Symmetrie in der Differential- und Integralrechnung

Aufgabe 1:

a) Wiederholen Sie die Definition der Achsensymmetrie (zur y-Achse) und der Punktsymmetrie (zum Koordinatenursprung). Wie erkennt man bei ganzrationalen Funktionen unmittelbar die Symmetrie?
b) Zeigen Sie (mit Hilfe der Kettenregel):

$$f(-x) = f(x) \implies -f'(-x) = f'(x)\,, \quad f(-x) = -f(x) \implies -f'(-x) = -f'(x)\,,$$

und folgern Sie:

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ punktsymmetrisch} \implies f' \text{ achsensymmetrisch,} \\ f \text{ achsensymmetrisch} \implies f' \text{ punktsymmetrisch.} \end{array}}$$

c) Zeigen Sie für eine beliebige Stammfunktion F von f:

$$-F(-x) \text{ ist ein Stammfunktionsterm für } f(-x)\,.$$

und folgern Sie über einem zu 0 symmetrischen Intervall J

$$\begin{aligned} f(-x) = f(x) &\implies -F(-x) = F(x) + c\,,\ c = -2F(0)\,, \\ f(-x) = -f(x) &\implies -F(-x) = -F(x) + c\,,\ c = 0\,. \end{aligned}$$

d) Zeigen Sie damit schließlich:

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ achsensymmetrisch} \implies \textit{die} \text{ Stammfunktion } F \text{ mit } F(0) = 0 \text{ ist punktsymmetrisch,} \\ f \text{ punktsymmetrisch} \implies \textit{jede} \text{ Stammfunktion } F \text{ ist achsensymmetrisch.} \end{array}}$$

Begründen Sie, warum bei achsensymmetrischem f nicht jede, sondern nur diese eine Stammfunktion punktsymmetrisch sein kann.
e) Zeigen Sie:

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ punktsymmetrisch} \implies \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0, \\ f \text{ achsensymmetrisch} \implies \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,dx. \end{array}}$$

Verwenden Sie diese Tatsachen bei der vereinfachten Berechnung der Integrale von Übung (2), Aufgabe 2).

Lösung:
Es gilt definitionsgemäß:

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ achsensymmetrisch} \iff f(-x) = f(x) \text{ für alle } x, \\ f \text{ punktsymmetrisch} \iff f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x. \end{array}}$$

Ist die ganzrationale Funktion f gegeben durch einen *Polynomterm* $f(x)$, so gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sind } \textit{alle} \text{ Exponenten von } x \text{ in } f(x) \ \textit{gerade,} \text{ so ist } f \ \textit{achsen}\text{symmetrisch.} \\ \text{Sind } \textit{alle} \text{ Exponenten von } x \text{ in } f(x) \ \textit{ungerade,} \text{ so ist } f \ \textit{punkt}\text{symmetrisch.} \end{array}}$$

b) Wir leiten mit Hilfe der Kettenregel ab und erhalten wie behauptet:

$$\begin{aligned} f(-x) = f(x) \implies (f(-x))' = f'(x) &\iff f'(-x) \cdot (-1) = f'(x) \\ &\iff f'(-x) = -f'(x) \\ f(-x) = -f(x) \implies (f(-x))' = -f'(x) &\iff f'(-x) \cdot (-1) = -f'(x) \\ &\iff f'(-x) = f'(x)\,. \end{aligned}$$

c) Eine vorgebliche Stammfunktion bestätigt man durch Ableiten:

$$(-F(-x))' = -F'(-x) \cdot (-1) = f(-x)\,.$$

[Den Ansatz für die angegebene Stammfunktion erhält man durch lineare Substitution.]

Ist nun $f(-x) = f(x)$ für alle x, so ist $-F(-x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Da auch F eine Stammfunktion von f ist, muss also über einem Intervall gelten: $-F(-x) = F(x)+c$ mit einer Konstanten c. Den Wert von c ermittelt man durch Einsetzen von $x = 0$: $-F(-0) = F(0) + c \iff c = -2F(0)$.
Genauso argumentiert man für $f(-x) = -f(x)$: Dann ist $-F(-x)$ eine Stammfunktion für $-f(x)$, also muss wieder ein $c \in \mathbb{R}$ existieren mit $-F(-x) = -F(x) + c$ und Einsetzen von $x = 0$ ergibt $-F(0) = -F(0) + c \iff c = 0$. In diesem Falle gilt also $-F(-x) = F(x)$ für alle x.
d) Ist f achsensymmetrisch, also $f(-x) = f(x)$, so gilt nach c) für die Stammfunktion mit $F(0) = 0$:

$$-F(-x) = F(x) + 2F(0) = F(x) \iff F(-x) = -F(x)\,,\ F \text{ ist punktsymmetrisch.}$$

Und bei punktsymmetrischem f, also $f(-x) = -f(x)$ folgt aus c) sogar für jede Stammfunktion F von f:

$$-F(-x) = -F(x) \iff F(-x) = F(x)\,,\ F \text{ ist achsensymmetrisch.}$$

Bei achsensymmetrischem f ist die Stammfunktion F mit $F(0) = 0$ punktsymmetrisch. Da punktsymmetrische Funktionen notwendig bei 0 eine Nullstelle haben, können alle anderen Stammfunktionen nicht punktsymmetrisch sein.
Ist f punktsymmetrisch, so ist jede Stammfunktion F achsensymmetrisch und es gilt folglich

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(-a) = F(a) - F(a) = 0\,.$$

Ist f achsensymmetrisch, so wähle ich die punktsymmetrische Stammfunktion F (also $F(0) = 0$) und erhalte

$$\int_0^a f(x)\,dx = F(a) - F(0) = F(a)\,,$$
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = F(a) - F(-a) = F(a) + F(a) = 2F(a) = 2\int_0^a f(x)\,dx\,.$$

S. 49, Aufgabe 8:
Warnung: Alle folgenden Überlegungen gelten nur, weil die **Integrationsgrenzen symmetrisch zu 0** liegen!
a/c) Der Integrand ist jeweils punktsymmetrisch, da in dem Polynomterm $f(x)$ alle auftretenden Exponenten ungerade sind. Das Integral ist folglich 0.
b/d) Der Integrand ist achsensymmetrisch, also genügt es jeweils $2\int_0^b f(x)\,dx$ zu berechnen:

b) $\displaystyle\int_{-2}^2 (2x^2 - 4)\,dx = 2\int_0^2 (2x^2 - 4)\,dx = 2\Big[\frac{2}{3}x^3 - 4x\Big]_0^2 = -\frac{16}{3},$

d) $\displaystyle\int_{-3}^3 (3x^2 + 5x^4)\,dx = 2\int_0^3 (3x^2 + 5x^4)\,dx = 2\Big[x^3 + x^5\Big]_0^3 = 540.$

e/f) Bei Polynomtermen kann man den Integranden aufspalten in einen punktsymmetrischen Teil (alle ungeraden Exponenten zusammenfassen) und einen achsensymmetrische Teil (alle geraden Exponenten). Unter Verwendung von e) erhält man so

e) $\displaystyle\int_{-2}^2 (4x^5 - 3)\,dx = \underbrace{\int_{-2}^2 4x^5\,dx}_{=0} - 2\int_0^2 3\,dx = -12,$

f) $\displaystyle\int_{-4}^4 (x^3 - x^2)\,dx = \underbrace{\int_{-4}^4 x^3\,dx}_{=0} - 2\int_0^4 x^2\,dx = -2\cdot\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^4 = -\frac{128}{3}.$