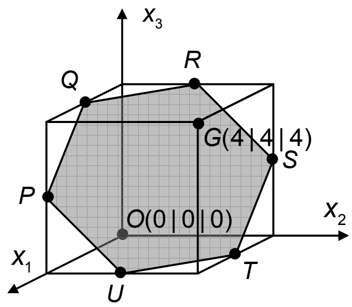
Name: ______________________

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:



Der rechts abgebildete Würfel mit der Kantenlänge 4 [LE] hat die gegenüberliegenden Ecken $O(0\,|\,0\,|\,0)$ und $G(4\,|\,4\,|\,4)$. Er wird durch eine Ebene E so in zwei Teile zerlegt, dass als Schnittfläche das grau gefärbte regelmäßige Sechseck entsteht, dessen Ecken die Mittelpunkte $P(4\,|\,0\,|\,2)$, $Q(2\,|\,0\,|\,4)$, $R(0\,|\,2\,|\,4)$, $S(0\,|\,4\,|\,2)$, $T(2\,|\,4\,|\,0)$ und $U(4\,|\,2\,|\,0)$ von sechs Würfelkanten sind.

a) *Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene E in Parameterform.*
Geben Sie eine Gleichung der Ursprungsgeraden OG an.
Zeigen Sie, dass die Gerade OG die Ebene E rechtwinklig schneidet, und berechnen Sie den Schnittpunkt M. (16 Punkte)

[Zur Kontrolle: $E:\ x+y+z=6$, $M(2\,|\,2\,|\,2)$]

b) *Zeigen Sie, dass das Dreieck PMQ mit* $M(2\,|\,2\,|\,2)$ *gleichseitig ist. Bestimmen Sie seinen Flächeninhalt.*
Berechnen Sie den Umfang des Sechsecks und seinen Flächeninhalt. (12 Punkte)

[Zur Kontrolle: Das Dreieck *PMQ* hat den Flächeninhalt $2\sqrt{3}$ FE.]

c) *Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide, die das Sechseck als Grundfläche und den Punkt G als Spitze hat, und berechnen Sie, wie viel Prozent des Würfelvolumens die Pyramide einnimmt.* (8 Punkte)

d) *Zeigen Sie, dass die Gerade* $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},\ s\in IR,$ *in der Ebene E liegt.*

Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der Geraden g und der Sechsecksfläche und ermitteln Sie die besondere Lage von g bezüglich des Sechsecks. (14 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Gleichung von E in Parameterform:

Mit $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PU} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ erhält man $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ r,s \in IR$.

[Kontrolle: $x + y + z = (4 - r) + (0 + s) + (2 + r - s) = 6$]

$OG:\ \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in IR$.

Wegen $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$ ist der Richtungsvektor von OG orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren von E und damit orthogonal zur Ebene E.

Schnittpunkt von OG und E:

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t = 4 - r \\ t = s \\ t = 2 + r - s \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} s = 4 - r \\ t = s \\ 2s = 2 + r \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} s = 4 - r \\ t = s \\ 3s = 6 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} r = 2 \\ t = 2 \\ s = 2 \end{array} \right|$$

oder einfacher mit dem Kontrollergebnis für E: $x + y + z = t + t + t = 6 \Rightarrow t = 2$.

Der gesuchte Schnittpunkt von OG und E ist $M(2\,|\,2\,|\,2)$.

Modelllösung b)

Der Punkt $M(2\,|\,2\,|\,2)$ ist der Schnittpunkt der Geraden OG und der Ebene E.

$|PQ| = \sqrt{(2-4)^2 + 0^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ [LE] ,

$|PM| = \sqrt{(2-4)^2 + (0-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{8} = |PQ|$,

$|QM| = \sqrt{(2-2)^2 + (0-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8} = |PM|$. Die Punkte P und Q haben denselben Abstand von M und voneinander.

Das gleichseitige Dreieck PMQ hat den Flächeninhalt

$\frac{1}{2}|PQ| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|PQ| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$ [FE].

Das Sechseck hat den Umfang $6 \cdot |PQ| = 12\sqrt{2}$ [LE] und, da es aus 6 (zu PMQ) kongruenten gleichseitigen Dreiecken besteht, den Flächeninhalt $6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ [FE].

Modelllösung c)

Da die Gerade *OG* das Sechseck in *M* rechtwinklig schneidet, hat die Pyramide die Höhe $|MG| = \sqrt{(4-2)^2 + (4-2)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{3}$ [LE].

Das Pyramidenvolumen ist daher $\frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24$ [VE].

Das Pyramidenvolumen umfasst $\frac{24}{64} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$ des Würfelvolumens.

Modelllösung d)

Wegen $(3-s) + (3-s) + 2s = 6$ erfüllt der Geradenterm von *g* die Ebenengleichung von *E* unabhängig vom Laufparameter *s*. Das bedeutet, die Gerade *g* liegt in der Ebene *E*.
Die Punkte $A_S(3-s\,|\,3-s\,|\,2s)$, $s \in IR$, $0 \le s \le 2$, der Geraden *g* bilden die Strecke $\overline{AB}$ mit den Endpunkten $A(3\,|\,3\,|\,0) = A_0$ und $B(1\,|\,1\,|\,4) = A_2$. Die Strecke $\overline{AB}$ liegt in der Sechsecksfläche. *A* und *B* sind die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Sechsecksseiten $\overline{TU}$ und $\overline{QR}$. Die Gerade *g* verläuft daher in der Mitte zwischen den Geraden *QU* und *RT* und parallel zu ihnen; sie ist eine der [sechs] Symmetrieachsen des Sechsecks.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	bestimmt eine Gleichung von *E* in Parameterform.	5 (II)
2	gibt eine Gleichung der Ursprungsgeraden *OG* an.	3 (I)
3	zeigt, dass die Gerade *OG* die Ebene *E* rechtwinklig schneidet.	3 (II)
4	berechnet den Schnittpunkt.	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

1 AFB = Anforderungsbereich