Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Gegeben sind die windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ r \in I\!R, \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix},\ s \in I\!R.$$

a) *Geben Sie eine Definition für Paare windschiefer Geraden an und zeigen Sie, dass g und h tatsächlich windschief sind.* (8 Punkte)

b) *Berechnen Sie alle Punkte auf den Geraden g und h, die vom Ursprung den Abstand 5 [LE] haben, und interpretieren Sie das Ergebnis.* (10 Punkte)

c) *Bestimmen Sie den Abstand des Punktes* $P(2|1|3) \in g$ *von der Geraden h.* (8 Punkte)

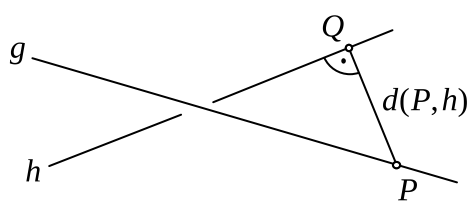

Abbildung 1

Name: ____________________

d) Der Abstand windschiefer Geraden kann auf den Abstand paralleler Ebenen zurückgeführt werden.

Bestimmen Sie Gleichungen paralleler Ebenen E_g und E_h mit $g \subset E_\mathrm{g}$ und $h \subset E_\mathrm{h}$ und berechnen Sie den Abstand $d(E_\mathrm{g}, E_\mathrm{h})$ der beiden Ebenen.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden k, die g und h orthogonal schneidet (siehe Abbildung 2). (18 Punkte)

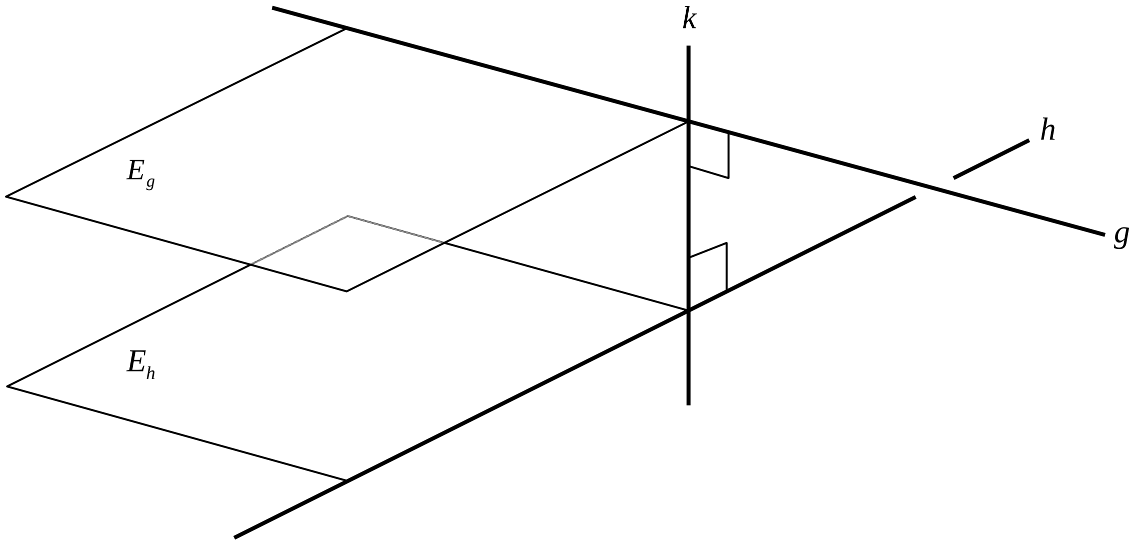

Abbildung 2

e) *Begründen Sie:*
Wenn die Punkte $P_1, P_2 \in g, P_1 \neq P_2,$ und $Q_1, Q_2 \in h, Q_1 \neq Q_2$ auf den windschiefen Geraden g und h liegen, dann sind auch die Geraden P_1Q_1 und P_2Q_2 windschief.

(6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 1:
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Zwei Geraden $g,h \subset IR^3$ heißen windschief z. B., wenn sie weder parallel sind, noch einen gemeinsamen Punkt haben.

Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix}$$

hat keine Lösung, die Geraden schneiden sich nicht. Offenbar sind die Geraden nicht parallel. Die Geraden *g* und *h* sind also windschief.

Modelllösung b)

Punkte *P* auf *g*:

Es ist *r* so zu bestimmen, dass $P(2+3r|1+2r|3-2r) \in g$ zu *O* den Abstand 5 hat.

$d(P,O) = 5 \Leftrightarrow (2+3r)^2 + (1+2r)^2 + (3-2r)^2 = 25 \Leftrightarrow r \approx 0{,}70 \vee r \approx -0{,}93$.

Die gesuchten Punkte sind $P_1 \approx (4{,}1 \,|\, 2{,}4 \,|\, 1{,}6)$ und $P_2 \approx (-0{,}79 \,|\, -0{,}86 \,|\, 4{,}86)$.

Punkte *Q* auf *h*:

$d(Q,O) = 5 \Leftrightarrow (12+s)^2 + (-1-2s)^2 + (-12-6s)^2 = 25$.

Die Gleichung hat keine Lösung: Es gibt auf *h* keine Punkte, die vom Ursprung den Abstand 5 LE haben.

Die Gerade *h* ist vom Ursprung weiter als 5 LE entfernt, während es auf Geraden *g* (zwischen den Punkten P_1 und P_2) Punkte gibt, die weniger als 5 LE vom Ursprung entfernt sind.

Modelllösung c)

Der Punkt $Q \in h$ mit kleinstem Abstand von P wird als Durchstoßpunkt der Geraden h durch die Hilfsebene H mit $P \in H$ und $H \perp h$ (oder als Fußpunkt des Lotes von P auf h) bestimmt.

$$H: x_1 - 2x_2 - 6x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -18$$

$$h \cap H: (12+s) - 2(-1-2s) - 6(-12-6s) = -18$$

$$\Leftrightarrow 41s = -104 \Leftrightarrow s = \frac{-104}{41} \approx -2{,}54$$

$$\Rightarrow Q \approx (9{,}46 \,|\, 4{,}07 \,|\, 3{,}22) \Rightarrow \left|\overline{PQ}\right| \approx \begin{vmatrix} 7{,}46 \\ 3{,}07 \\ 0{,}22 \end{vmatrix} \approx 8{,}07 \text{ [LE]}$$

Modelllösung d)

Gleichungen der Ebenen $E_{\mathrm{g}}, E_{\mathrm{h}}$ werden ermittelt, die g bzw. h enthalten und parallel zur jeweils anderen Ebene sind.

Berechnung eines Vektors $\vec{w}$, der auf g und h senkrecht steht:

$$\begin{vmatrix} 3w_1 + 2w_2 - 2w_3 = 0 \\ w_1 - \ 2w_2 - 6w_3 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\mathrm{g}}: \vec{w} \cdot \vec{x} = \vec{w} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5, \quad E_{\mathrm{h}}: \vec{w} \cdot \vec{x} = \vec{w} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} = 14$$

Der Abstand der beiden Ebenen ist z. B. mit Hilfe der Hesseschen Normalform zu bestimmen:

$$d(E_{\mathrm{g}}, E_{\mathrm{h}}) = \frac{1}{|\vec{w}|} \cdot \left| \vec{w} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \vec{w} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \cdot |5 - 14| = 3$$

Berechnung der Geraden *k*:

Die Hilfsebene *H*, die von *g* und dem Richtungsvektor $\vec{w}$ von *k* aufgespannt wird, hat die Gleichung $H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ r, t \in \mathbb{R}$ bzw. $H: 2x_1 + 7x_2 + 10x_3 - 41 = 0$.

Der Schnitt von *H* mit der Geraden *h* liefert *S* als Punkt der Geraden *k*:

$2 \cdot (12 + s) + 7 \cdot (-1 - 2s) + 10 \cdot (-12 - 6s) = 41 \Leftrightarrow s = -2$.

Ein Punkt der Geraden *k* ist damit $S(10 \mid 3 \mid 0)$.

Es ergibt sich $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$.

Modelllösung e)

Wenn die Geraden P_1Q_1 und P_2Q_2 nicht windschief wären, dann wären sie parallel oder würden sich schneiden, so dass die Punkte P_1, P_2, Q_1, Q_2 in einer Ebene lägen. Damit lägen auch die Geraden $P_1P_2 = g$ und $Q_1Q_2 = h$ in derselben Ebene, wären also nicht windschief. Also müssen die Geraden P_1Q_1 und P_2Q_2 windschief sein.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
	Der Prüfling	
1	gibt eine Definition für Paare windschiefer Geraden an.	2 (I)
2	zeigt, dass *g* und *h* windschief sind.	6 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Alternativlösungen zu Teil c/d)

c) Hier die Lösung, wie von Frau Ehrke vorgetragen: Bestimmung des Lotfußpunktes von P auf h (entsprechend der Definition):

Gesucht ist $Q \in h$ mit $\overrightarrow{PQ} \perp h$. Also:

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{PQ} \perp h \iff \overrightarrow{PQ} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Es ist

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Wir lösen daher die Gleichung

$$0 = \overrightarrow{PQ} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \iff \left(\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = 104 + 41s \iff s = -\frac{104}{41}\,.$$

Von hier ab genauso wie auf der vorigen Seite.

d) Hier die Lösung nach dem ‘alten’ Verfahren der Bestimmung der beiden Lotfußpunkte des gemeinsamen Lotes bei windschiefen Geraden (siehe Skript §5 c., 3. Beispiel auf S. 19):

Wir bestimmen allgemein den Verbindungsvektor von Punkten der beiden Geraden:

$$X \in g \iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad Y \in h \iff \overrightarrow{OY} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Gesucht sind r, s mit $\overrightarrow{XY} \perp g$ und $\overrightarrow{XY} \perp h$, also mit

$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 56 - 17r + 11s\,,$$

$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = 104 - 11r + 41s\,.$$

Wir lösen das lineare Gleichungssystem wie üblich mit dem Gauß-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{rr|r} -17 & 11 & -56 \\ -11 & 41 & -104 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -17 & 11 & -56 \\ 0 & 576 & -1152 \end{array} \right)$$

Wir erhalten $576s = -1152 \iff s = -2$ und dann $-17r - 22 = -56 \iff r = 2$. Damit sind die Fußpunkte $F_g \in g$ und $F_h \in h$ des gemeinsamen Lotes gegeben durch

$$\overrightarrow{OFg} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \; F_g = (8, 5, -1)\,,$$

$$\overrightarrow{OF_h} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; F_h = (10, 3, 0)\,.$$

(Dies bestätigt den Richtungsvektor $\overrightarrow{F_gF_h} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ von k und den berechneten Abstand $d = |\overrightarrow{F_gF_h}| = \sqrt{9} = 3$.) Eine gesuchte Parameterdarstellung für die Lotgerade ist daher

$$X \in k \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OF_g} + t\overrightarrow{F_gF_h} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$