17{,}32$ in Frage. An dieser Stelle muss das absolute Minimum von t liegen, da die Randwerte

$$t(50) = \frac{\sqrt{900+2500}}{20} = \frac{1}{2}\sqrt{34} \approx 2{,}92\,,\ t(0) = \frac{5}{4} + \frac{3}{2} = 2{,}75$$

größer sind als

$$t(10\sqrt{3}) = \frac{50 - 10\sqrt{3}}{40} + \frac{\sqrt{900+300}}{20} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{3} + \sqrt{3} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 2{,}55\,.$$

Der Radfahrer muss nach $50 - 17{,}32 = 32{,}68$ km die Straße verlassen und direkt Richtung B fahren.

2) **LS, p. 187, Nr. 17**
Tipp: Die *Zielgröße* E ist abhängig von 2 Parametern (c und k) und *zwei* variablen Größen, der Geschwindigkeit x und der Zeit t. Erstellen Sie zunächst den Zusammenhang zwischen x und t und eliminieren Sie damit t. Sie erhalten die Zielgröße E als Funktion nur *einer* Variablen, der Geschwindigkeit x. Untersuchen Sie nun diese sog. *Zielfunktion* $E(x)$.

Lösung:
Der Fisch schwimmt gegen den Strom, also mit der Geschwindigkeit $x-2$ (in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$). Bei einer Strecke von 100 m gilt für die benötigte Zeit

$$100 = (x-2)\cdot t \iff t = \frac{100}{x-2}\,.$$

(Es muss $x > 2$ vorausgesetzt werden, damit der Fisch gegen die Strömung anschwimmen kann und $t > 0$ ist.) Damit erhalten wir als Zielfunktion

$$E(x) = c\cdot x^k \cdot \frac{100}{x-2} = 100c\cdot\frac{x^k}{x-2} \quad (x>2)\,.$$

a) Wir suchen das absolute Minimum:

$$\begin{aligned} E'(x) &= 100c\cdot\frac{kx^{k-1}(x-2)-x^k}{(x-2)^2} = 100cx^{k-1}\cdot\frac{(k-1)x-2k}{(x-2)^2} = 0 \\ &\iff x=0 \ \vee\ (k-1)x = 2k \iff x = \frac{2k}{k-1} \quad (x>2!) \end{aligned}$$

Bei dem gefundenen Wert muss E sein absolutes Minimum haben, da die Randgrenzwerte ∞ sind:

$$\begin{aligned} \lim_{x\searrow 2} E(x) &= \infty \quad (2 \text{ Pol von } E,\ E(x)>0), \\ \lim_{x\to\infty} E(x) &= \infty \quad (\text{Zählergrad größer Nennergrad, } c>0)\,. \end{aligned}$$

b) Wir untersuchen die soeben bestimmte ‘energiesparendste’ Geschwindigkeit als Funktion von k:

$$x(k) = \frac{2k}{k-1} \quad (k>2)\,.$$

Die Behauptung besagt, dass $x(k)$ eine monoton fallende Funktion von k ist. Dies kann man mit Hilfe der Ableitung untersuchen, man kann es aber auch direkt an der Asymptotenform erkennen:

$$x(k) = \frac{2k}{k-1} = \frac{2(k-1)+2}{k-1} = 2 + \frac{2}{k-1}\,.$$

(Diese Umformung ist im Grunde genommen die Polynomdivision, mit der man das asymptotische Verhalten von rationalen Funktionen bestimmen kann.) Man erkennt, wenn k wächst, dann sinkt $\frac{2}{k-1}$ und folglich auch die ‘energiesparendste’ Geschwindigkeit $x(k)$. (Sie nähert sich dabei immer mehr dem Wert 2, der Mindestgeschwindigkeit, um gegen die Strömung anzukommen.)

3) **LS, p. 201, Nr. 9**

Lösung:
Gegeben ist $f(x) = \ln x$ und die gesuchten Parabeln haben den Funktionsterm $g(x) = ax^2 + c$. Zwei solche Funktionen schneiden sich orthogonal (=rechtwinklig), wenn gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \quad (x \text{ ist Schnittstelle}) \quad \text{und} \\ f'(x)\cdot g'(x) &= -1 \quad (\text{die Tangenten an der Stelle } x \text{ sind orthogonal zueinander}) \end{aligned}$$

Explizit ergeben sich so die beiden Gleichungen

$$ax^2 + c = \ln x \quad \text{und} \quad -1 = \frac{1}{x} \cdot 2ax = 2a\,.$$

Die zweite Gleichung enthält nicht mehr das x und ist nur wahr für $a = -\frac{1}{2}$. Dies bedeutet, dass für $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + c$ die zweite Gleichung $f'(x) \cdot g'(x) = -1$ unabhängig von c und x wahr ist.
Es bleibt nun die erste Gleichung

$$-\frac{1}{2}x^2 + c = \ln x \iff \ln x + \frac{1}{2}x^2 = c\,.$$

Zu jedem positiven x gibt es offenbar ein (und nur ein) passendes c (nämlich $c = \ln(x) + \frac{x^2}{2}$), so dass auch die erste Gleichung erfüllt ist. Dabei kann c alle reellen Werte annehmen, denn

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\underbrace{\ln(x)}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\to\infty}\Big) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{\ln(x)}_{\to-\infty} + \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\to 0}\Big) = -\infty\,.$$

Also schneidet jede Parabel mit der Gleichung $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + c$ den Graphen der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ orthogonal.
Zusatz: Man kann zwar zu jeder gewünschten Schnittstelle x das passende c berechnen (s.o.), aber zu gegebenem c kann man die Schnittstelle x nicht einfach bestimmen. Allerdings gibt es zu jedem c jeweils nur eine Schnittstelle x, denn die Funktion $\ln x + \frac{1}{2}x^2$ ist streng monoton wachsend (ableiten!), so dass die Gleichung $\ln x + \frac{x^2}{2} = c$ für jedes c nur eine Lösung haben kann.

4) **LS, p. 206, Nr. 9b,c**

Lösung:
b) Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x - k \cdot e^x$ $(k \neq 0)$. Wir untersuchen f_k auf Extrempunkte:

$$f_k'(x) = 1 - k \cdot e^x = 0 \iff e^x = \frac{1}{k}\,.$$

Für $k < 0$ hat diese Gleichung keine Lösung und f_k besitzt keine Extremstellen. Für $k > 0$ hat diese Gleichung nur die Lösung $x = \ln\frac{1}{k}$. An dieser Nullstelle wechselt die Ableitung $f_k'(x) = 1 - k \cdot e^x$ ihr Vorzeichen von $+$ zu $-$ (denn wegen $k > 0$ ist $1 - ke^x$ monoton fallend), also ist $\ln\frac{1}{k}$ (einzige) Maximalstelle von f_k. Der zugehörige Maximalwert ist

$$f_k(\ln\frac{1}{k}) = \ln\frac{1}{k} - k \cdot e^{\ln\frac{1}{k}} = \ln\frac{1}{k} - 1\,.$$

Die Hochpunkte $H_k = (\ln\frac{1}{k}, \ln\frac{1}{k} - 1)$ erfüllen also alle die Gleichung $y = x - 1$.
c) Ist a die Berührstelle der Tangente, so lautet ihre Gleichung $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Wenn diese Tangente durch den Koordinatenursprung verläuft, muss gelten

$$0 = f(a) + f'(a) \cdot (-a) \iff f(a) = f'(a) \cdot a\,.$$

Wir lösen nun diese Gleichung (mit der Unbekannten a):

$$f(a) = f'(a) \cdot a \iff a - ke^a = (1 - ke^a)a = a - ake^a \iff 1 = a\,.$$

Die Berührstelle ist also (unabhängig von k) stets die Stelle 1, der Berührpunkt also $B = (1, f_k(1)) = (1, 1 - ke)$.

5) **LS, p. 206, Nr. 8**

Lösung:
Wir untersuchen für $k > 0$ die Funktionenschar

$$f_k(x) = \frac{k \cdot e^{-x}}{k + e^{-x}} = \frac{k}{ke^x + 1} = k(ke^x + 1)^{-1}\,.$$

Die Funktionen sind für $k > 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert (der Nenner ist immer positiv). Wir bestimmen zunächst die Ableitungen[1)]

$$\begin{aligned}
f_k'(x) &= -k(ke^x+1)^{-2} \cdot ke^x = -\frac{k^2e^x}{(ke^x+1)^2}\,,\\
f_k''(x) &= -\frac{k^2e^x(ke^x+1)^2 - k^2e^x \cdot 2(ke^x+1) \cdot ke^x}{(ke^x+1)^4}\\
&= \frac{-k^2e^x(ke^x+1) + 2k^3e^{2x}}{(ke^x+1)^3}\\
&= \frac{k^3e^{2x} - k^2e^x}{(ke^x+1)^3} = k^2e^x\,\frac{ke^x-1}{(ke^x+1)^3}\,.
\end{aligned}$$

Wir erkennen: $f_k'(x) < 0$ für alle x; alle f_k $(k > 0)$ sind also streng monoton fallend. Zur Bestimmung der Wendepunkte berechnen wir[2)]

$$f_k''(x) = 0 \iff ke^x = 1 \iff e^x = \frac{1}{k} \iff x = \ln\frac{1}{k}\,.$$

An dieser einzigen Nullstelle wechselt f_k'' das Vorzeichen, und zwar von $-$ zu $+$, denn für $k > 0$ ist $ke^x - 1$ streng monoton wachsend (und die anderen Faktoren im Term von f_k'' sind positiv). Die Wendepunkte der Funktionen f_k sind daher

$$W_k = (\ln\frac{1}{k}, f_k(\ln\frac{1}{k})) = (\ln\frac{1}{k}, \frac{k}{k\cdot\frac{1}{k}+1}) = (\ln\frac{1}{k}, \frac{k}{2})\,.$$

Um die Gleichung für die Ortskurve der Wendepunkte zu bestimmen, setzen wir $x = \ln\frac{1}{k}$ und eliminieren damit k aus W_k:

$$x = \ln\frac{1}{k} \iff \frac{1}{k} = e^x \iff k = e^{-x} \implies W_k = (x, \frac{e^{-x}}{2})$$

Die Wendepunkte erfüllen also die Funktionsgleichung $y = e^{-x}$.

---

1) Wenn Sie f_k ausgehend von dem vorgegebenen Term mit der Quotientenregel ableiten, sollten Sie auf folgende Formen für die Ableitungen kommen:

$$\begin{aligned}
f_k'(x) &= \frac{-ke^{-x}(k+e^{-x}) - ke^{-x}(-e^{-x})}{(k+e^{-x})^2} = \frac{-k^2e^{-x}}{(k+e^{-x})^2}\,,\\
f_k''(x) &= k^2e^{-x}\,\frac{k-e^{-x}}{(k+e^{-x})^3}
\end{aligned}$$

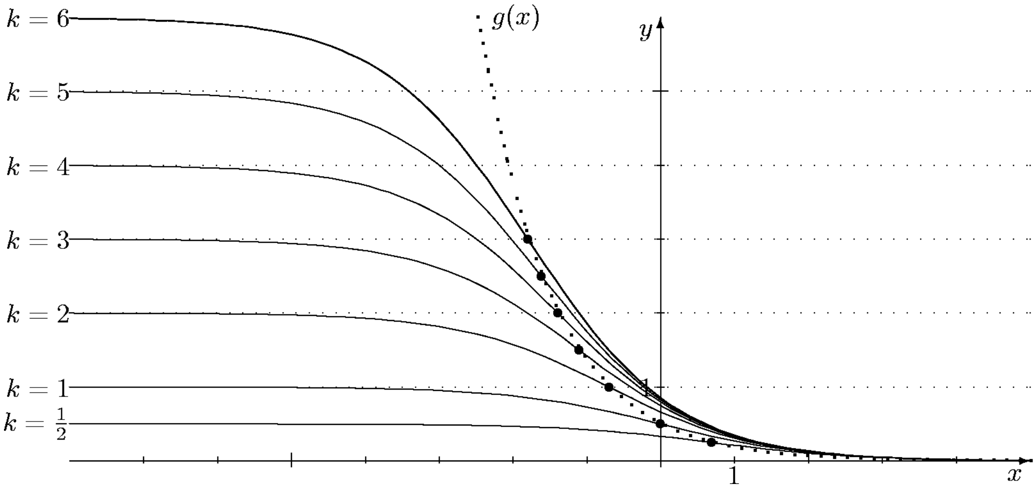
2) Wenn Sie von der in der vorigen Fußnote bestimmten Form für f_k'' ausgehen, sieht die Rechnung so aus:

$$f_k''(x) = 0 \iff k = e^{-x} \iff \ln k = -x \iff x = -\ln k\,(= \ln\frac{1}{k})\,.$$

Zusatz (zur besseren Vorstellung des Verlaufs der Funktionen): Mit Hilfe der Grenzwertsätze bestimmen wir die Randgrenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ke^{-x}}{k+e^{-x}} = \frac{0}{k} = 0\,,\quad \lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{ke^{x}+1} = \frac{k}{0+1} = k$$

Hier einige Graphen mit den Wendepunkten und dem Graphen von g:



Beachten Sie: Der Wendepunkt W_k von f_k liegt immer in der Mitte zwischen den beiden Asymptoten von f_k.

6) **LS, p. 208, Nr. 15**

Lösung:

Die Skizze zur Aufgabe legt nahe, $u > 1$ vorauszusetzen.

a) Die Tangente an den Graphen von $f(x) = \ln x$ mit der Berührstelle u ist Graph der

Tangentenfunktion: $t_u(x) = f(u) + f'(u)(x-u) = \ln(u) + \dfrac{1}{u}(x-u) = \dfrac{1}{u}x + \ln(u) - 1\,.$

Mit den Bezeichnungen der Aufgabe gilt daher

$$Q = (0, \ln(u) - 1)\,,\quad R = (0, \ln(u))$$

und der Abstand zwischen Q und R beträgt immer 1.

(Anmerkung: Diese Überlegungen gelten auch für $0 < u < 1$.)

b) Die Gerade senkrecht zur Tangente durch den Berührpunkt nennt man *Normale*. Ihr Anstieg ist $-\frac{1}{f'(u)}$ (wenn $f'(u) \neq 0$ ist) und sie ist Graph der

$$\text{Normalenfunktion:}\quad n_u(x) = f(u) - \frac{1}{f'(u)}(x-u)$$

In diesem Falle ist $f'(u) = \frac{1}{u}$, also der Normalenanstieg $-u$ und daher

$$n_u(x) = \ln(u) - u(x-u)\,.$$

Wir bestimmen die Nullstelle von n_u:

$$0 = \ln(u) - u(x-u) \iff ux = \ln(u) + u^2 \iff x = \frac{\ln(u)}{u} + u\,.$$

Damit hat das genannte Dreieck die Breite $\frac{\ln(u)}{u}$ und die Höhe $\ln(u)$ (für $u > 1$). Die Fläche des Dreiecks ist daher

$$A(u) = \frac{(\ln u)^2}{2u}\,.$$

(Diese Formel gilt auch für $0 < u \leq 1$.) Wir untersuchen A als Funktion von u:

$$A'(u) = \frac{2\ln(u) \cdot \frac{1}{u} \cdot 2u - \ln^2 u \cdot 2}{4u^2} = (2 - \ln(u)) \cdot \frac{\ln(u)}{2u^2}\,.$$

Die Nullstellen von A' sind $u = 1$ und $u = e^2$. Bei $u = 1$ hat A sein absolutes Minimum ($A(1) = 0 \leq A(u)$), während bei $u = e^2$ dann ein lokales Maximum liegen muss. (In der Tat hat A' bei $u = e^2$ einen VZW von $+$ zu $-$, denn $2 - \ln(u)$ fällt monoton, die anderen Faktoren sind an dieser Stelle positiv.) Der maximale Flächeninhalt ist $A(e) = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}27$.
Anmerkung: Auch im gesamten Bereich $u > 0$ ist dies die einzige Maximalstelle, aber nicht das *absolute* Maximum, denn $\lim\limits_{u \to 0} A(u) = \infty$. Skizzieren Sie einmal für $0 < u < 1$ ein solches Dreieck und machen Sie sich anschaulich klar, dass es beliebig groß werden kann.

7) **LS, p. 206, Nr. 10**
(Tipp zur Lösung der Gleichung in 10c): Substitution $z = e^{cx}$.)

Lösung:
Ansatz $f(x) = \frac{a}{2c}(e^{cx} + e^{-cx})$ mit $a, c > 0$.
a) f ist achsensymmetrisch (zur y-Achse), denn

$$f(-x) = \frac{a}{2c}(e^{c(-x)} + e^{-c(-x)}) = \frac{a}{2c}(e^{-cx} + e^{cx}) = f(x)\,.$$

b) Wir leiten ab und faktorisieren f':

$$f'(x) = \frac{a}{2c}(e^{cx} \cdot c + e^{-cx} \cdot (-c)) = \frac{a}{2}(e^{cx} - e^{-cx}) = \frac{a}{2ce^{cx}}(e^{2cx} - 1)$$

Damit folgt

$$f'(x) = 0 \iff e^{2cx} = 1 \iff 2cx = 0 \iff x = 0\,.$$

0 ist die einzige mögliche Extremstelle. Bei $x = 0$ hat f' einen VZW von $-$ zu $+$ (denn e^{2cx} wächst monoton und die übrigen Faktoren sind positiv). Also hat f bei 0 ein Minimum; der Minimalwert ist $f(0) = \frac{a}{2c} \cdot 2 = \frac{a}{c}$.
c) Gesucht sind $a, c > 0$ mit $5 = f(0) = \frac{a}{c}$ und

$$30 = f(100) = \frac{a}{2c}(e^{100c} + e^{-100c}) = 2{,}5 \cdot (e^{100c} + e^{-100c}) \iff e^{100c} + e^{-100c} = 12\,.$$

Wir lösen die letzte Gleichung mittels Substitution $z = e^{100c}$:

$$12 = e^{100c} + e^{-100c} = z + \frac{1}{z} \iff z^2 - 12z + 1 = 0 \iff z = 6 \pm \sqrt{35}\,.$$

Rücksubstitution

$$\begin{aligned} z = e^{100c} &\iff 100c = \ln z \iff c = \frac{1}{100}\ln(6 \pm \sqrt{35}) \\ &\iff c = \frac{1}{100}\ln(6 + \sqrt{35}) \approx 0{,}0248 \;\vee\; c = \frac{1}{100}\ln(6 - \sqrt{35}) \approx -0{,}0248\,. \end{aligned}$$

Da $c > 0$ vorausgesetzt war, erhalten wir

$$c = \frac{1}{100}\ln(6+\sqrt{35}) \approx 0{,}0248\,,\; a = 5c = \frac{1}{20}\ln(6+\sqrt{35}) \approx 0{,}1239\,.$$

Für Interessierte: Die beiden Lösungen für c haben nicht nur *ungefähr,* sondern exakt denselben Betrag! Wie kann man das beweisen? Woran liegt das? Führt die zweite Lösung für c zu einer anderen Funktion f?

In den folgenden Aufgabenteilen haben a, c die obigen Werte, insbesondere ist $\frac{a}{c} = 5$.
d) Wir berechnen den Anstieg

$$f'(100) = \frac{a}{2}(e^{100c} - e^{-100c}) = 2{,}5c\cdot(z - \frac{1}{z}) = 2{,}5c\cdot(6+\sqrt{35}-(6-\sqrt{35})) = 5c\sqrt{35} \approx 0{,}733\,.$$

Das Gefälle in den Aufhängepunkten beträgt also 73,3%.
e) Wir lösen die Gleichung

$$\begin{aligned}
&15 = \frac{a}{2c}(e^{cx} + e^{-cx}) \iff 6 = e^{cx} + e^{-cx}\\
&\iff z = e^{cx} \;\wedge\; 6 = z + \frac{1}{z} \iff z = e^{cx} \;\wedge\; z^2 - 6z + 1 = 0\\
&\iff e^{cx} = z = 3 \pm \sqrt{8} \iff x = \frac{1}{c}\cdot\ln(3 \pm \sqrt{8}) =^{*)} \pm\frac{\ln(3+\sqrt{8})}{c} \approx \pm 71{,}14
\end{aligned}$$

Etwa $100 - 71{,}14 = 28{,}86$ Meter von den Pylonen entfernt hängt das Seil 15 Meter über der Fahrbahn.
f) Wir lösen die Gleichung

$$\begin{aligned}
0{,}2 = f'(x) = 2{,}5c(e^{cx} - e^{-cx}) &\iff \frac{0{,}08}{c} = e^{cx} - e^{-cx}\\
&\iff z = e^{cx} \;\wedge\; \frac{0{,}08}{c} = z - \frac{1}{z} \iff z = e^{cx} \;\wedge\; z^2 - \frac{0{,}08}{c}z - 1 = 0\\
&\iff e^{cx} = z = \frac{0{,}04}{c} \pm \sqrt{\left(\frac{0{,}04}{c}\right)^2 + 1} = \frac{0{,}04}{c} \pm \frac{\sqrt{0{,}04^2 + c^2}}{c}\\
&\iff cx = \ln(0{,}04 \pm \sqrt{c^2 + 0{,}04^2}) - \ln c\\
&\iff x =^{*)} \pm\frac{\ln(0{,}04 + \sqrt{c^2 + 0{,}04^2}) - \ln c}{c} \approx \pm 50{,}71
\end{aligned}$$

Der Stuntman kann etwa 100 Meter (bis je 50 Meter von der Mitte aus) auf dem Seil fahren.

---

*) Achtung: Aufgrund der Symmetrie müssen die beiden Lösungen der Gleichung symmetrisch zu 0 liegen, also bis auf das Vorzeichen übereinstimmen. Die Umformung an dieser Stelle ist aber *keine allgemeingültige* Regel, sondern eine Folge der *speziellen* Werte in dieser Situtation!